This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 1,237,206

Library of the University of Michigan

Bought with the income

of the

Ford - Messer

Bequest

AS
182
.G552

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

12254

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1896.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Verlagsbuchhandlung.
1896.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1896.

P. Bachmetjew, Hauptresultate der Untersuchung über die Abhängigkeit der elektrischen Erdströme von Niveau-Schwankungen des Grundwassers in Bulgarien . . . . . S. 300

G. Bohlmann, Continuierliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene . . . . . „ 44

F. Braun, 1) Versuche zum Nachweis einer orientirten elektrischen Oberflächenleitung . . . . . „ 157

2) Ueber den continuirlichen Uebergang einer elektrischen Eigenschaft in der Grenzschicht von festen und flüssigen Körpern . . . . . „ 196

3) Ueber die Leitung elektrischer Luft . . „ 172

4) Ein Versuch über magnetischen Strom . „ 177

H. Burkhardt, Zur Theorie von linearen Scharen von Punktaggregaten auf algebraischen Curven . . . „ 267

R. Fricke, Ueber die Theorie der automorphen Modulgruppen . . . . . „ 91

— — Ueber eine einfache Gruppe von 360 Operationen . . . . . „ 199

F. Heusler, Zur Theorie der Erdölbildung . . . . . „ 74

D. Hilbert, Ein neuer Beweis des Kronecker'schen Fundamentalsatzes über Abelsche Zahlkörper . . . . „ 29

— — Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen . . . . . „ 179

O. Hölder, Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis . . . . . „ 122

A. Hurwitz, Ueber die Zahlentheorie der Quaternionen „ 314

Berichtigung zweier Druckfehler in Band II von Gauss' Werken (aus einem Briefe des Viceadmirals de Jonquières in Paris) . . . . . „ 365

F. Klein, Ueber die Bewegung des Kreisels . . . . . „ 3

A. v. Koenen, Ueber Pendel-Messungen bei Freden und Alfeld . . . . . „ 1

H. Maschke, Ueber die Darstellung endlicher Gruppen durch Cayley'sche Farbendiagramme . . . . . „ 55

Charles A. Noble, Ueber die Randwertaufgabe für eine ebene Randcurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen . . . . . S. 191
J. Orth, Ueber die Fibrinbildung an serösen und Schleimhäuten . . . . . „ 214
— — Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen, dritter Bericht . . . . . „ 224
W. F. Osgood, Ueber die ungleichmässige Convergenz und die gliedweise Integration der Reihen . . . „ 288
F. Pockels, Ueber die nach der elektromagnetischen Lichttheorie durch eine Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Feldstärke bedingte optische Wirkung eines elektrischen Feldes . . . . . „ 102
A. Schoenflies, Ueber einen Satz aus der Analysis situs . . . . . „ 79
— — Ueber die Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen auf einander . . . . . „ 255
P. Stäckel, Ein Brief von Gauss an Gerling . . . . „ 40
— — Ueber Goldbachs empirisches Theorem . . . . „ 292
A. Tornquist, Ueber den Fund eines Ceratites nodosus aut. in der vicentinischen Trias und über die stratigraphische Bedeutung desselben . . . . . „ 5
W. Voigt, 1) Fluorescenz und kinetische Theorie . . . „ 184
2) Ueber die Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden oder absorbirenden Mittel . . . . . „ 186
— — Versuch zur Bestimmung des wahren specifischen elektrischen Momentes eines Turmalines . . . . „ 207
— — Eine neue Methode zur Untersuchung der Wärme leitung in Krystallen, I. Abhandlung . . . . . „ 236
— — Ueber die Lage der Absorptionsbüschel in zweiaxigen pleochroitischen Krystallen . . . . . „ 252
— — Einige kinetische Betrachtungen, die mit der Theorie der Verdampfung und verwandter Vorgänge im Zusammenhang zu stehen scheinen . . . . . „ 341
O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen (III) . . . . . „ 60
— — Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen (IV) . . . . . „ 114
— — Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen (V) . . . . . „ 304
E. v. Weber, Ueber Linienconnexe . . . . . „ 282
H. Weber, Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung . . . . . „ 275

Ueber Pendel-Messungen bei Freden und Alfeld.

Von

A. von Koenen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Januar 1896.

Im letzten Hefte dieser Nachrichten hat Herr Schur die Ergebnisse genauerer Pendelmessungen veröffentlicht, welche Herr Haasemann im vorigen Herbst im Auftrage des Direktors des Kgl. Geodätischen Instituts, Herrn Geheimrath Helmert vorgenommen hat an denselben Stationen, wie vorher Herr Schur, sowie im Römergrunde.

Die Unterschiede für diese Stationen, welche ich bis auf die letztere bereits früher besprochen habe (diese Nachrichten 1895 S. 241) beträgt hiernach gegen Göttingen:

Teichmühle,	Grünenplan,	Sack und	Römergrund
− 0,00011	+ 0,00007	− 0,00003	− 0,00003.

Während nun die von Herrn Schur gefundenen Unterschiede um vieles größer waren, als ich erwartet hatte, sind die von Herrn Haasemann festgestellten recht gering, und es ergiebt sich hieraus, daß die Compensation, über deren Ausdehnung wir ja noch so wenig wissen, wie ich ja schon damals hervorgehoben habe, sich auf größere Flächen bezieht, und daß daher für künftige Messungen größere Verhältnisse, insbesondere größere Abstände der Stationen von einander gewählt werden müssen, um größere Differenzen zu erhalten.

Herrn Haasemann hatte ich nun gebeten, Messungen auch im Römergrunde vorzunehmen, an einer Stelle, welche etwa 4500 m östlich von Freden und 3500 m östlich von der Teichmühle an der Straße von Freden nach Lamspringe liegt, auf unterer Kreide (Hilssandstein), in der Mitte derselben Synklinale, wie Sack, etwa 10 Kilom. südöstlich von diesem Orte; die Messungen haben

hier genau denselben Werth ergeben, wie bei Sack, bei der Geringfügigkeit der sonstigen Differenzen immerhin ein interessantes Resultat.

Auf der Station Teichmühle fand übrigens Herr Haasemann, wie er mir mittheilte, die Stabilität des Grundes durchaus ungenügend, so daß hier das Resultat der Messungen weniger zuverlässig war, und zudem hatte ich schon a. a. O. erwähnt, daß dort in der Tiefe ein mächtiges Salzlager oder von dessen Auflösung herrührende Hohlräume vorhanden sein dürften, so daß die Ergebnisse der Pendelmessungen hierdurch wesentlich beeinflußt werden könnten. Inzwischen ist denn auch bei Freden Salz in großer Mächtigkeit erbohrt worden.

Die Göttinger Sternwarte liegt dagegen auf Lias in der breiten Leine-Thal Versenkung, deren Ränder aus Oberem Muschelkalk bestehen, also in einem geologisch sehr gestörtem Gebiete.

Um einen zuverlässigen Vergleich mit den übrigen Werthen zu ermöglichen, hatte ich aber Herrn Haasemann ersucht, eine Messung noch an einer Stelle vorzunehmen, wo sicher ein Salzlager im Untergrunde nicht vorhanden ist, etwa zwischen Seesen und Neukrug, gegen 15 Kilom. vom Römergrunde nach Osten. Leider war dies im vergangenen Herbst nicht mehr möglich und mußte somit bis zum nächsten Sommer verschoben werden.

Ueber die Bewegung des Kreisels.

Von

F. Klein in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung am 11. Januar 1896.

Die Functionentheorie complexer Variabler hat uns für die Darstellung der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punct seit lange mit einem besonders einfachen Formelsystem versehen, welches für die Zwecke der Mechanik, so viel ich weiß, noch nicht ausgenutzt worden ist, so wahrscheinlich es von vornherein erscheinen muß, daß dies mit besonderem Vortheil geschehen kann. Man lege um den festen Punct O eine Kugel, auf der man in Riemann'scher Weise eine complexe Variable ζ interpretirt. Die Drehungen um O sind dann einfach durch diejenigen unimodularen linearen Substitutionen gegeben:

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}, \tag{1}$$

bei denen einerseits α und δ, andrerseits β und $-\gamma$ conjugirt imaginär sind (vergl. z. B. meine Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 32). Bei der Behandlung irgend welcher Rotationsaufgabe wird es also darauf ankommen, die hier auftretenden Coëfficienten α, β, γ, δ als geeignete Functionen der Zeit t darzustellen.

Ich habe dies insbesondere für den gewöhnlichen Kreisel ausgeführt, d. h. einen der Schwerkraft unterworfenen Rotationskörper, der in einem Puncte seiner Axe festgehalten ist. $\zeta = \infty$ bezeichne den obersten Punct der im festbleibenden Raume um O herumgelegten Kugel, $Z = \infty$ die Kreiselspitze (überhaupt Z die complexe Variable auf der mit dem Kreisel verbundenen congruenten Kugel). Das Resultat ist, daß α, β, γ, δ elliptische Functionen zweiter Art werden, welche im Zähler und Nenner nur eine einzelne Thetafunction enthalten. Da der Nenner bei allen vier

Ausdrücken derselbe ist, so findet die Curve, welche wir aus (1) für die Bewegung der Kreiselspitze ableiten:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\gamma} \tag{2}$$

gleichfalls eine Darstellung mit nur einem Thetafactor im Zähler und Nenner. Andererseits erhält man beispielsweise für den Polhodiekegel, außer $r = \text{Const.}$,

$$p + iq = 2i\left(\beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt}\right), \tag{3}$$

also einen Ausdruck mit zwei Thetafactoren im Zähler und Nenner, etc. etc.

Es ist interessant, zu verfolgen, wie diese einfachen Formeln in den in der Literatur vorliegenden Entwickelungen überall indirect zur Geltung kommen, ohne daß man sie klar als solche erkannt und an die Spitze der Betrachtung gestellt hätte. Beispielsweise hat man statt der auf der Kugel gelegenen Curve (2) durchweg deren Horizontalprojection betrachtet; für diese aber finden wir:

$$x + iy = 2\alpha\beta, \tag{4}$$

wo nun Zähler und Nenner je zwei Thetafactoren aufweisen, was nach (2) eine unnöthige Complication ist.

Ueber den Fund eines Ceratites nodosus aut. in der vicentinischen Trias und über die stratigraphische Bedeutung desselben.

Von

Dr. **Alexander Tornquist,**

Privatdocent an der Universität Straßburg i. E.

Mit 2 Textfiguren.

Vorgelegt in der Sitzung am 25. Januar 1896 von A. v. Koenen.

Es war ursprünglich nicht meine Absicht, mit diesen aus einer vierwöchentlichen Begehung des bekannten vicentinischen Trias-Gebietes von Recoaro und Schio (des Tretto) gewonnenen Resultaten schon jetzt an eine Veröffentlichung heranzutreten. Ich bin mir wohl bewußt, daß es eines erheblich längeren Zeitaufwandes, eines mehrfachen Sommeraufenthaltes, bedarf, um über dieses Gebiet, über welches eine so große Anzahl von Arbeiten der namhaftesten Forscher vorliegt, eingehendere Beiträge liefern zu können. Die Veranlassung zu der folgenden Mittheilung gab nur ein besonders glücklicher palaeontologischer Fund, dessen Bedeutung über den Rahmen der vicentinischen Trias hinausreicht und welcher gerade jetzt, wo zahlreiche Untersuchungen über alpine Trias im Gange sind, für die immer wiederholten Versuche, die Gliederung der alpinen und außeralpinen Trias in Parallele zu bringen, vor allem die obere Muschelkalkgrenze in den Alpen in außeralpinem Sinne festzulegen, von ausschlaggebender Bedeutung sein dürfte.

Es ist dies der Fund eines mit bestimmten deutschen Formen übereinstimmenden Ceratites nodosus im Tretto und zwar in einem stratigraphisch genau präcisierbaren Niveau. Mit der Mittheilung dieses Fundes wollte ich nicht bis zu dem voraussichtlich noch um mehrere Jahre hinauszuschiebenden Abschluß meiner Untersuchungen der vicentinischen Trias warten.

Schon in dieser kurzen Notiz möchte ich es aber nicht unterlassen, denjenigen Herren, welche mich bei der Ausführung meiner Arbeiten in dem Gebiete von Recoaro und Schio zu unterstützen die Güte besaßen, meinen herzlichsten Dank zu bezeugen, sowohl Herrn Professor Benecke, welchem ich im Laufe der letzten Jahre die Einführung in die alpine Trias überhaupt und den Hinweis auf eine Untersuchung der vicentinischen Trias im speciellen verdanke, als auch Herrn Geheimen Bergrath Professor Beyrich, welcher mir die Untersuchungen durch die Uebersendung eines von ihm begonnenen Manuscriptes und einer begonnenen geologischen Karte von Recoaro in besonders freundlicher Weise erleichterte.

Diese Mittheilung soll zunächst die Erläuterung des Trias-Profils von Recoaro behandeln, so wie ich es meiner späteren Kartierung zu Grunde zu legen gedenke. Zur Stütze des stratigraphischen Vergleichs mit südtiroler und außeralpinen Horizonten werden eine Reihe neuer Funde erwähnt werden. Nachdem so zugleich das Lager des Ceratites nodosus präcisiert ist, wird ferner die stratigraphische Bedeutung dieses Ammonitenfundes kritisch behandelt werden.

I. Stratigraphische Erläuterung des Trias-Profils von Recoaro und Schio.

Mit der Deutung der Triasschichten von Recoaro und Schio haben sich vornehmlich Maraschini, von Schauroth, Pirona, Benecke, Beyrich, von Mojsisovics, Gümbel und Bittner[1]) beschäftigt.

Grödener Sandstein.

Mojsisovics war der erste, welcher die über dem Glimmerschiefer befindliche Parthie rother, oben heller, im Liegenden oft conglomeratisch ausgebildeter Sandsteine bei Recoaro als Aequivalente des südtiroler Grödener Sandsteins ansprach.

Die Mächtigkeit dieses Complexes oberhalb der Fonte di Staro mag ca. 20 m sein.

---

1) Die benutzte Litteratur, welche nicht besonders angeführt wird, ist in dem von Bittner im IV. Heft des Jahrbuches der K. K. geol. Reichsanstalt 1883 pag. 564 zusammengestellten Litteraturverzeichniß aufgeführt.

Bellerophon-Kalk.

Ebenfalls Mojsisovics parallelisierte zuerst die auf den Sandstein folgende Parthie grauer Kalk- und Mergelschiefer mit dem Horizont des Bellerophonkalkes von Südtirol. Die Mächtigkeit beträgt nur wenige Meter.

Spuren von Fossilien sind in diesem Horizont vielfach beobachtet worden; von Bedeutung ist aber allein der Fund Bittner's, welcher aus dem Val Creme einen fragmentären Bellerophon (Stachella) beschreibt.

Werfener Schichten.

Bereits Maraschini vergleicht diese im Hangenden grellrothen, im Liegenden grauen, glimmerreichen Sandsteine mit dem grès bigarré, dem Buntsandstein. Mojsisovics nahm die engere Parallelisierung mit den Südtiroler Werfener Schichten vor.

Die Mächtigkeit kann für das Gehänge südlich Recoaro auf ca. 50 m angegeben werden.

Fossilien bestimmten von Schauroth, Pirona, Benecke, Bittner und Lepsius.

Muschelkalk.

1. Unterer Muschelkalk.

Die Parallelisierung dieser Schichten mit dem deutschen Muschelkalk ist bereits im Jahre 1824 von Maraschini[1]) vorgenommen worden, wenn auch dieser Forscher und mit ihm alle späteren Autoren bis auf Beyrich und Mojsisovics in diesem Horizont einen Vertreter des gesammten außeralpinen Muschelkalkes vermutheten, und erst Benecke die Frage der näheren Parallelisierung mit dem unteren Muschelkalk oder dem ganzen Muschelkalk offen ließ. Beyrich und Mojsisovics haben dann zuerst die Bezeichnung Muschelkalk auf eine ganze Reihe höherer Schichten des Profils von Recoaro ausgedehnt und durch Fossilfunde begründet, ein Resultat, welches durch Bittner's Aufsammlungen bestätigt wurde. Die Ausdehnung der Benennung Muschelkalk auf die höheren Horizonte wurde aber nur im Sinne des alpinen Trias-Profils vorgenommen. Der neue Fund von Ceratites nodosus zeigt uns aber, daß wir auch durch den Vergleich mit der außeralpinen Trias zu einer Erweiterung der Anwendung dieser Benennung auf die höheren

---

1) Diese Anschauungen Maraschini's sind aber nach der Ansicht Herrn Beyrich's nur weitere Ausführungen der Auffassungen, zu denen der Graf Marzari-Pencati bereits im ersten Jahrzehnt unseres Jahrhunderts gelangt war.

Schichten geführt werden, ja daß wir den Muschelkalk-Begriff in diesem Sinne sogar noch auf das Eruptivniveau über dem Spizzekalk, die Buchensteiner Schichten, anzuwenden haben.

Die zunächst als unterer Muschelkalk zu behandelnden Ablagerungen der vicentinischen Trias entsprechen aus weiterhin zu erörternden Gründen dem unteren alpinen Muschelkalk, vermuthlich auch dem außeralpinen Wellenkalk mit seinen festen Bänken.

Die Gliederung des unteren Muschelkalkes von Recoaro hat Benecke bereits klar erkannt, und alle späteren Autoren haben seine Beobachtungen bestätigen können.

a. Schichten mit Dadocrinus gracilis v. Buch. sp.

Das tiefste Niveau dieses unteren Muschelkalkes nehmen einige klotzige Rauchwackenbänke ein; dann folgt ein Complex grauer Mergelschichten, welche mit plattigen Kalksteinbänkchen und auch vielfach mit Dolomitbänkchen wechsellagern. Die Mächtigkeit dieses Horizontes ist bei Recoaro und im Tretto erheblichem Wechsel unterworfen. Am Monte Rove, westlich Recoaro, wächst die Mächtigkeit bis zu 40 m an, während sie bei Rovegliano im Osten Recoaro's und im Tretto viel geringer ist. Nach dem verbreitetsten und bezeichnendsten Fossil wurde dieser Horizont von Benecke als Schichten mit Dadocrinus gracilis benannt. Die reiche Fossilführung dieses Horizontes ist von v. Schauroth und von Benecke behandelt worden.

b. Schichten bunter Mergel und Tuffe.

Diese Schichten sind von Benecke zuerst am Passo della Commenda oberhalb Rovegliano erkannt worden und mit dem Horizont des Dadocrinus gracilis vereinigt worden. Daß ein derartiger Tuff-Horizont die kalkig-mergeligen Bänke des unteren Muschelkalkes überlagert, ist später geleugnet, und das Vorkommen am Passo della Commenda als verrutschte höhere Schichten gedeutet worden, aber sowohl Gümbel als auch Bittner haben das Vorhandensein dieses Horizontes oberhalb Rovegliano bestätigt. In der That ist dieser Horizont auch anderwärts deutlich entwickelt. Als einen besonders günstigen Aufschluß für denselben möchte ich die steile Schlucht am Westende des Monte Rove oberhalb der Case Scarte nennen, wo diesem Niveau eine Mächtigkeit von 25 m zukommt. An diesem Aufschluß steigen die Schichten mit südlichem Fallen hoch an den Wänden der Schlucht hinan, und man bemerkt, daß zwischen denselben keine vollkommene Concordanz besteht; es scheint aber noch nicht ausgemacht, ob über den im folgenden Profil an

zweiter Stelle genannten Kalkbänken eine kleine Verschiebung vorliegt, oder ob wir es nicht mit einer bei Tuffablagerungen wohl lokal vorkommenden, geringen Discordanz zu thun haben. Im ersteren Falle dürfte das Profil dieser Schichten nur um wenige Meter zu gering gemessen sein.

Der Dadocrinus-Horizont endet unmittelbar unter den roth gefärbten Schichten mit einem etwa 4 m mächtigen Complex fester, ebenflächiger, dünn- und grobbankiger, reiner, blauer Kalke, welche im Liegenden dolomitisch sind, sich in ihrer ganzen Mächtigkeit aber als fossilleer erwiesen. Es folgen:

3 m mergelige, tuffige, grüngrau und auch roth gefärbte Kalk- und Dolomitbänke.

$^3/_4$ m gelb verwitternde, feste, klotzige Kalkbänke.

3 m lebhaft rothe und grüngelbe Tuffe.

0,3 m Kalksteinbänkchen.

5 m bunte, kalkige Tuffe.

3 m gelbe Kalkmergel.

2 m feste, schmutzigrothe und graubraune Kalkbänke vom Habitus des hangenden Brachiopodenkalkes.

7 m Mergel- und Tuffschichten von gelber, grüner und schmutzigrother Färbung mit vielen Pflanzenresten.

Im Hangenden setzen dann die klotzigen Bänke des Brachiopodenhorizontes ein. Am Campitello della Commenda ist die Mächtigkeit dieser Schichten, wie schon aus dem von Gümbel mitgetheilten Profil ersichtlich ist, bedeutend geringer, auch weicht die Schichtenfolge so erheblich von derjenigen am Monte Rove ab, daß man dort keinen einzigen Horizont wiedererkennen kann. Es folgen dort auf dünnplattige Kalke mit Mergellagen, in welchen Myophoria vulgaris häufig ist, graugrünliche, unten röthlich gefärbte Steinmergel (1,2 m), dann grünliche und violette, schließlich lebhaft rothe Mergeltuffe (ca. 6 m), dann folgen bereits feste, knollige Kalke der folgenden Stufe.

An Fossilien hat diese Stufe Taxodites saxolympiae Zigno und Voltzia recubariensis Mass. geliefert.

c. *Brachiopodenkalke nebst den gelben Dolomitbänken.*

Während Benecke den Horizont der bunten Tuffe und Mergel noch zu seinen Schichten mit Dadocrinus gracilis zieht, trennt er andererseits die Brachiopoden-Kalke von dem obersten Gliede des Muschelkalks in älterem Sinne, von den Dolomiten mit rothbrauner Verwitterungskruste. Diese Trennung ist auch in den späteren

Arbeiten von v. Schauroth und von Pirona durchgeführt. Ich habe an den Gehängen südlich und westlich von Recoaro, vom Mte Spizze an bis zum Monte Rove, eine deutliche Trennung dieser beiden Horizonte nirgends beobachten können, und tritt dieselbe auch im Terrain nirgends hervor. Dagegen beobachtete ich im Val Creme, oberhalb der Häusergruppe Scolpese, etwa in der Höhe von 900 m, Brachiopoden-führende Bänke, welche von rein dolomitischem Habitus sind und weder in der Färbung noch im Gefüge von den höheren Dolomiten abweichen, so daß mir damit entweder das Hinaufreichen der Brachiopoden in die Dolomitfacies, oder das Hinabreichen der Dolomitfacies in die Brachiopoden-Schichten erwiesen scheint. Auch Bittner betont die Uebergänge dieser beiden Ablagerungen im Val Asnicar und unter dem Monte Spizze. Ja im Val Asnicar kommen sogar Brachiopoden-führende Knollenkalke über den im allgemeinen petrefaktenarmen Dolomitbänken vor. Ich stehe deßhalb nicht an, diese Gesteine in eine Stufe zu verweisen und dem Tuffniveau im Liegenden eine größere Selbstständigkeit zuzuschreiben.

Als besondere Eigenthümlichkeit der untersten Kalkbank dieser Stufe möchte ich noch eine Erscheinung erwähnen, welche ich an verschiedenen Orten fand und für das ganze Triasgebiet als durchgehend ansehe. Es ist das eine in sechseckige Felder zertheilte, mit vorstehenden Kanten versehene Unterfläche dieser Schicht, welche ihre Entstehung zweifellos einer Ausfüllung von Trockenrissen in der nächsttieferen Schicht verdankt und vielleicht auf eine Trockenlegung des Gebietes vor Ablagerung der Schicht hindeuten dürfte, womit nebenbei bemerkt der Pflanzenreichthum der unmittelbar tieferen Schichten in Uebereinstimmung stände.

Die Gesammtmächtigkeit dieser Stufe mag durchschnittlich 30 m betragen. Zahlreiche Fossilien dieses Horizontes sind von v. Schauroth, Benecke und Bittner[1]) beschrieben worden.

2. Oberer Muschelkalk.

Die soeben unter der Bezeichnung des unteren Muschelkalkes vereinigten Schichten entsprechen dem Muschelkalk im älteren Sinne. Die nun zu besprechenden Ablagerungen waren früher als Keuper- und Lias-Schichten angesprochen worden, und erst Pirona wird, soweit es wenigstens die hellen Kalke des Monte Spizze, Monte Richelere, Monte Rove einerseits und des Monte Civellina

1) Brachiopoden der alpinen Trias. Abhandlungen der K. K. geol. Reichsanstalt. 1890. Band XIV.

und Monte Enna andererseits angeht, in dieser Deutung unsicher. Beyrich und mit ihm Mojsisovics gliederten zuerst die höheren Schichten der vicentinischen Trias näher stratigraphisch. Es wurde naturgemäß ein Vergleich mit der alpinen, speciell der südtiroler, Trias vorgenommen, welche dazu führte, einen Mendola-Dolomit in Richthofen's Sinne und Buchensteiner Schichten bei Recoaro festzustellen. Die beiden Horizonte konnten durch den Fund von Fossilien, einerseits der Diplopora triadica, welche allerdings von v. Schauroth beschrieben ist, deren Lage aber Beyrich nachträglich feststellte, andererseits eines mit Trachyceras Reitzi naheverwandten Ammoniten aus Schichten über dem Kalke des Monte Spizze bestimmt werden. Mojsisovics hat in bezug auf die Deutung dieser Schichten auf Grund seiner spärlichen palaeontologischen Belegstücke unzweifelhaft das Richtige getroffen, wie aus den zahlreicheren von Bittner nachträglich gemachten Funden und aus den von mir gemachten Aufsammlungen immer bestimmter hervorgegangen ist. Gümbel's Versuch den Kalk und Dolomit des Monte Spizze mit dem Schlerndolomit und dem Wettersteinkalk zu parallelisieren, ist lediglich auf petrographische Merkmale gestützt, wie auf Erzführung, ferner auf das Vorkommen einer Evinospongienstruktur, und dürfte nach dem oben Angeführten nicht stichhaltig sein.

Nachdem Mojsisovics die Benennung Muschelkalk auf den Spizzekalk ausgedehnt hatte, entstand die Frage, wie man nun die im Liegenden desselben befindlichen, rothen, tuffigen, sandigen Mergel und die groben Conglomerate (im Tretto), welche über den dolomitischen Brachiopodenkalken einsetzen, benennen sollte. Bittner bezeichnet dieselben als „mittleres Niveau des Muschelkalkes von Recoaro", indem er gleichzeitig darauf hinweist, daß diese Benennung nur ein Nothbehelf sein soll. Aus dem Folgenden wird zu ersehen sein, wie eng diese Tuff- und Conglomeratablagerungen mit den schwarzen Kalken des Spizzekalkhorizontes zusammenhängen, so daß ich beide in dieselbe Stufe stelle. Der Fund einer Sturia Sansovinii in den schwarzen Kalken des Spizzekalkhorizontes rechtfertigt für beide die Bezeichnung *oberer* Muschelkalk. Durch diesen Fund erfährt auch die Anwendung der Benennung *unterer* Muschelkalk auf die Schichten mit Dadocrinus gracilis und auf die Brachiopodendolomite eine Berechtigung, zunächst allerdings nur im Sinne der alpinen Trias-Stratigraphie.

Außer diesen beiden Horizonten, nämlich erstens den rothen,

tuffigen und sandigen Mergeln und den Conglomeraten im Hangenden der dolomitischen Brachiopodenkalke, zweitens dem Spizzekalk und dessen Vertretern, den schwarzen Kalken mit Diplopora triadica und Sturia Sansovinii, möchte ich aber noch auf Grund des Vorkommens des Ceratites nodosus in dem hangenden Horizont, nämlich den knolligen, kieselreichen Kalken, die in Tuffe eingelagert sind, ebenfalls noch diesen Horizont, welcher von Mojsisovics als Buchensteiner Schichten erkannt worden ist, zum oberen Muschelkalk rechnen, indem ich hierdurch zugleich die obere Muschelkalkgrenze der außeralpinen Trias in den alpinen Trias-Sedimenten feststellen zu können glaube, so daß dieser gleichlautende Begriff des Muschelkalkes in den beiden Triasablagerungen nunmehr auch für beide auf gleichzeitige Bildungen angewandt werden kann.

Die drei Stufen des oberen Muschelkalkes bei Recoaro und im Tretto sind demnach: zu unterst rothes, sandiges Tuffniveau mit lokalen Conglomeratlagern, dann Spizzekalk und als Facies desselben die schwarzen Kalke mit Diplopora triadica (= Trinodosuskalk), schließlich bunte, kieselreiche Kalke in Eruptivtuffe eingelagert (= Buchensteiner Schichten).

a. Rothe, sandige Tuffe und Conglomerate.

Dieses Niveau zieht sich als gleichmäßiges Band unter dem felsigen Spizzekalk vom Monte Spizze bis zum Monte Rove im Süden und Westen von Recoaro hin und fällt von weitem durch seine grelle Färbung leicht in die Augen. Am Monte Spizze sind die Schichten schwierig zu erreichen; leichter kann man aber im oberen Val Creme an der Malga Rotocobe an sie herankommen Man findet dort über den braunen Dolomiten des unteren Muschelkalkes, welche an jenem Aufschluß reichlich von weißen Dolomitadern durchzogen sind, zunächst eine kleine Parthie schwarzer Kalke; über diesen folgen noch einmal gelbverwitterte Dolomite, dann rothe Steinmergel, festere, lebhaft rothe Dolomitlagen, rothe, sandige Mergel, dann eine graue Dolomitbank und eine mächtige Parthie rother Mergel, in welchen feste, rothe Quarzitbänke auftreten. Im Hangenden lagert schwarzer, theils knolliger, theils mergeliger, meist fester Kalk, welcher bereits dem Niveau der Diplopora triadica angehört.

Ein ähnliches Profil beobachtete ich in dem Einriß westlich des Monte Rove oberhalb der Case Scorte. Hier wird nur die oberste Bank des unteren Muschelkalkes durch schwarze, knollige Kalke gebildet, welche den Kalken der Diplopora triadica gleichen,

aber fossilleer erscheinen. An dieser Lokalität schließen sie nur große und kleine Knollen von Markasit ein, welcher theils verwittert, theils aber noch mit Metallglanz unter dem Wässerchen der Schlucht hervorsticht.

Im Tretto ist das Profil dieser Schichten um vieles mannigfaltiger. Vor allem nimmt die Mächtigkeit derselben aus dem Gebiet von Recoaro nach Nordosten zu ständig zu, wie bereits Bittner erkannte. An den Profilen des Val d'Orco, welche ich mehrfach besucht habe, fällt vor allem das Vorhandensein von groben Conglomeratlagen auf, welche nach Bittner „Blöcke eines hellen Kalkes enthalten, in welchem hie und da Petrefaktendurchschnitte sich zeigen". Das Streichen der Schichten im unteren Orco-Thal bis zur Mühle Mazzega ist NNW, dann im oberen Orco-Thal ONO, das Einfallen im unteren Theil ONO, im oberen NNW. Im unteren Val d'Orco befindet man sich anfangs über dem Spizzekalk und erst oberhalb der beiden unpassierbaren Schluchten, welche auf steilem Pfade umgangen werden, kommt man in die tieferen Schichten des oberen Muschelkalkes. Gute Profile dieses Horizontes finden sich dann besonders auf der rechten Seite des Thales, so oberhalb der einsamen Mühle Mazzega an dem Saumwege, welcher nach der Häusergruppe La Costa hinan führt. Hier beobachtet man unter typischem Spizzekalk:

1) einige Bänke schwarzer Kalke mit Diplopora triadica.
2) grobe Conglomeratschichten.
3) rothe Tuffe, ziemlich mächtig.
4) kieseliges Thonerde-Gestein[1]) und Pietre verde.
5) wiederum einige Bänke schwarzer Kalke, etwa 1,2 m mächtig; mit Diplopora triadica, Gastropoden und Korallenrasen.
6) Conglomeratbänke.
7) gelbe und rothe Dolomitplatten und Mergel.

Dann folgt ein von Spizzekalken überschütteter Abhang, und unterhalb desselben, bei der Mühle Mazzega, steht dann ein Eruptivgestein an, dessen Charakter ich noch nicht feststellen konnte, wenn mir auch sein deckenförmiges Auftreten wahrscheinlich erscheint.

---

1) Ein Gestein, welches als Begleiterscheinung der Eruptivdecken im Tretto vielfach auftritt und zur Porcellanbereitung größtentheils nach Oesterreich und Deutschland exportiert wird; es wird namentlich in dem Niveau der Buchensteiner Kalke, also über dem Spizzekalk gewonnen, kommt aber auch, wie das Profil zeigt, in dem tieferen Tuffniveau vor.

Aus diesem Profil geht die Zusammengehörigkeit des Tuffniveaus mit den schwarzen Kalken im Hangenden sehr klar hervor; wir finden die schwarzen Kalke des oberen Muschelkalkes nicht nur in Zusammenhang mit dem Spizzekalk, sondern auch mitten im Niveau der rothen Tuffe.

Ein anderes Profil ist unterhalb der Mühle Mazzega bei einer zu der Gemeinde San Rocco gehörenden Schmiede zu beobachten, hier stehen unmittelbar unter Spizzekalken an:

1) schwarze Kalke mit Versteinerungen, unter anderem einem großen Nautilus und mit Pflanzenresten, einem großen Equiseten und Voltzia.
2) rothe, sandige Mergel.
3) gelbe, verwitterte Dolomitbänkchen.
4) feste Conglomeratbänke mit großen Blöcken.
5) rothe Mergel.
6) feste, bunte und gelbe Dolomit- und Kalkbänkchen.
7) Pietre verde mit Steinmergelbänken.

Trotz der geringen horizontalen Entfernung ist das Profil unter dem Spizzekalk also schon recht verändert, möglicherweise vertritt das zuletzt mitgetheilte Profil nur den obersten Theil des ersteren, oberhalb Mazzega aufgenommenen Profils.

Diesem Horizont eigenthümlich sind die gelb verwitterten Kalk- und Dolomitbänkchen, welche auch bei Recoaro nicht fehlen und wohl als die Vorläufer des schwarzen Diploporen-Kalkes anzusehen sind, dessen enge Beziehung mit diesem Tuffniveau bereits erkannt wurde.

Fossilien fehlen in den Tuff- und Mergelschichten. Nur Benecke fand unter dem Monte Spizze in den rothen Sandsteinen eine Gervillia-ähnliche Muschel.

b. Helle Kalke des Monte Spizze und schwarze Diploporen-Kalke.

Die Beziehung des Spizzekalkes zu den schwarzen Kalken sind zweifelsohne sehr enge. Am regelmäßigsten finden sich unmittelbar im Liegenden des hellen Kalkes einige Bänke schwarzen Kalkes. Das ist, wie Gümbel zuerst am Monte Spizze, und Bittner an anderen Stellen nachwies, am ganzen südlichen und westlichen Triasabsturze von Recoaro ziemlich regelmäßig der Fall. Eine Stelle, wo dieselben aber zu fehlen scheinen, liegt oben im Val Creme, an dem weißen Kalk-Klotz, welcher den östlichen Quellarm des Creme in zwei Bächlein trennt; aber bereits auf der westlichen Thalseite unterhalb des Monte Anghebe sind einige Bänke des schwarzen Kalkes wieder entwickelt.

Dieser Horizont ist ebenfalls deutlich unter dem Spizzekalk des Monte Enna im Val dei Signori, und zwar oberhalb Casa Crove entwickelt; hier ist ein allmähliger Uebergang in Spizzekalk besonders bequem erkennbar. Im Gebiet von Recoaro und des Val dei Signori habe ich vergeblich nach Fossilien in diesem Horizonte gesucht; diese stellen sich erst im Tretto ein und sind zuerst von v. Schauroth dort nachgewiesen worden. Von dem Vorkommen der schwarzen Diploporen-Kalke im Val d'Orco und von den Beziehungen zu dem Tuffniveau im Liegenden ist bereits im vorigen Absatz die Rede gewesen. Das Verhältniß zu den weißen Spizzekalken ist aber nicht minder enge. Wie sich die schwarzen Kalke einerseits in dem tieferen Tuffniveau getrennt vorfinden, so können sie auch über die untere Grenze des Spizzekalkes hinaufrücken und mit dem Spizzekalk wechsellagern. Diese Erscheinung konnte ich zuerst beim Aufstieg aus dem Orcothal von der Mühle Il Buse nach der Häusergruppe La Costa bei San Ulderico feststellen. Dort kommt man, nachdem man die untere Grenze des Spizzekalkes etwa 25 m unter sich hat, plötzlich wiederum in schwarze Kalke, welche allerdings Fossilien nicht zeigen, aber den Diploporen-Kalken petrographisch aufs Haar gleichen. Bei dem einmaligen Besuch dieser Lokalität würde ich aber auf diesen Befund weniger Gewicht legen, wenn sich nicht unterhalb San Ulderico, wo die schwarzen Kalke als Kante der Terasse, auf welcher diese Gemeinde gebaut ist, hervortreten, auch unterhalb dieser Kalke bei der Casa Cerbaro ebenfalls wieder helle Kalkschichten vorfänden.

Demnach kann man den Spizzekalk und die schwarzen Diploporenkalke nur als verschiedene Faciesgebilde ansehen, welche sich gegenseitig vertreten können.

Mojsisovics hat den schwarzen Kalk am Monte Spizze als Virgloriakalk angesprochen; er muß als normales Sediment betrachtet werden; das Eruptiv-Tuffniveau ist dann als ein nur dem vicentinischen Trias-Gebiet eigenthümliches Gebilde zur Zeit der Bildung des Virgloriakalkes, der Spizzekalk als ein für die jüngere Zeit der Bildung des Virgloriakalkes ebenfalls diesem Gebiete eigenthümliches Gebilde anzusehen.

Was schließlich die petrographische Beschaffenheit des Spizzekalkes anbetrifft, so halte ich die ältere Bezeichnung dieses Schichtengliedes als Dolomit nicht für zutreffend. Ueberall braust das Gestein deutlich, meist lebhaft, mit verdünnter Salzsäure und besteht daher sicher größtentheils aus einem dem reinen Kalk näher als dem Dolomit stehenden Material, wenn ihm auch hier und

da ein nicht unerheblicher Gehalt an Magnesiumcarbonat eigen sein mag.

Die aus dem Spizzekalk bisher gewonnenen Fossilien sind sehr spärlich. Bittner erwähnt nur Chemnitzien und Naticen von Esino-Habitus, welche er oberhalb Fongara am Monte Spizze fand. Hier wie auch anderwärts beobachtete er sonst nur noch ein Zerreibsel von Crinoiden und Dactyloporen. Die letzteren Versteinerungen, von Gümbel zu der D. multiseralis gerechnet, sind ohne Zweifel noch die häufigsten. Gümbel giebt außerdem noch kleine Gastropoden und Crinoiden an. Die von Bittner ebenfalls in diese Stufe gestellten Vorkommen von Arpadites ex aff. A. Arpadis Mojs. und einer Anzahl von Zweischalern und Brachiopoden gehören, wie alsbald zu erörtern sein wird, in die folgende Stufe.

Auch ich bin in bezug auf Funde im Spizzekalk wenig glücklich gewesen. Außer dem Nachweis eines großen Encrinus-Stielgliedes vom Charakter des Encrinus liliiformis und der verbreiteten Diplopora, konnte ich nur im Val d'Orco einen Block Spizzekalkes auffinden, welcher gut erhaltene, große Fossilien einschloß; ich bestimmte nur:

Pecten nov. sp. aff. cislonensis Polifk.,

aus der Verwandtschaft des Pecten Albertii, mit weniger Rippen, welche alle fast bis zum Wirbel zu verfolgen sind. Die Ohren sind deutlich abgesetzt.

Naticopsis (Marmolatella) complanata Stopp. (? = N. planoconvexa Kittl),

eine relativ langsam anwachsende Marmolatella, was nach Kittl auf ein tiefes Niveau der Kalke hinweist.

Auf den Charakter dieser Fauna gedenke ich erst nach weiteren Aufsammlungen einzugehen.

Viel reicher fiel die Ausbeute aus, welche ich in den schwarzen Diploporenkalken im Tretto machte. Es gelang mir, dort folgende Formen zu sammeln:

1. Sturia Sansovinii Mojs. typ.

in einem Exemplar, welches diejenigen der Schreyer Alm an Größe fast noch übertrifft.

2. Myophoria elegans. Dunk.

in mehreren Exemplaren. Diese Myophoria wurde in den Alpen noch nicht gefunden, in der außeralpinen Trias geht sie aus dem unteren Muschelkalk in den oberen Muschelkalk und bis in den unteren Dolomit des Lettenkohlenkeupers hinüber.

3. Pecten Albertii Gldf.
von v. Schauroth auch aus dem unteren Muschelkalk von Recoaro angeführt.

4. Pecten discites Schl.
von v. Schauroth und Benecke auch aus dem unteren Muschelkalk von Recoaro erwähnt.

Pecten discites Schl. nov. var., häufig. Es ist dies eine Uebergangsform zwischen dem typischen Pecten discites und Pecten Morrisi Gieb., welche aber von den meisten Autoren als zusammengehörig betrachtet werden. Bereits aus dem unteren Muschelkalk von Recoaro bekannt.

5. Gervillia costata v. Schl. häufig.
von v. Schauroth und Benecke auch aus dem unteren Muschelkalk von Recoaro angeführt.

6. Modiola sp.

7. Panopea sp.

8. Myoconcha nov. sp. = M. gastrochaena Gieb. non aut.
entspricht in allem der Myoconcha Goldfussi, welche v. Schauroth von Rovegliano kennt.

9. Myoconcha angulosa Salomon. häufig,
von Salomon aus dem Marmolata-Kalk und aus dem Esino-Kalk vom Pizzo di Cainallo beschrieben.

10. Macrodon cf. Romani Alb. sp. = M. brevis v. Schau. pars. findet sich wahrscheinlich nur im Lettenkohlenkeuper.

11. Fragment eines großen Ctenostreon.

12. Spiriferina fragilis Schl. sp. nicht selten,
von v. Schauroth auch aus dem unteren Muschelkalk von Recoaro beschrieben, sowohl im unteren als auch im oberen außeralpinen und alpinen Muschelkalk bekannt.

Die Bestimmung der Gastropoden ist bei der geringen Kenntniß von dem Zusammenhange der außeralpinen und alpinen triadischen Gastropoden-Fauna nicht zweifellos durchzuführen. Der Charakter derselben im Tretto ist ein außeralpiner, es wurden demgemäß auch die in diesen Ablagerungen gebräuchlichen Gattungsnamen angenommen.

13. Natica gregaria Schl. var. hohe Form.
— — — — niedrige Form.
von v. Schauroth und Benecke auch aus dem unteren Muschelkalk von Recoaro angeführt.

14. Chemnitzia obsoleta Schl. sp.

außeralpin im ganzen Muschelkalk vorhanden.

15. Turbonilla gracilior Schaur.

von v. Schauroth und Benecke auch aus dem unteren Muschelkalk von Recoaro beschrieben.

16. ? Natica tenuis v. Gieb.

17. Isastrea nov. sp. aff. Vogelsangi Eck. sp. und norica Frech.

Der Charakter dieser Fauna paßt aufs beste in das Trias-Profil von Recoaro. Vor allem weist das Vorkommen der Sturia Sansovinii, einer in der Thetys besonders verbreiteten Form, welche neuerdings auch im Himalaya nachgewiesen wurde, auf das Alter der Schichten der Schreyer-Alm, nämlich der sog. Bosnischen Stufe, welche der Trinodosus-Zone aequivalent ist, hin. Hiermit steht die Ueberlagerung durch die Fossil-führenden Buchensteiner Schichten in bestem Einklang. Für die Parallelisierung des Horizontes der schwarzen Kalke mit einem außeralpinen Horizont fehlt aber vorläufig, trotz des außeralpinen Habitus der Zweischaler- und Gastropoden-Fauna, ein sicherer Anhalt. In Rücksicht auf die festere Basis, auf welcher nunmehr Buchensteiner Schichten mit dem Nodosuskalk in Beziehung gebracht werden können, dürfte aber eine Parallelisierung der schwarzen Kalke unter dem Spizzekalk oder dieses letzteren selbst mit dem Trochitenkalk wahrscheinlich sein.

c. Buchensteiner Kalke und Eruptivniveau.

So scharf auch die Fauna dieses Niveau's von derjenigen des Spizzekalkes und seines Vertreters, des Diploporenkalkes, abweicht, so wenig bestimmt ist doch die petrographische Grenze derselben ausgebildet. Die Buchensteiner Kalke sind allerdings stets bunt, meist schmutzigroth gefärbt und zeigen dadurch, daß sie mit dem Auftreten der Eruptivgesteine und der dazu gehörigen Tuffe in inniger Beziehung stehen; ein derartiges Verhältniß ist aber an verschiedenen Orten auch bei den Spizzekalken zu erkennen. Ja, fast überall sehen wir den Spizzekalk nicht als einheitliche Masse entwickelt, sondern von rothen Tuffeinlagerungen in mehrere Bänke zertheilt. Besonders deutlich ist dies an den Abstürzen des Monte Spizze bis zum Monte Rove hin sichtbar. Diese Thatsache ist bisher wenig beachtet worden, doch soll in dieser Mittheilung nicht näher auf sie eingegangen werden.

Uebrigens ergaben sich ganz die gleichen Verhältnisse am

Monte Enna im Val dei Signori, wo ein Tuffniveau oberhalb der öden Punta Roveledo einsetzt. Auch im Val d'Orco konnte an verschiedenen Stellen, besonders zwischen Pornaro, Pozzani und San Ulderico, wo allerdings die Tektonik keineswegs so einfach wie bei Recoaro ist, das Nämliche erkannt werden. Demnach könnten diese Schichten eruptiver Entstehung, welche ich dem Buchensteiner Niveau zurechnen möchte, sogar noch mit den schwarzen Diploporenkalken in Berührung treten, ein Verhältniß, welches bei späteren Untersuchungen in erster Linie klar gelegt werden muß.

Die rothen und violetten Kalke mit Buchensteiner Habitus und Fauna sind meist von den weißen Spizzekalken durch einige Tufflagen und typische Pietre verde getrennt, so zum Beispiel im Val d'Orco, oberhalb und unterhalb San Ulderico; auch unweit Fontani bei Fongara am Monte Spizze ist eine direkte Auflagerung nicht nachgewiesen. Beyrich war der erste, welcher auf die bunten Kalke hinwies, welche Pirona bereits aufgefallen waren, da er in ihnen die ersten Fossilien fand. Es war dies ein Ammonit, welchen Mojsisovics als Trachyceras recubariense bestimmte. Bittner wollte die bunten, in Tuffe eingelagerten Kalke von bunten, dem Spizzekalk unmittelbar aufgelagerten Kalken getrennt sehen. Wie unten gezeigt werden wird, ist dies auf Grund der Fauna beider Ablagerungen aber nicht möglich, auch sind die Lagerungs-Unterschiede, welche Bittner anführte, für die Frage nicht entscheidend. Dort, wo die Kalke bunt, knollig, kieselreich auftreten, gleichviel, ob sie dem Spizzekalk direkt auflagern, oder durch einige Bänke Tuffe von ihm getrennt sind, zeigen sie schon, daß sie zu den Eruptivgesteinen und den Tuffen, oder besser zu der Periode der Eruptivgesteine in innigster Beziehung stehen, und ich glaube, daß der gemeinsame faunistische Charakter deutlich für die Zusammengehörigkeit dieser bunten, knolligen, theils kieselfreien, theils kieselreichen Kalke, sowohl derjenigen, welche von Bittner noch zum Spizzekalk, als auch derjenigen, welche zu den Buchensteiner Schichten gerechnet sind, spricht.

Bittner führt aus seinen oberen, bunten Lagen des Spizzekalkes folgende Fauna an:

Arpadites ex aff. A. Apardis Mojs., Rhynchonella cf. refractifrons Bittn., Rhynchonella teutonica Bittn., Spirigera venetiana Bittn.

Mojsisovics vergleicht die sehr häufige Daonella dieser Schichten mit der Daonella parthanensis.

Aus Buchensteiner Kalken werden von Bittner angeführt nach Mojsisovics:

Arpadites trettensis Mojs., Trachyceras recubariense Mojs., Trachyceras Curionii Mojs., Trachyceras margaritosum Mojs., Hungarites Mojsisovicsi (Boekh.) Mojs., ferner Monophyllites wengensis und Arcestes sp.

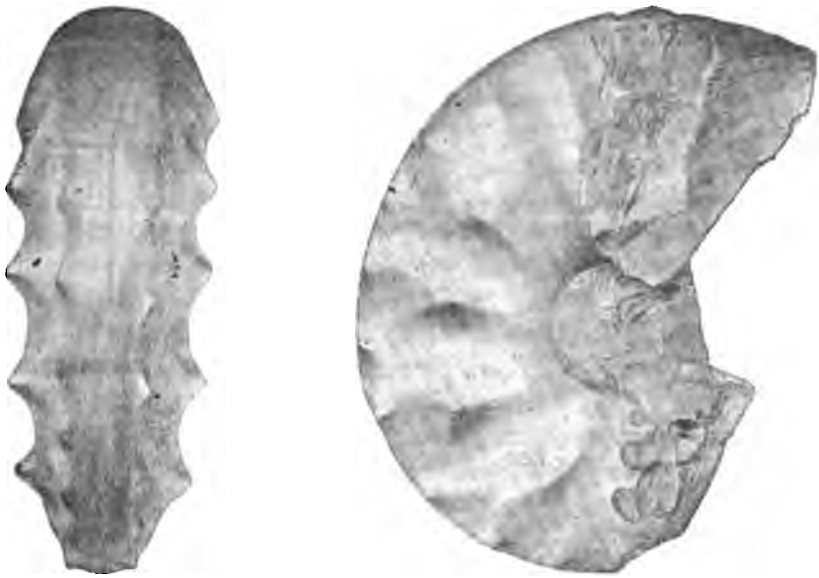
An Brachiopoden bestimmte Bittner: Rhynchonella cimbrica Bittn., Spirigera venetiana Bittn.

Bei dem Vergleich der Faunen verdient in erster Linie hervorgehoben zu werden, daß die Daonella cf. parthanensis in beiden Ablagerungen gleich häufig ist und sowohl am Tretto in den Buchensteiner Kalken als auch am Monte Spizze-Zuge und westlich Recoaro in „oberen, bunten Spizzekalken" gemeinsam vorkommt. Von den selteneren Brachiopoden ist eine Species gemeinsam. Die Entscheidung liegt aber bei den Ammoniten. Nach den Funden von Bittner schien hier allerdings ein Unterschied zwischen den Faunen zu bestehen. Derselbe wird aber durch meine Aufsammlungen oberhalb San Ulderico und zwar oberhalb der Fundstelle von Bittner, in zweifellosen Buchensteiner Kalken, welche von Spizzedolomiten deutlich getrennt sind, gehoben. Ich fand hier vor allem den für die Buchensteiner Schichten, sowohl östlich, als westlich des Garda-Sees so ungemein charakteristischen Arpadites ex aff. A. Apardis Mojs., den Bittner nur aus seinen oberen Spizzekalken kannte, ferner Trachyceras recubariense Mojs. und mehrere Exemplare von Daonella cf. parthanensis. Ich glaube, daß diese Funde hinreichen, um die Zusammengehörigkeit der etwas tiefer gelagerten mit den höheren bunten Kalken darzuthun.

In diesen Schichten war es auch, und zwar oberhalb der von Bittner beschriebenen Stelle, hinter San Ulderico, am Wege nach den Case Palle, wo ich das erste alpine Exemplar eines Ceratites nodosus auffand.

Auf die nähere Beschreibung dieses Exemplars, welche ein weites Ausholen in die Litteratur bis ins vorige Jahrhundert erheischen würde, kann hier nicht eingegangen werden.

Die folgende Abbildung macht es hinreichend kenntlich und ich bemerke dazu nur noch Folgendes:



Ceratites nodosus aut. von San Ulderico.

Das beste von mir gefundene Exemplar zeigt eine nahezu vollständige Wohnkammer. An dem einen Ende ist noch die letzte Kammerwandlinie vorhanden, während dem anderen Ende nicht allzu viel bis zur Mündung fehlen dürfte. Der erhaltene Theil beträgt wenig mehr als einen halben Umgang.

Vollständige Uebereinstimmung mit Nodosen des deutschen Muschelkalkes ist betreff der Lobenlinie vorhanden. Die Anzahl der Sättel, die breite Gestalt der Lateralsättel und die Neigung der letzteren gegeneinander sind in gleicher Weise ausgebildet. Die Gestalt kommt mehr den evoluteren Varietäten des deutschen Ceratites nodosus gleich, auch wenn man an eine geringe „Anormalität" der Wohnkammer denken könnte. Die hoch rechteckige Gestalt der beiden letzten Umgänge und der sanfte Abfall der Seitenflächen nach dem Nabel zu sind deutlich ausgeprägt.

Die Berippung des alpinen Exemplars schließt zwar die Identität mit einer Reihe deutscher Stücke aus, findet sich aber bei einer Reihe von sowohl im süddeutschen, als auch im mitteldeutschen Nodosuskalk verbreiteten Varietäten in übereinstimmender Weise. Es sind sowohl Lateralknoten, als auch Externknoten vorhanden, besonders die ersteren sind hoch und spitz. Im allgemeinen kommen zwei der letzteren auf einen Lateralknoten; nur nach dem Ende der Wohnkammer zu nehmen die Externknoten schneller an Zahl ab, so daß dort nur einer derselben in der Fortsetzung des

zugleich niedriger gewordenen, fast zu einer flachen Rippe ausgezogenen Lateralknotens liegt. Umbilikalknoten sind auch in der Anlage nirgends vorhanden.

Durch diese Verhältnisse erscheint vor allem die Zugehörigkeit zu der Gruppe der Nodosen gesichert. Beziehungen sind ferner nur zu Ceratites nodosus vorhanden. Allerdings zeigt das vorliegende Exemplar geringe Aehnlichkeit mit den von v. Schlotheim und v. Buch als Typen betrachteten Exemplaren. Diese letzteren zeigen einfache, grobe Rippen, eine Skulptur, welche, wie schon Beyrich hervorhob, eine Eigenthümlichkeit der Windungen im Alter ist. Auf kleinen und mittleren Windungen von Ceratites nodosus ist dagegen oft noch die jugendlichere, kräftigere Skulptur vorhanden, welche die Lateralknoten mit je zwei auf Theilrippen befindlichen Externknoten zeigt.

Sicher ist, daß der alpine Ceratit von San Ulderico mit gewissen, im deutschen Nodosuskalk liegenden Ammoniten, bei denen man bisher nicht daran gedacht hat, sie von dem ächten Ceratites nodosus abzutrennen, die beste Uebereinstimmung zeigt, eine Thatsache, welche ausreicht, um die in dieser Mittheilung gemachten stratigraphischen Schlußfolgerungen genau so zu rechtfertigen, als wenn ein mit dem Schlotheim'schen Typus übereinstimmender Fund gemacht wäre. Ein Zweifel könnte nur später bezüglich der Benennung der Form auftreten, wenn nämlich der Fall eintreten sollte, daß es gelänge; sämmtliche, heute noch zur Species Ceratites nodosus gerechneten Ammoniten in verschiedene Species zu trennen. Ueber die Möglichkeit dieser Trennung gehen immer noch die Meinungen sehr auseinander. Berühren würde ein solches Vorgehen aber, wie gesagt, allein die Benennung, nicht das Wesen des neuen alpinen Fundes. Nach der gegenwärtig ziemlich allgemein bestehenden Auffassung dieser Art und nach den aus der heutigen Litteratur gewonnenen Gesichtspunkten ist der Ceratites des Tretto jedenfalls als Ceratites nodosus zu bezeichnen.

Zusammen mit dem Ceratites nodosus fand ich die Fragmente eines anderen, noch nicht beschriebenen Ceratites, welcher hohe Dornen auf der Wohnkammer trägt[1]).

1) Wie bekannt, wird von Alters her, seit Catullo und L. von Buch, auch von Schauroth bereits das Vorkommen von Ceratites nodosus im Tretto erwähnt Nachforschungen, welche Benecke und Beyrich nach diesen Stücken anstellten, haben aber ergeben, daß die Stücke, auf welche Catullo's Angabe fußt, aus deutschem Muschelkalk stammen, und die bezüglichen Angaben bei Pirona auf einem Irrthum beruhen. Ebenso hat Omboni später eine Angabe betreffs eines Fundes dieses Ammoniten bei Zoldo Gümbel gegenüber widerrufen, wie ich der Bittner'schen Arbeit entnehme.

Obere Trias.

Ueber die Entwicklung der oberen Trias im Gebiete von Recoaro und Schio sind wir heut' zu Tage noch vollständig im Unklaren.

Hauptdolomit, welcher die Bergriesen von der Cima tre Croce über den Monte Pasubio bis zum Monte Sammano im wesentlichen zusammensetzt, ist an vielen Stellen durch das Vorkommen von Megalodon triqueter, Turbo solitarius, Gervillia exilis etc. nachweisbar. Wenn wir aber das Niveau der Eruptivgesteine über den Buchensteiner Kalken, in Analogie mit den Verhältnissen der Seisser Alp, bis in die Wengener Schichten ausdehnen, so bleibt noch immer die Frage offen, wo befinden sich Schlerndolomit und Raiblerschichten, von denen bisher aus dem Gebiete der vicentinischen Trias noch nichts nachgewiesen wurde?

Zur Lösung dieser Frage wird allerdings die Umgebung von Recoaro wegen ihrer in diesen Schichten sehr ungünstigen Aufschlüsse kaum geeignet sein. Am ersten versprechen die Abhänge des Monte Rione oberhalb Rossi hierüber Auskunft zu geben. Bei der Untersuchung dieses Gebietes des oberen Tretto wurde ein weiteres Vordringen ins Gebirge im vergangenen Sommer leider zweimal durch ungünstige Witterung vereitelt, so daß ich diese Untersuchung auf den nächsten Sommer aufschieben mußte.

2. Stratigraphische Bedeutung des Fundes von Ceratites nodosus im Tretto.

Während es einerseits in neuester Zeit gelungen ist, die alpine Trias mit gleichzeitigen Ablagerungen weit entfernter Länder, Central- und Ost-Asiens, ja West-Amerika's in Parallele zu bringen, fehlt es bis auf den heutigen Tag noch an einem Anhalt, um gleich sichere Beziehungen zu der deutschen Triasentwicklung anzuknüpfen. Einerseits zeigt der „Entwurf einer Gliederung der pelagischen Sedimente des Trias-Systems" von Mojsisovics, Waagen und Diener[1]) eine Durchführung der palaeontologisch-stratigraphischen Methode in dem großen südeuropäisch-asiatisch-pacifischen Triasmeer, der Thetys, andererseits geht aus den kritischen „Bemerkungen über die Gliederung der oberen alpinen Trias und über alpinen und außeralpinen Muschelkalk" von Benecke[2]) wiederum deutlich hervor, welch' geringen Anhalt wir haben, um selbst in

1) Sitzungsber. d. K. K. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Cl. Bd. CIV. Abth. 1. 1895.

2) Ber. der naturf. Gesellsch. zu Freiburg i. Br. Bd. IX. Heft 3. 1895.

der deutschen Trias deutlich ausgeprägte stratigraphische Grenzen in das System der alpinen Trias hinüberzuziehen.

Der Hauptgrund für diese Verschiedenheit ist darin zu suchen, daß wir in dem einen Fall eine Reihe von reichen Ammonitenfaunen kennen, welche für die Begründung der Trias-Stratigraphie die gleiche Bedeutung besitzen, wie ihre Verwandten für diejenige der Jura-Stratigraphie, während wir in dem zweiten Fall diese für die stratigraphischen Vergleiche so wichtigen Fossilien so gut wie ganz entbehren müssen.

Die Parallelisierung von alpinen und außeralpinen Horizonten hat sich bisher hauptsächlich nur auf den Nachweis von gleichen Fossilien in der oberen Trias, wie der Myophoria Kefersteini in den Raibler Schichten und dem Gypskeuper, und einiger Pflanzen, der sogenannten Lunzer Flora, vor allem der Danaeopsis marantacea, welche wohl nur in der außeralpinen Lettenkohle vorkommt, gestützt[1]). Die Parallelisierung der tieferen Muschelkalkfauna von Recoaro mit dem deutschen Wellenkalk ist andererseits im Jahre 1876 von Benecke durchgeführt worden. Die größte Unsicherheit herrscht aber über die Beziehungen alpiner und außeralpiner Trias an der oberen Grenze des Muschelkalkes.

Der Nachweis von Ceratites nodosus in den Alpen versprach von jeher, für die Beurtheilung dieser Frage von besonderer Bedeutung zu sein.

In der deutschen Trias hat Ceratites nodosus sein Lager im obersten Muschelkalk, in den sogen. Nodosuskalken oder Thonplatten. Wenn von dem wohl verwandten, aber doch mit dem Ceratites nodosus durchaus nicht übereinstimmenden Ceratites Schmidi Zimmermann[2]) im Grenzdolomit von Thüringen abgesehen wird, so zeigen nur noch die vom Kantor Moritz[3]) auf der Schafweide bei Lüneburg gesammelten Stücke angeblich aus unteren Lettenkohlendolomiten, daß Ceratites nodosus auch noch in den untersten Keuper hinaufsteigt.

Was den Ceratites Schmidi anbetrifft, so ist derselbe bereits von Zimmermann und Mojsisovics[4]) in übereinstimmender Weise besprochen worden. Auch ich schließe mich dem Urtheil dieser beiden Autoren im wesentlichen an. Die Hochmündigkeit,

---

1) vgl. Benecke a. a. O. pag. 19 f.
2) Ztschr. d. deutsch. geol. Ges. 1883. pag. 382.
3) ebenda. 1860. pag. 381.
4) Neues Jahrbuch für Min. etc. 1884. I. pag. 78.

die starke Involution und das fast gänzliche Fehlen von Skulptur auf den kleinen und mittleren Windungen weisen diese Form in die Nähe von Ceratites semipartitus, während ich die größerre Breite der Wohnkammer und das Vorhandensein einer deutlichen Skulptur nur auf dieser nicht als Anhalt für eine Identificierung mit Ceratites nodosus betrachten kann[2]).

Die Stücke von Lüneburg, welche v. Strombeck besprochen hat, zeigen höchstens, daß gewisse Varietäten von Ceratites nodosus noch in den unteren Keuper aufsteigen. v. Strombeck hat die stratigraphische Stellung der Schichten auf der Schafweide bereits erkannt, und wenn auch das in mancher Hinsicht so eigenartige Triasprofil von Lüneburg nicht recht in die Schichtenfolge der Trias des übrigen Hannover hinein paßt, so scheinen die v. Strombeck'schen Argumente vorläufig doch einwandsfrei zu sein.

Es sei aber erwähnt, daß es auch nicht an erfahrenen Geologen fehlt, welche den Lüneburger Dolomit noch zum Muschelkalk zählen.

Nach allem muß man aber sagen, daß das eigentliche Lager von Ceratites nodosus sich im oberen Muschelkalk befindet. v. Strombeck's Beobachtungen einiger konstanter Verschiedenheiten der Keuper-Ceratiten von Lüneburg gegenüber den tieferen Formen verdienen auch hervorgehoben zu werden.

Mit dieser geringen vertikalen Verbreitung des Ceratites nodosus geht aber eine ausgezeichnete horizontale Verbreitung Hand in Hand. Wie Benecke kürzlich betonte, „ist er selten im Rybnaer Kalk Oberschlesiens; er wird häufig bei Rüdersdorf und hält an, soweit wir oberen Muschelkalk (außeralpinen) überhaupt kennen, und ist von der Elbmündung an bis nach Lunéville, überall, vom Ardennenufer abgesehen, ein gewöhnliches Vorkommen; aber noch viel weiter südlich, an den Gestaden des Mittelmeers bei Toulon, kommt Ceratites nodosus nicht selten vor".

Dem stand bisher sein gänzliches Fehlen in alpinen Triasablagerungen entgegen.

Mojsisovics[1]) bemerkt zur Frage der Parallelisierung des oberen alpinen mit dem oberen deutschen Muschelkalke, daß sie nur eine beiläufige sein kann, da die Fauna der oberen Muschelkalk in der germanischen Provinz sich selbständig weiterentwickelte. „Die

2) Herr Professor Benecke, welcher sich kürzlich für die Identität von Ceratites Schmidi und nodosus ausgesprochen hatte, ist jetzt nach der Prüfung der inneren Windungen am Zimmermann'schen Original geneigt, beide Formen getrennt zu halten.

1) Die Dolomitriffe von Südtirol und Venetien. Wien 1879. pag. 49.

Bildungen sind annähernd homotax"; . . . . „wir sehen uns jedes wissenschaftlich haltbaren Mittels beraubt, in den Alpen den Beginn der Keuperperiode der germanischen Trias-See zu bestimmen", da eine Communication mit dem äußeren Meere nicht wiederhergestellt worden ist. In einer späteren brieflichen Mittheilung im „Neuen Jahrbuch für Min. etc." bemerkt er, daß man nach dem Auftreten von Ceratiten außeralpin bis zum Grenzdolomit, alpin bis zu den Buchensteiner Schichten aus diesem Grunde diese beiden Horizonte gleichzustellen hätte, und daß man nicht schließen könnte, daß die Buchensteiner-Schichten bloß wegen des Auftretens von Ceratiten in den Muschelkalk zu stellen wären.

Nach der vorher erörterten vertikalen Verbreitung von Ceratites nodosus in der außeralpinen Trias und durch den Nachweis desselben im Buchensteiner Niveau dürfte eine engere Parallelisierung aber nunmehr doch möglich, jedenfalls beweiskräftiger als die von Mojsisovics lediglich aus der Vertheilung der Gattung Ceratites gezogenen Schlüsse sein.

Vor weiteren Versuchen einer Parallelisierung, welche trotz der von Mojsisovics mit vollem Rechte ausgesprochenen Warnung gemacht worden sind, übergehe ich diejenigen von v. Wöhrmann und E. Fraas, welche eine eingehendere Gliederung auf Grund einer gleichartigen Aenderung der Sedimente anzubahnen versuchen. Dieselben sind außer Stande gewesen, strenge Beweise für gleichartige Abgrenzung des Muschelkalkes innerhalb und außerhalb der Alpen zu erbringen.

Man hat dann ferner den gesammten alpinen Muschelkalk nur mit dem unteren deutschen Muschelkalk in Beziehung bringen wollen. (vgl. Jaekel (Neues Jahrb. 1889. Bd. II) dann aber Eck (Ztschr. d. d. geol. Ges. 1891. pag. 734)).

Als neuester Versuch, welcher sich wieder an palaeontologische Merkmale hält, ist derjenige von Salomon anzusehen. Die von Salomon gegebene Tabelle, welche im Text gebührend begründet ist, rückt die fragliche obere Grenze des außeralpinen Muschelkalkes in den alpinen Sedimenten um ein beträchtliches Stück nach oben. Er stellt den Wettersteinkalk, einen Theil des Marmolatakalkes und des Esinoskalkes noch mit dem oberen außeralpinen Muschelkalk in Parallele. Aber Benecke hat alsbald in seiner oben citierten kritischen Arbeit in ganz objektiver Weise hervorgehoben, daß wir nicht im Stande sind, den außeralpinen Muschelkalk nach seinen Faunenbeständen von der folgenden Lettenkohle, bis zum oberen gypsführenden Grenzdolomit, abzutrennen. Vielmehr geht die Muschelkalkfauna durch diese Ablagerungen bis über

den oberen Grenzdolomit hinauf. Dies Verhalten dürfen wir im alpinen Triasprofil in gleicher Weise erwarten.

Man sieht daraus, daß bisher die mannigfachsten Versuche angestellt sind, um die obere Grenze des außeralpinen Muschelkalkes in den alpinen Trias-Sedimenten wiederzuerkennen ohne zum abschließenden Urtheil über diese Verhältnisse gelangt zu sein.

Der Fund des alpinen Ceratites nodosus bei San Ulderico berechtigt uns nun aber, die Buchensteiner Schichten mit dem Haupthorizont dieses Ammoniten in der germanischen Trias, mit dem oberen Muschelkalk, zu parallelisieren.

Das Vorkommen von Ceratiten im untersten Lettenkohlenkeuper bei Lüneburg ist in Anbetracht des isolirten Auftretens und der geringfügigen Abweichungen, welche an dem alpinen Exemplar nicht in gleicher Weise vorhanden sind — ohne daß gerade auf diese ein verschärfter Werth gelegt werden soll — nicht im Stande, diese Parallele zu erschüttern.

Das alpine Exemplar stimmt aber mit einer im deutschen Muschelkalk nicht seltenen Varietät aufs beste überein.

Der Fund des alpinen Ceratites nodosus bei San Ulderico berechtigt uns nun auch, die obere Grenze des Muschelkalkes im alpinen Gebiete über die Buchensteiner Schichten zu setzen.

Wir nehmen damit eine Formationsgrenze aus der außeralpinen Trias in die alpine hinüber, ein Verfahren, was der Rechtfertigung bedarf. Mojsisovics, Waagen und Diener haben in dem oben erwähnten Entwurf eines Triassystems principiell hervorgehoben, daß die deutsche Trias in Folge ihrer, der großen Thetys gegenüber eigenartigen, localen Entwicklung nicht mehr die Grundlage für die Gliederung der universellen, pelagischen Ablagerungen abgeben kann. Für die Bezeichnung Keuper, Lettenkohle etc. ist diese Bemerkung allerdings vollkommen berechtigt. Es hieße geradezu den Sinn derartiger lokaler Benennungen mißbrauchen, wenn man sie auf die alpinen Verhältnisse anwenden wollte. Anders mit dem Ausdruck Muschelkalk! Diesen können wir dem Sinne nach recht gut auf die alpinen Ablagerungen übertragen, derselbe hat sich deßhalb für letztere auch bereits allgemein eingebürgert. Da dieser Ausdruck aber ursprünglich aus der deutschen Trias hinübergenommen ist, sind wir auch berechtigt die stratigraphische Bedeutung des Ausdruckes, so wie sie in der außeralpinen Trias besteht, auf die alpine Trias zu übertragen.

Es wäre demnach, um eine vollkommene Synony-

mie des Begriffes Muschelkalk in den beiden Trias-Ablagerungen zu erreichen, nothwendig, außer dem Virgloriakalk auch noch die Buchensteiner Schichten in die Bezeichnung Muschelkalk miteinzuschließen, — eine Maßnahme, zu der vor allem Gümbel, Bittner und Rothpletz auf Grund der übrigen Fauna bereits früher gelangt sind.

Endlich mag zur Erläuterung dieser stratigraphischen Bemerkungen noch eine Tabelle folgen, auf welcher die besprochene Parallelisierung der außeralpinen und alpinen Trias — letztere nur an mir durch eigene Begehung bekannten Profilen — zum Ausdruck kommt.

Gliederung des ausseralpinen und alpinen Muschelkalkes.

Zonenammonit.	Deutsche Trias.	Südalpine Trias.	Recoaro.
Ceratites nodosus.	Thonplatten.	Buchensteiner Schichten in Südtirol. Bei Bad Ratzes: Pietre verde und weiße Kalk- und Dolomitschichten.	Rothe Kalke mit Ceratites nodosus, Pietre verde und Eruptivgestein.
	Trochitenkalk.		Spizzekalk.
Ceratites trinodosus (Sturia Sansovinii typus).		Schwarze Kalke mit Ceratiten, Ptychiten, Balatoniten etc. in Südtirol, Iudicarien und Lombardei.	Schwarze Kalke mit Diplopora triadica und Sturia Sansovinii.
			Tuffniveau.
—	Mittl. Muschelkalk.	?	?
Ceratites binodosus.	Schaumkalk und Terebratelbänke.	Zuckerkörniger Kalk mit Ceratiten, Balatoniten und Ptychiten, besonders bei Neu Prags am Pusterthal fossilreich.	Braune Dolomite und Brachiopoden-Kalke.
—	Wellenkalk und Muschelsandstein.	In Südtirol weiße Diploporendolomite. Westlich des Gardasees gelbe Dolomite und sandige Schichten.	Mergel-Kalk- auch Dolomitbänkchen mit Dadocrinus gracilis.

Ein neuer Beweis des Kroneckerschen Fundamentalsatzes über Abelsche Zahlkörper.

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung am 25. Januar 1896.

L. Kronecker hat in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1853 zuerst den fundamentalen Satz aufgestellt, daß die Wurzeln aller Abelschen Gleichungen im Bereich der rationalen Zahlen sich durch Einheitswurzeln rational ausdrücken lassen. Bezeichnet man diejenigen Zahlkörper, die durch Einheitswurzeln bestimmt sind, und alle Unterkörper von solchen Körpern kurz als Kreiskörper, so spricht sich der genannte Satz, wie folgt, aus:

Fundamentalsatz. Alle Abelschen Zahlkörper im Gebiete der rationalen Zahlen sind Kreiskörper.

H. Weber hat in den Acta Mathematica Bd. 8 einen vollständigen und allgemeinen Beweis dieses Satzes erbracht. Die vorliegende Note enthält einen neuen Beweis, welcher weder die Kummersche Zerlegung der Lagrangeschen Resolvente in Primideale noch die Anwendung der dem Wesen des Satzes fremdartigen transcendenten Methoden von Dirichlet erfordert. Der folgende Beweis ist vielmehr rein arithmetischer Natur; er beruht wesentlich auf den allgemeinen Begriffsbildungen, die ich in der Note „Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers“ in diesen Nachrichten vom Jahre 1894 kurz dargelegt habe und ist vermuthlich weitgehender Verallgemeinerungen fähig.

Wenn die Gruppe eines Abelschen Körpers aus den Potenzen einer einzigen Substitution besteht, so heiße der Abelsche Körper cyklisch. Wir construiren folgende besonderen cyklischen Körper. Es bedeute u eine ungerade Primzahl und $u^{\lambda+1}$ eine Potenz derselben; dann ist der durch $e^{\frac{2i\pi}{u^{\lambda+1}}}$ bestimmte Körper $k\left(e^{\frac{2i\pi}{u^{\lambda+1}}}\right)$ ein

cyklischer Körper vom $u^\lambda(u-1)$ten Grade. Der cyklische Unterkörper vom u^λten Grade dieses Körpers werde mit U_λ bezeichnet; die Diskriminante von U_λ ist eine Potenz von u. Ferner bestimmt die Zahl $e^{\frac{i\pi}{2^{\lambda+1}}}+e^{-\frac{i\pi}{2^{\lambda+1}}}$ einen reellen cyklischen Körper vom 2^λten Grade. Dieser Körper werde mit Z_λ bezeichnet; die Diskriminante desselben ist eine Potenz von 2. Endlich wählen wir eine rationale Primzahl p mit der Congruenzeigenschaft $p \equiv 1$ nach l^λ aus, wo l eine beliebige gerade oder ungerade Primzahl bedeutet; dann besitzt der Kreiskörper $k\left(e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)$ vom Grade $p-1$ offenbar einen cyklischen Unterkörper vom Grade l^λ, dessen Diskriminante eine Potenz von p ist. Dieser cyklische Körper l^λten Grades werde mit P_λ bezeichnet. Die Körper U_λ, Z_λ, P_λ sind sämmtlich Kreiskörper.

Wir beweisen nun der Reihe nach folgende Hilfssätze über cyklische Körper.

Satz 1. Wenn ein beliebiger cyklischer Körper L_λ, dessen Grad l^λ die Potenz einer geraden oder ungeraden Primzahl l ist, keinen der beiden Körper U_1 oder Z_1 als Unterkörper enthält, so gibt es in dem durch die Zahl $\Theta = e^{\frac{2i\pi}{l^\lambda}}$ bestimmten Körper $k(\Theta)$ stets eine ganze algebraische Zahl $\varkappa$ von der Art, daß der aus $k(\Theta)$ und L_λ zusammengesetzte Körper $k(\Theta, L_\lambda)$ durch die Zahlen Θ und $\sqrt[l^\lambda]{\varkappa}$ bestimmt ist. Die Zahl $\varkappa$ besitzt obenein die Eigenschaft, daß $\varkappa^{l^{\lambda-r}}$ die l^λte Potenz einer Zahl in $k(\Theta)$ wird; dabei bedeutet r eine beliebige nicht durch l theilbare ganze rationale Zahl, ferner $t = (\Theta : \Theta^r)$ die zugehörige Substitution der Gruppe des Kreiskörpers $k(\Theta)$ und endlich ist symbolisch $t\varkappa = \varkappa^t$ d. h. $\frac{t\varkappa}{\varkappa^r} = \varkappa^{l^{\lambda-r}}$ gesetzt.

Beweis. Ist α eine den Körper L_λ bestimmende ganze algebraische Zahl und sind $1, s, s^2, \cdots, s^{l^\lambda-1}$ die Substitutionen der Gruppe von L_λ, so setze man

$$K = \alpha + \Theta \cdot s\alpha + \Theta^2 \cdot s^2\alpha + \cdots + \Theta^{l^\lambda-1} \cdot s^{l^\lambda-1}\alpha.$$

Aus $sK = \Theta K$ folgt leicht, daß die beiden Zahlen K^{l^λ} und $K^{l^{\lambda-r}}$ Zahlen des Körpers $k(\Theta)$ sind. Die Zahl $\varkappa = K^{l^\lambda}$ ist daher von der verlangten Beschaffenheit. Daß der durch Θ und $\sqrt[l^\lambda]{\varkappa}$ bestimmte Körper mit dem durch Θ und α bestimmten Körper identisch ist, folgt leicht aus der Gleichheit ihrer Grade, da der letztere Körper den ersteren enthält.

Satz 2. Wenn ein beliebiger cyklischer Körper L_λ, dessen Grad u^λ die Potenz einer ungeraden Primzahl ist, den Körper $U_{\lambda-1}$ als Unterkörper enthält, so enthält der aus $\vartheta = e^{\frac{2i\pi}{u}}$ und aus L_λ zusammengesetzte Körper $k(\vartheta, L_\lambda)$ nothwendig den durch $\Theta = e^{\frac{2i\pi}{u^\lambda}}$ bestimmten Körper $k(\Theta)$ als Unterkörper. Es giebt nun in diesem Körper $k(\Theta)$ stets eine ganze algebraische Zahl $\varkappa$, derart daß der Körper $k(\vartheta, L_\lambda)$ auch durch die Zahlen ϑ und $\sqrt[u]{\varkappa}$ bestimmt ist. Bezeichnet ferner r eine Primitivzahl nach u^λ und wird $t = (\Theta : \Theta^r)$ gesetzt, so besitzt die Zahl $\varkappa$ obenein die Eigenschaft, daß $\varkappa^{t-\tau}$ die $u$te Potenz einer Zahl des Körpers $k(\Theta)$ wird.

Beweis. Ist α eine den Körper L_λ bestimmende, ganze algebraische Zahl und sind $1, s, s^2, \ldots, s^{u^\lambda-1}$ die Substitutionen der Gruppe von L_λ, so setze man $S = s^{u^{\lambda-1}}$ und

$$K = \alpha + \vartheta \cdot S\alpha + \vartheta^2 \cdot S^2\alpha + \cdots + \vartheta^{u-1} \cdot S^{u-1}\alpha.$$

Der Körper $k(\vartheta, L_\lambda)$ enthält offenbar den Körper $k(\Theta)$ als Unterkörper und zwar sind die Zahlen dieses Unterkörpers $k(\Theta)$ dadurch charakterisirt, daß sie bei der Substitution S ungeändert bleiben. Wegen $SK = \vartheta K$ ist somit K^u eine Zahl in $k(\Theta)$. Es sei nun t' eine solche Substitution der Gruppe des Körpers $k(\vartheta, K_\lambda)$, daß $t'\Theta = \Theta^r$ wird; dann ist $St'K = t'SK = \vartheta^r t'K$; da mithin der Ausdruck $K^{r-\tau}$ bei der Substitution S ungeändert bleibt, so ist $K^{r-\tau}$ eine Zahl in $k(\Theta)$ und folglich wird $\varkappa^{r-\tau} = \varkappa^{t-\tau}$ die $u$te Potenz einer solchen Zahl. Der Kürze halber ist hier wiederum von der symbolischen Schreibweise $t'K = K^r$ Gebrauch gemacht.

Satz 3. Wenn L_λ ein beliebiger cyklischen Körper ist, dessen Grad l^λ die Potenz einer beliebigen geraden oder ungeraden Primzahl ist, so kann man stets einen cyklischen Körper M_λ vom Grade $l^{\lambda'}$, wo $\lambda' \leqq \lambda$ ist, und mit folgenden beiden Eigenschaften finden. Erstens: der aus M_λ und einem gewissen Kreiskörper K zusammengesetzte Körper enthält L_λ als Unterkörper und zweitens: geht in der Diskriminante von M_λ keine rationale Primzahl p mit der Congruenzeigenschaft $p \equiv 1$ nach l^λ auf.

Beweis. Ist p eine rationale Primzahl, welche die Congruenzeigenschaft $p \equiv 1$ nach l^λ besitzt und welche in der Diskriminante des Körpers L_λ aufgeht, so construire man den cyklischen Kreiskörper P_λ vom Grade l^λ, dessen Diskriminante eine Potenz von p ist, und betrachte den aus L_λ und P_λ zusammengesetzten Körper $k(L_\lambda, P_\lambda)$ vom $l^{\lambda+\lambda'}$ten Grade. In P_λ ist $p = \mathfrak{p}^{l^\lambda}$ wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal in P_λ bedeutet. Es sei $\mathfrak{P}$ ein in $\mathfrak{p}$ aufgehendes Primideal des Kör-

pers $k(L_h, P_h)$. Da das Primideal $\mathfrak{P}$ in der Gradzahl l^{h+k} des Körpers $k(L_h, P_h)$ nicht aufgeht, so ist dieser Körper $k(L_h, P_h)$ als Verzweigungskörper des Primideals $\mathfrak{P}$ relativ cyklisch und zwar mindestens vom Relativgrade l^h in Bezug auf den Trägheitskörper L_h' des Primideals $\mathfrak{P}$. Da ferner cyklische Körper von höherem als dem l^hten Grade in $k(L_h, P_h)$, nicht vorkommen, so hat $k(L_h, P_h)$ genau den Relativgrad l^h in Bezug auf L_h'. Hieraus folgt, daß der Trägheitskörper L_h' vom Grade l^k ist; dieser Körper L_h' ist überdies cyklisch, da sonst, wie die Lehre von den Abelschen Gruppen zeigt der Körper $k(L_h, P_h)$ nicht relativ cyklisch in Bezug auf L_h' sein könnte. Das Grundideal des Trägheitskörpers L_h' ist nicht durch $\mathfrak{P}$ und daher auch die Diskriminante von L_h' nicht durch p theilbar; diese Diskriminante enthält daher nur solche Primtheiler, welche in der Diskriminante des Körpers L_h aufgehen und verschieden von p sind. Es handelt sich nun darum, ob in der Diskriminante von L_h' noch eine Primzahl q mit der Congruenzeigenschaft $q \equiv 1$ nach l^h enthalten ist. In diesem Falle wenden wir das nämliche Verfahren auf den Körper L_h' an und gelangen so zu einem cyklischen Körper L_h'' vom $l^{k'}$ten Grade, welcher folgende Eigenschaften besitzt: der aus L_h'' und einem gewissen cyklischen Kreiskörper Q_h zusammengesetzte Körper enthält L_h' als Unterkörper und die Diskriminante des Körpers L_h'' enthält nur solche Primzahlen, welche in der Diskriminante des Körpers L_h aufgehen und von p und q verschieden sind. Die wiederholte Anwendung des Verfahrens führt schließlich auf einen Körper M_h von der im Satze verlangten Beschaffenheit.

Satz 4. Wenn L_h ein cyklischer Körper ist, dessen Grad l^h die Potenz einer beliebigen geraden oder ungeraden Primzahl l ist und wenn L_1 den Unterkörper $l$ten Grades von L_h bezeichnet, so besitzen sämmtliche von l verschiedenen Primtheiler p der Diskriminante von L_1 die Congruenzeigenschaft $p \equiv 1$ nach l^h.

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, daß l eine ungerade Primzahl und $h = 1$ ist. Es sei dann im Gegensatz zu unserer Behauptung p eine rationale in der Diskriminante von L aufgehende Primzahl, welche $\not\equiv 1$ nach l ist. Ferner bezeichne $k(\vartheta)$ den durch $\vartheta = e^{\frac{2i\pi}{l}}$ bestimmten Körper und es sei in $t = (\vartheta : \vartheta^r)$ r eine Primitivzahl nach l. Ist $\mathfrak{p}$ ein idealer Primfactor von p in $k(\vartheta)$, so ist das Primideal $\mathfrak{p}$, wegen $p \not\equiv 1$ nach l, wie die Theorie des Kreiskörpers $k(\vartheta)$ lehrt, zugleich ein Primideal in einem Unterkörper von $k(\vartheta)$ und es gibt mithin eine Potenz t^m der Substitution t, deren Exponent $m < l-1$ ist und für

welche dennoch $t^m \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}^{t^m-1} = 1$ wird. Desgleichen gelten auch für die zu $\mathfrak{p}$ conjugirten Primideale $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, ... die entsprechenden Gleichungen $\mathfrak{p}'^{t^m-1} = 1$, $\mathfrak{p}''^{t^m-1} = 1, \ldots$. Nach Satz 1 gibt es eine ganze Zahl $\varkappa$ in $k(\vartheta)$, so daß die beiden Zahlen ϑ und $\sqrt[l]{\varkappa}$ den aus $k(\vartheta)$ und L_1 zusammengesetzten Körper $k(\vartheta, L_1)$ bestimmen und für welche obenein $\varkappa^{t-r}$ gleich der $l$ten Potenz einer Zahl in $k(\vartheta)$ wird. Da $t-r$ und t^m-1 zwei ganze ganzzahlige Functionen von t sind, welche im Sinne der Congruenz nach l keinen gemeinsamen Factor haben, so gibt es 3 ganze ganzzahlige Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ der Veränderlichen t, so daß

$$1 = (t^m-1)\varphi(t) + (t-r)\psi(t) + l\chi(t)$$

ist und hieraus folgt

$$\varkappa = \varkappa^{(t^m-1)\varphi(t)+(t-r)\psi(t)+l\chi(t)} = \varkappa^{(t^m-1)\varphi(t)}\alpha^l,$$

wo α eine Zahl in $k(\vartheta)$ ist. Wegen der vorhin bewiesenen Gleichung für die Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, ... ist $\varkappa^{t^m-1}$ eine ganze oder gebrochene Zahl, deren Zähler und Nenner keinen der Primfactoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, ... enthalten und daher zu p prim sind; das Gleiche gilt somit von der Zahl $\varkappa^{(t^m-1)\varphi(t)}$. Wir setzen $\varkappa^{(t^m-1)\varphi(t)} = \frac{\varrho}{a^l}$, wo ϱ eine ganze algebraische zu p prime Zahl und a eine ganze rationale Zahl bedeutet. Der Körper $k(\vartheta, L_1)$ wird mithin auch durch die beiden Zahlen ϑ und $\sqrt[l]{\varrho}$ bestimmt. Die Partialdiskriminante der Zahl $\sqrt[l]{\varrho}$ in Bezug auf $k(\vartheta)$ ist $= \pm l^l \varrho^{l-1}$ und da ϱ zu p prim ist, so ist mithin die Partialdiskriminante von $k(\vartheta, L_1)$ in Bezug auf $k(\vartheta)$ prim zu p. Da andrerseits die Diskriminante von $k(\vartheta)$ nicht durch p theilbar ist, so ist auch die Diskriminante von $k(\vartheta, L_1)$ und folglich auch die Diskriminante des Körpers L_1 prim zu p, was unserer Annahme widerspricht.

In ähnlicher Weise schließen wir die Richtigkeit unseres Satzes bei ungeradem l, wenn der Exponent h beliebig angenommen wird. Wir setzen unter Beibehaltung der in Satz 1 angewandten Bezeichnungsweise $\Theta = e^{\frac{2i\pi}{l^h}}$ und $t = (\Theta : \Theta^r)$, wo r eine Primitivzahl nach l^h bedeuten möge. Es sei $\mathfrak{p}$ ein idealer Primfactor der in der Diskriminante von L_1 aufgehenden Primzahl p in $k(\Theta)$. Nehmen wir $p \not\equiv 1$ nach l^h an, so liegt, wie die Theorie des Kreiskörpers $k(\Theta)$ lehrt, das Primideal $\mathfrak{p}$ jedenfalls auch in dem Unterkörper $k(\Theta')$ d. h. es ist $\mathfrak{p}^{l^{h-2}(l-1)}-1 = 1$ und ebenso gelten für die zu $\mathfrak{p}$ in $k(\Theta)$ conjugirten Primideale $\mathfrak{p}'$, ... die Gleichungen $\mathfrak{p}'^{l^{h-2}(l-1)}-1 = 1, \ldots$. Da r Primitivzahl nach l^h ist, so wird

$r^{l^{\lambda-2}(l-1)} \equiv 1$ nach l^λ und mithin lassen sich 3 ganze ganzzahlige Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ der Variabeln t derart bestimmen, daß

$$l^{\lambda-1} = (t^{l^{\lambda-2}(l-1)}-1)\varphi(t) + (t-r)\psi(t) + l^\lambda \chi(t)$$

ist; hieraus folgt insbesondere, wenn $\varkappa$ die in Satz 1 bestimmte Zahl bedeutet

$$\varkappa^{l^{\lambda-1}} = \varkappa^{(t^{l^{\lambda-2}(l-1)}-1\varphi(t)}\alpha^{l^\lambda},$$

wo α eine Zahl in $k(\Theta)$ bedeutet. Wegen der vorhin bewiesenen Eigenschaft der Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, ... ist $\varkappa^{t^{l^{\lambda-2}(l-1)}-1}$ und folglich auch $\varkappa^{(t^{l^{\lambda-2}(l-1)}-1)\varphi(t)}$ eine Zahl, deren Zähler und Nenner zu p prim ausfallen. Wir können daher die letztere Zahl $= \frac{\varrho}{a^{l^\lambda}}$ setzen, wo ϱ eine ganze algebraische zu p prime Zahl und a eine ganze rationale Zahl bedeutet. Es ist folglich $\sqrt[l]{\varkappa} = \frac{\alpha}{a}\sqrt[l^\lambda]{\varrho}$ und daraus ergibt sich $\varrho = \sigma^{l^{\lambda-1}}$, wo σ ebenfalls in $k(\Theta)$ liegt. Da der durch Θ und $\sqrt[l]{\varkappa}$ bestimmte Körper mit demjenigen Körper identisch ist, welcher durch Zusammensetzung aus $k(\Theta)$ und L_1 entsteht, und da die Partialdiskriminante der Zahl $\sqrt[l]{\sigma}$ in Bezug auf $k(\Theta)$ den zu p primen Werth $\pm l^l \sigma^{l-1}$ besitzt, so ist die Partialdiskriminante des Körpers $k(\Theta, L_1)$ in Bezug auf $k(\Theta)$ prim zu p. Andererseits ist die Diskriminante von $k(\Theta)$ ebenfalls nicht durch p theilbar und folglich gilt das Gleiche auch von den Diskriminanten des Körpers $k(\Theta, L_1)$ und des Körpers L_1. Der letztere Umstand widerspricht unserer Annahme.

Um die Richtigkeit des Satzes 4 für $l = 2$ zu erkennen, machen wir zunächst die Annahme $h = 2$ und wenden dann auf den cyklischen Körper L_2 vom 4ten Grade den Satz 1 an. Gemäß der dort gebrauchten Bezeichnungsweise setzen wir $\Theta = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ und wählen $r = 3$. Dann ist $t = (i : -i)$. Es sei L_1 der quadratische Unterkörper von L_2 und p eine in der Diskriminante von L_1 aufgehende Primzahl, welche $\equiv 1$ nach 4 ist. Infolge dessen ist p in $k(i)$ unzerlegbar. Ist nun die durch Satz 1 in unserem Falle bestimmte Zahl $\varkappa$ durch p theilbar, so bilde die Zahl $\varrho = \varkappa^{t-1}$. Da nach Satz 1 andererseits $\varkappa^{t-3} = \alpha^4$ sein soll, wo α in $k(i)$ liegt, so folgt $\varkappa^2 = \varrho\alpha^{-4}$ d. h. $\sqrt{\varkappa} = \alpha^{-1}\sqrt[4]{\varrho}$. In Folge dessen ist ϱ das Quadrat einer Zahl in $k(i)$; wir setzen $\varrho = \frac{\tau^2}{a^4}$, wo τ eine ganze algebraische zu p prime Zahl und a eine ganze rationale Zahl bedeutet. Da der Körper $k(i, L_1)$ mit dem Körper $k(i, \sqrt{\tau})$ übereinstimmt und da andererseits die Par-

tialdiskriminante der Zahl $\sqrt{\tau}$ in Bezug auf $k(i)$ zu p ist, so ist auch die Partialdiskriminante des Körpers $k(i, L_1)$ in Bezug auf $k(i)$ prim zu p, und hieraus folgt, wie vorhin, daß die Diskriminante von L_1 nicht durch p theilbar sein kann.

Ist im Falle $l = 2$ der Exponent $h > 2$, so setzen wir $\Theta = e^{\frac{i\pi}{2^{h-1}}}$. Wäre dann die in der Diskriminante von L_1 aufgehende Primzahl $p \equiv 1$ nach 4 und $\not\equiv 1$ nach 2^h und ist $\mathfrak{p}$ ein idealer Primfactor von p in $k(\Theta)$, so bleibt $\mathfrak{p}$ ungeändert bei der Substitution $t^{2^{h-3}}$, wo t entweder $= (\Theta : \Theta^5)$ oder $= (\Theta : \Theta^{-5})$ ist; folglich wird $\mathfrak{p}^{t^{2^{h-3}}-1} = 1$. Wegen $5^{2^{h-3}} \not\equiv 1$ nach 2^h gilt eine Gleichung von der Gestalt

$$2^{h-1} = (t^{2^{h-3}}-1)\varphi(t) + (t-5)\psi(t) + 2^h\chi(t)$$

und aus dieser schließen wir, wie vorhin bei ungeradem l, auf einen Widerspruch mit der Annahme, wonach p in der Diskriminante von L_1 aufgeht.

Satz 5. Wenn die Diskriminante eines cyklischen Körpers L_1 von dem ungeraden Primzahlgrade u gleich einer positiven Potenz von u ist, so stimmt der Körper L_1 mit dem Körper U_1 überein. Wenn ferner ein cyklischer Körper L_h, dessen Grad u^h eine höhere als die erste Potenz der ungeraden Primzahl u ist, den Kreiskörper U_{h-1} als Unterkörper enthält, so stimmt der Körper L_h mit dem Körper U_h überein.

Beweis. Wir benutzen die in Satz 2 erklärte Bezeichnungsweise und setzen überdies $\lambda = 1-\Theta$; es ist dann $\mathfrak{l} = (\lambda)$ ein Primideal in $k(\Theta)$ und es wird im Sinne der Idealtheorie

$$(1-\vartheta) = \mathfrak{l}^{u^{h-1}},\ (u) = (1-\vartheta)^{u-1} = \mathfrak{l}^{u^{h-1}(u-1)};$$

endlich gilt die Congruenz

$$t\lambda = 1-\Theta^r \equiv r\lambda,\quad (\mathfrak{l}^2).$$

Wir betrachten nun die in Satz 2 construirte Zahl $\varkappa$. Da das Primideal $\mathfrak{l}$ in $k(\Theta)$ vom ersten Grade ist, so folgt, wenn $\varrho = \varkappa^{(t-1)(u-1)}$ gesetzt wird, für diese Zahl die Congruenz $\varrho \equiv 1$ nach $\mathfrak{l}$. Wir setzen $\varrho \equiv 1 + a\lambda$ nach $\mathfrak{l}^2$, wo a eine ganze rationale Zahl bedeutet; dann ist $\sigma = \varrho\Theta^a \equiv 1$ nach $\mathfrak{l}^2$. Nunmehr führen wir den Nachweis dafür, daß im Körper $k(\Theta)$ eine Zahl α gefunden werden kann, so daß die Congruenz $\sigma\alpha^u \equiv 1$ nach $(1-\vartheta)^u$ besteht. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei e der größte Exponent von der Beschaffenheit, daß bei geeigneter Wahl der in $k(\Theta)$ liegenden Zahl α die Congruenz $\sigma\alpha^u \equiv 1$ nach $\mathfrak{l}^e$ stattfindet

und es sei unserer Behauptung entgegen $\mathfrak{l}^e$ nicht durch $(1-\vartheta)^u$ teilbar d. h. es sei $e < u^h$; wir setzen demgemäß $\sigma\alpha^u = 1 + a\lambda^e$ nach $\mathfrak{l}^{e+1}$, wo a eine nicht durch u theilbare ganze rationale Zahl bedeutet und unterscheiden 2 Fälle, jenachdem e durch u theilbar ist oder nicht. Im ersten Falle gilt die Congruenz

$$1 + a\lambda^e \equiv \left(1 + a\lambda^{\frac{e}{u}}\right)^u, \quad \mathfrak{l}^{e+1}$$

und mithin ist

$$\sigma\left\{\alpha\left(1 + a\lambda^{\frac{e}{u}}\right)^{-1}\right\}^u \equiv 1, \quad \mathfrak{l}^{e+1}$$

Diese Congruenz widerstreitet der Annahme, wonach e der größte Exponent dieser Art sein sollte. Im zweiten Falle berücksichtigen wir, daß nach Satz 2 $\varkappa^{\tau-\tau}$ und folglich auch $\sigma^{\tau-\tau}$ die $u$te Potenz einer Zahl in $k(\Theta)$ ist; wir setzen etwa $(\sigma\alpha^u)^{\tau-\tau} = \beta^u$, wo β eine Zahl des Körpers $k(\Theta)$ ist. Dieser Umstand liefert die Congruenz $1 + a(r\lambda)^e - ar\lambda^e \equiv \beta^u$ nach $\mathfrak{l}^{e+1}$. Da $e < u^h$ und nicht durch u theilbar ist, so würde hieraus $ar^e \equiv ar$ nach $\mathfrak{l}$ folgen, was ebenfalls unmöglich ist, da r Primitivzahl nach u sein soll. Diese Betrachtung lehrt also $e \geqq u^h$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir setzen nun $\sigma\alpha^u = \frac{\tau}{a}$, wo τ eine ganze algebraische Zahl mit der Congruenzeigenschaft $\tau \equiv 1$ nach $(1-\vartheta)^u$ ist und a eine ganze rationale Zahl bedeutet. Nehmen wir dann an, der Körper L_h sei von dem Körper U_h verschieden, so wäre der aus $k(\Theta)$, U_h, und L_h zusammengesetzte Körper $k(\sqrt[u]{\Theta}, \sqrt[u]{\tau})$ vom Grade $u^{h+1}(u-1)$, Es ist andererseits $\frac{1-\sqrt[u]{\tau}}{1-\vartheta}$ gleich einer ganzen Zahl des Körpers $k(\sqrt[u]{\Theta}, \sqrt[u]{\tau})$ und die Partialdiskriminante dieser Zahl in Bezug auf $k(\sqrt[u]{\Theta})$ ist gleich $\varepsilon\tau^{u-1}$, wo ε eine Einheit ist. Da τ zu u prim ist, so ist mithin die Partialdiskriminante des Körpers $k(\sqrt[u]{\Theta}, \sqrt[u]{\tau})$ in Bezug auf den Körper $k(\sqrt[u]{\Theta})$ ebenfalls prim zu u. Bezeichnen wir daher mit $\mathfrak{L}$ einen idealen Primfactor von $\mathfrak{l}$ im Körper $k(\sqrt[u]{\Theta}, \sqrt[u]{\tau})$, so besitzt $\mathfrak{L}$ in diesem Körper einen Trägheitskörper T, welcher mindestens den Grad u hat. Die Diskriminante dieses Trägheitskörpers T ist prim zu u.

Nehmen wir zunächst $h = 1$, so wäre der genannte Trägheitskörper $T = L_1$; dies ist nicht möglich, weil nach Voraussetzung die Diskriminante des Körpers L_1 eine positive Potenz von u ist. Der Beweis für den ersten Theil unseres Satzes ist hierdurch erbracht. Nehmen wir $h > 1$ an, so müßte jener Trägheitskörper T des Ideals $\mathfrak{L}$ entweder $= U_1$ sein oder den Körper U_1 als Unter-

körper enthalten. Beides ist nicht möglich, da die Diskriminante von U_l eine Potenz von u ist und dieser Widerspruch lehrt die Richtigkeit des zweiten Theiles unseres Satzes 5.

Satz 6. Wenn ein reeller cyklischer Körper L_λ vom Grade 2^λ den Körper $Z_{\lambda-1}$ als Unterkörper enthält, so stimmt L_λ mit Z_λ überein.

Beweis. Der Körper $Z_{\lambda-1}$ wird durch die Zahl

$$\lambda = e^{\frac{i\pi}{2^\lambda}} + e^{-\frac{i\pi}{2^\lambda}}$$

und der Körper Z_λ durch die Zahl

$$\mu = e^{\frac{i\pi}{2^{\lambda+1}}} + e^{-\frac{i\pi}{2^{\lambda+1}}}$$

bestimmt. Es ist $\mu^2 = \lambda+2$, d. h. $\mu = \sqrt{\lambda+2}$. Im Sinne der Idealtheorie gilt ferner die Gleichung $(2) = \mathfrak{l}^{2^{\lambda-1}}$, wo $\mathfrak{l} = (\lambda)$ ein Primideal in $Z_{\lambda-1}$ bedeutet. Der Körper L_λ ist jedenfalls durch die Zahl λ und eine Zahl von der Form $\sqrt{\varkappa}$ bestimmt, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl in $Z_{\lambda-1}$ bedeutet. Wäre nun der Körper L_λ von Z_λ verschieden und nehmen wir an, es sei $\varkappa$ durch $\mathfrak{l}^m$, aber nicht durch $\mathfrak{l}^{m+1}$ theilbar, so setze man $\varrho = \frac{\varkappa(\lambda+2)^m}{\lambda^{2m}}$; die beiden Zahlen λ und $\sqrt{\varrho} = \frac{\mu^m}{\lambda^m}\sqrt{\varkappa}$ definiren dann wiederum einen reellen cyklischen Körper L'_λ vom 2^λten Grade und ϱ bedeutet eine ganze nicht durch $\mathfrak{l}$ theilbare Zahl. Wir wollen zeigen, daß dieses unmöglich ist.

Zu dem Zwecke setzen wir $\Theta = e^{\frac{i\pi}{2^\lambda}}$ und $t = (\Theta : \Theta^3)$. Da die Zahl $\sqrt{t\varrho}$ mit der Zahl λ zusammen ebenfalls den Körper L'_λ definiren muß, so folgt $\sqrt{t\varrho} = \alpha\sqrt{\varrho}$, wo α in $Z_{\lambda-1}$ liegt, d. h. es ist $\varrho \cdot t\varrho$ das Quadrat einer Zahl in $Z_{\lambda-1}$. Nunmehr führen wir den Nachweis dafür, daß im Körper $Z_{\lambda-1}$ eine Zahl α gefunden werden kann, welche der Congruenz $\varrho\alpha^2 \equiv 1$ nach $\mathfrak{l}^{2^\lambda-1}$ genügt. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei e der größte Exponent von der Beschaffenheit, daß bei geeigneter Wahl der in $Z_{\lambda-1}$ liegenden Zahl α die Congruenz $\varrho\alpha^2 \equiv 1$ nach $\mathfrak{l}^e$ stattfindet und es sei im Gegensatz zu unserer Behauptung $e < 2^\lambda - 1$; wir setzen demgemäß $\varrho\alpha^2 \equiv 1 + \lambda^e$ nach $\mathfrak{l}^{e+1}$ und unterscheiden dann 2 Fälle, je nachdem e gerade oder ungerade ausfällt. Im ersteren Falle berücksichtigen wir die Congruenz $\varrho\alpha^2\left(1+\lambda^{\frac{e}{2}}\right)^2 \equiv 1$ nach $\mathfrak{l}^{e+1}$; dieselbe würde zeigen, daß e nicht der höchste Exponent von der verlangten Art wäre. Im zweiten Falle setzen wir $\varrho\alpha^2 \equiv 1 + \lambda^e + a\lambda^{e+1}$ nach $\mathfrak{l}^{e+2}$, wo

a den Werth 0 oder 1 hat. Ist $a = 1$, so berücksichtigen wir, daß für $e < 2^\lambda - 1$ die Congruenz $1 + \lambda^{e+1} \equiv \left(1 + \lambda^{\frac{e+1}{2}}\right)^2$ nach $\mathfrak{l}^{e+2}$ gilt. Setzen wir daher $\sigma = \varrho\alpha^2\left(1+\lambda^{\frac{e+1}{2}}\right)^{2a}$, so wird $\sigma \equiv 1 + \lambda^e + b\lambda^{e+2}$ nach $\mathfrak{l}^{e+3}$, wo b den Werth 0 oder 1 hat. Wegen $t\lambda \equiv \lambda + \lambda^3$ nach $\mathfrak{l}^4$ folgt:

$$t\sigma \equiv 1 + (\lambda + \lambda^3)^e + b\lambda^{e+2} \equiv 1 + \lambda^e + (b+1)\lambda^{e+2}, \qquad (\mathfrak{l}^{e+3})$$

d. h. für $e = 1$, bezüglich für $e \geqq 3$:

$$\sigma \cdot t\sigma \equiv (1+\lambda)(1+\lambda+\lambda^3) \equiv 1 + \lambda^3 + \lambda^3 \quad , \quad (\mathfrak{l}^4)$$

$$\sigma \cdot t\sigma \equiv (1+\lambda^e)(1+\lambda^e+\lambda^{e+2}) \equiv 1 + \lambda^{e+2} \quad , \quad (\mathfrak{l}^{e+3}).$$

Die rechte Seite der ersteren Congruenz kann nicht $\equiv \alpha^2$ nach $\mathfrak{l}^4$ sein; soll die rechte Seite der zweiten Congruenz $\equiv \alpha^2$ nach $\mathfrak{l}^{e+3}$ sein, so muß $e + 2 \geqq 2^\lambda + 1$ werden, da $2^\lambda + 1$, wie leicht ersichtlich, der kleinste unter allen ungeraden Exponenten f ist derart, daß $1 + \lambda^f \equiv \alpha^2$ nach $\mathfrak{l}^{f+1}$ werden kann. Wegen $e \geqq 2^\lambda - 1$ ist unsere obige Behauptung bewiesen.

Wir setzen $\sigma = \varrho\alpha^2 \equiv 1 + a\lambda^{2^\lambda - 1}$ nach $\mathfrak{l}^{2^\lambda}$, wo a den Werth 0 oder 1 hat. Es genügt folglich, wenn $\tau = (-1)^a\sigma$ gesetzt wird, die Zahl τ der Congruenz $\tau \equiv 1$ nach 4. Die Zahlen λ und $\sqrt{\tau}$ definiren stets einen cyklischen Körper L_λ'' vom Grade 2^λ. Denn im Falle $a = 0$ stimmt $L_\lambda'' = k(\lambda, \sqrt{\tau})$ mit L_λ' überein und im Falle $a = 1$ enthält der Körper L_λ'', da er imaginär ist, sicher noch andere Zahlen, als in $Z_{\lambda-1}$ vorhanden sind. Da $\frac{1-\sqrt{\tau}}{2}$ eine ganze Zahl ist, deren Partialdiskriminanten in Bezug auf $Z_{\lambda-1}$ zu 2 prim ausfällt, so ist die Partialdiskriminante des Körpers L_λ'' in Bezug auf $Z_{\lambda-1}$ prim zu 2. Es ist daher die Zahl 2 im Körper L_λ'' nicht gleich der 2^λten Potenz eines Primideals. Bezeichnet $\mathfrak{L}$ ein in $\mathfrak{l}$ enthaltenes Primideal des Körpers L_λ'', so muß der Trägheitskörper von $\mathfrak{L}$ in L_λ'' den zweiten Grad besitzen; dieser Trägheitskörper müßte daher gleich Z_1 sein, was nicht möglich ist, da die Diskriminante von Z_1 eine Potenz von 2 ist. Damit ist unsere ursprüngliche Annahme widerlegt, d. h. es ist bewiesen, daß die beiden Körper L_λ und Z_λ miteinander identisch sind.

Wir beweisen nunmehr den Kroneckerschen Fundamentalsatz in folgender Art. Zunächst ist leicht aus der Theorie der Abelschen Gruppen ersichtlich, daß ein jeder Abelscher Körper sich aus cyklischen Körpern L_λ zusammen setzen läßt, deren Grade die Potenzen l^λ einer Primzahl l sind; es ist daher nur nöthig,

zu zeigen, daß ein jeder solcher cyklischer Körper L_λ ein Kreiskörper ist. Infolge des Satzes 3 wird dieser Nachweis auf den Fall zurückgeführt, in welchem die Diskriminante des vorgelegten cyklischen Körpers L_λ keine Primzahlen p mit der Congruenzeigenschaft $p \equiv 1$ nach l^λ enthält. Ist L_λ ein cyklischer Körper dieser Art, so besitzt die Diskriminante des in L_λ enthaltenen Unterkörpers L_1 vom $l$ten Grade ebenfalls keine Primtheiler p mit der Congruenzeigenschaft $p \equiv 1$ nach l^λ. Wenden wir nun den Satz 4 an und berücksichtigen, daß nach einem von Minkowski[1]) bewiesenen Satze jede Diskriminante Primzahlen als Faktoren enthalten muß, so folgt, daß die Diskriminante des Körpers L_1 nothwendig eine positive Potenz von l ist.

Wir unterscheiden beim weiteren Beweise 2 Fälle, je nachdem $l = u$ eine ungerade Primzahl oder $l = 2$ ist. Im ersteren Falle ist nach Satz 5 der Körper $L_1 = U_1$. Bezeichnen wir ferner die in L_λ enthaltenen Unterkörper l^2ten, l^3ten, $\cdots$, $l^{\lambda-1}$ten Grades bezüglich mit L_2, L_3, $\cdots$, $L_{\lambda-1}$, so schließen wir aus eben demselben Satze 5 der Reihe nach $L_2 = U_2$, $L_3 = U_3$, $\cdots$, $L_\lambda = U_\lambda$ und folglich ist L_λ ein Kreiskörper. Im zweiten Falle bilden wir zunächst den aus dem imaginären quadratischen Körper $k(i)$ und aus L_λ zusammengesetzten Körper $M_{\lambda'} = k(i, L_\lambda)$; derselbe ist vom 2^λten oder $2^{\lambda+1}$ten Grade, jenachdem L_λ imaginär oder reell ausfällt. Der größte reelle Unterkörper dieses Körpers $M_{\lambda'}$ ist vom $2^\varkappa$ten Grade, wo $h' = h-1$ oder gleich h ist; derselbe ist nothwendig ein cyklischer Körper. Der in $M_{\lambda'}$ enthaltene quadratische Unterkörper M_1 ist ebenfalls reell und stimmt, da seine Diskriminante eine Potenz von 2 ist, mit $Z_1 = k(\sqrt{2})$ überein. Bezeichnen wir nun die in M_λ, enthaltenen Unterkörper 2^2ten, 2^3ten, $\cdots$ Grades bezüglich mit M_2, M_3, $\cdots$, so folgt nach Satz 6 der Reihe nach $M_2 = Z_2$, $M_3 = Z_3$, $\cdots$, $M_{\lambda'} = Z_{\lambda'}$ und folglich ist $M_{\lambda'}$ ebenfalls ein Kreiskörper. Damit ist der Fundamentalsatz vollständig bewiesen und zugleich ist ersichtlich, in welcher Weise man alle Abelschen Körper von gegebener Gruppe und Diskriminante aufstellen kann.

Göttingen, den 25. Januar 1896.

---

1) Journal für Mathematik Bd. 107 S. 295.

Ein Brief von Gauss an Gerling.

Von

Paul Stäckel in Königsberg i. Pr.

Vorgelegt in der Sitzung am 25. Januar 1896 von D. Hilbert.

Am 31. October 1851 schrieb Gerling an Wolfgang Bolyai: „Wir hatten gegen diese Zeit [1819] hier [in Marburg] einen juristischen Professor Schweikart, welcher ehemals in Charkow gewesen war, und auf ähnliche Ideen gekommen war [wie Johann Bolyai], indem er ohne Hilfe des euklidischen Axiomes eine Geometrie, die er Astralgeometrie nannte, in ihren Anfängen entwickelte. Was er mir darüber mittheilte, schickte ich Gauss, der dann mittheilte, wieviel weiter man schon auf diesem Wege gekommen und später auch sich über den großen Gewinn erklärte, der in dem Appendix zu ihrem Buche den wenigen Sachkennern dargeboten ist“ (vgl. Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, Leipzig 1895. S. 244.).

Diese Aeußerung Gerlings veranlaßte mich zu der Vermutung (a. a. O. S. 244), daß „der noch nicht veröffentlichte Briefwechsel zwischen Gauss und Gerling wertvolle Aufschlüsse über die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie enthalten müsse“. Inzwischen ist es mir gelungen, Einsicht in einen Brief von Gauss an Gerling vom 4. Februar 1844 zu erhalten, der meine Vermutung in vollem Maaße bestätigt. Dieser Brief ist Eigenthum der Frau Geheime Regierungsrath Schneider in Schleswig, der ich für ihre gütige Erlaubnis, ihn veröffentlichen zu dürfen, um so mehr zu Dank verpflichtet bin, als bis jetzt gerade über Gauss' Stellung in der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie sehr verschiedenartige Ansichten laut geworden sind.

Ein entscheidendes Urteil ermöglicht freilich auch der hier mitgeteilte Brief noch nicht. Immerhin scheint es bemerkenswert,

daß Gauss im Besitz aller, auch der *russisch* geschriebenen Abhandlungen Lobatschefskijs über imaginäre Geometrie gewesen ist. Es liegt zwar nahe zu vermuten, daß Lobatschefskij selbst seine Arbeiten an Gauss gesandt hat, man könnte jedoch auch annehmen, daß ein Dritter zwischen Kasan und Göttingen vermittelt hat, einer der vielen deutschen Mathematiker und Astronomen, die damals an russischen Hochschulen lehrten.

Vielleicht giebt meine Veröffentlichung den Anlaß, daß andere Fachgenossen dem Gegenstande ihre Aufmerksamkeit zuwenden. Nur durch eine solche Mitarbeit ist eine Aufklärung über diese schwierigen Fragen zu erhoffen.

Ich gebe nunmehr jenen Brief von Gauss an Gerling und bemerke nur noch vorweg, daß der Poststempel das Datum: 3. Februar 1844 trägt. Da der Brief augenscheinlich in großer Eile geschrieben ist — Inhalt und Handschrift bezeugen das —, so scheint mir ein Irrtum von Seite Gauss' wahrscheinlicher.

Zwiſchen Ihrem letzten Briefe mein theuerſter Freund und meiner Beantwortung, war einige Zeit verfloſſen, weil ſich nicht gleich Käſtners Compendium hatte auftreiben laſſen; dies hatte eine doppelte Folge, 1) daß ich ſobald ich das Nöthige um über π Auskunft zu geben erhalten hatte eilte, Ihnen ſolche zuzuſenden, und dabei Ihren Brief nicht ſelbſt wieder nachſah 2) daß mir bei Abſendung der Antwort der Inhalt Ihres Briefs nicht mehr ganz im Gedächtniß geweſen. So iſt es zugegangen, daß ich vergeſſen habe, einen andern Punkt Ihres Briefes zu beantworten, an den ich eben heute durch eine ganz zufällige Veranlaſſung wieder erinnert bin.

Der Titel des Buchs meines alten Univerſitätsfreundes Varkasch (i. e. Wolfgang) von Bolyai, Vater iſt wörtlich folgender.

Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiacque Publ. Ordinario Tomus primus. Mar[o]s Vásárhelyini 1832. Typis collegii Reformatorum per Josephum, et Simeonem Kali de felsö Vist. LXVII u. 502 Seiten 8vo Tomus secundus 1833. XVI u. 400 S. viele Kupfertafeln. Den Namen des Verfaſſers finde ich nicht angegeben.

Die eine, beim erſten Bande befindliche Appendix hat den Titel

Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura cir-

culi geometrica. Auctore Johanne Bolyai de eadem*) geometrarum in exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

Diese Appendix ist besonders paginirt (p. 1—26); da aber auf der Titelseite weder Ort noch Jahr angegeben ist, so präsumire ich, daß diese Schrift welche gerade die in Rede stehende ist nicht für sich, sondern nur als Anhang des Werkes des Vaters ins Publicum gekommen ist.

Uebrigens hat in den letzten Decennien ein Russe (Lobatschefski, Staatsrath u. Prof. in Kasan) einen ähnlichen Weg eingeschlagen. Er nennt die NichtEuklidische die imaginäre Geometrie (wie Ihr ehemaliger Kollege Astralgeometrie) und hat darüber in russischer Sprache viele sehr ausgedehnte Abhandlungen gegeben (meistens in den записки казанзкаго университета, Memoiren der Kasanschen Universität z. Theil auch in besondern Brochurn die ich, glaube ich alle besitze, aber ihre genauere Lectüre noch verschoben habe, bis ich mich einmahl mit Muße wieder in das Fach werfen kann, und das Lesen russischer Bücher mir noch geläufiger ist als jetzt. Irre ich nicht, so ist auch ein Aufsatz des p. Lobatschefsky, vielleicht eine Uebersetzung aus den записки in Crelles Journal, was ich aber in diesem Augenblicke nicht nachsehen kann.

Entschuldigen Sie die Eile meines heutigen Briefes mit dem Wunsche so schnell wie möglich gut zu machen, was meine Vergeßlichkeit in dem vorigen versäumt hatte.

Göttingen 4 Febr 1844

Stets der Ihrige
C. F. Gauß.

Den Kometen hatte ich am 15. Januar zuletzt beobachtet, und zwar gut; später habe ich ihn noch verschiedenemahle zuletzt 23 Januar gesehen, aber wegen seines äußerst schwachen Lichts von einer Beobachtung abstrahirt. Goldschmidts Elemente haben in einer dritten Edition eine unbedeutende Correction erlitten u. stellen nun die ganze Reihe der Beob. sehr gut dar.

---

*) of that ilk, wie es gewöhnlich bei Walter Scott heißt.

Bemerkungen des Herausgebers.

1. Kästners Kompendium sind die „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Perspective", deren erste Auflage Göttingen 1758 erschien. Auf S. 274—275 der mir zugänglichen 2. Auflage von 1764 findet man geschichtliche Bemerkungen über die Berechnung von π.

2. Die eine, beim ersten Bande befindliche Appendix. Da es im Titel heißt: cum Appendice triplici, so könnte man

hieraus schließen, daß Johann Bolyai's Appendix einer jener drei Anhänge sei. In Wahrheit finden sich jene drei Anhänge am Schlusse des zweiten Bandes, S. 265—322; sie enthalten der Reihe nach 1.) die Perspective, 2.) Die Gnomonik, 3.) Die Chronologie. Johann Bolyai's *Scientia spatii* scheint dem ersten Bande erst nachträglich angeheftet worden zu sein, denn es giebt, wie ich einer Mitteilung von Herrn Baumeister Franz Schmidt in Budapest entnehme, auch Exemplare des Tentamen ohne diese Appendix. Hiernach ist auch die ungenaue Angabe in der *Parallelentheorie* (S. 241) zu verbessern.

3. Lobatschefski. Daß Gauss Lobatschefskijs „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" (Berlin 1840) kannte, wußte man schon aus seinem Briefe an Schumacher vom 28. Nov. 1846.

Angeregt durch eine Bemerkung von Herrn F. Klein habe ich auch Nachforschungen darüber angestellt, wer das Erscheinen der „Geometrischen Untersuchungen" vom Jahre 1840 in Berlin vermittelt hat. Leider jedoch bis jetzt ohne Erfolg; die Verlagsbuchhandlung G. Fincke (nicht G. Funcke, wie Gauss 1846 an Schumacher schreibt) ist inzwischen eingegangen.

Zu erwähnen ist auch noch, daß, wie mir Herr F. Klein mitzuteilen die Güte hatte, Gauss am 23. November 1842 „den kaiserlich russischen Staatsrath Nicolaus Lobatschefski, einen der ausgezeichnetsten Mathematiker des russischen Reiches", zum Mitgliede der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgeschlagen hatte.

4. Crelle's Journal. Gemeint ist die Géométrie imaginaire, Bd. 17, S. 581—613 (Berlin 1837), die in der That eine Bearbeitung und teilweise Uebersetzung der Abhandlung Воображаемая геометрія (Imaginäre Geometrie) (Kasan 1835) ist.

5. Wie Ihr ehemaliger Kollege Astralgeometrie. Gemeint ist F. K. Schweikart, dessen Name Gauss im Augenblicke nicht erinnerlich gewesen sein muß; vgl. den Abschnitt Schweikart und Taurinus, a. a. O. S. 237—286.

6. Den Kometen. Es handelt sich um den bekannten, von Faye im Jahre 1843 entdeckten periodischen Kometen. Ueber seine Beobachtungen hat Gauss im Jahrgange 1844 der Astronomischen Nachrichten berichtet, wo auch Goldschmidt die drei „Editionen" seiner elliptischen Elemente (S. 221, 238, 281) veröffentlicht hat.

Continuierliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene.

Von

G. Bohlmann.

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Januar 1896 von F. Klein.)

Die Theorie derjenigen Gruppen, deren endliche Gleichungen algebraisch in den Variabeln sind, und deren Begründung in erster Linie Picard zu danken ist, ist bereits bis zu einem hohen Grade und in großer Allgemeinheit entwickelt worden. Diese Note beschäftigt sich nur mit einem sehr speciellen Falle jener Theorie, nämlich mit dem Probleme alle endlichen continuierlichen Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene aufzustellen. Die quadratischen Transformationen sind die einfachsten nach den projectiven. Im Gegensatz zu diesen bildet aber ihre Gesamtheit keine endliche continuierliche Gruppe im Lie'schen Sinne und daher entsteht die eben gestellte Frage. Die Theorie der quadratischen Transformationen in Verbindung mit Lie's allgemeiner Theorie der endlichen continuierlichen Gruppen liefert nun unmittelbar die Mittel jene Gruppen wirklich hinzuschreiben und es empfiehlt sich vielleicht um so eher dies wirklich zu thun, als gerade bei den quadratischen Transformationen die endlichen discontinuierlichen Gruppen bereits sehr ausführlich — zumal von S. Kantor und Autonne — behandelt worden sind und hiezu die — ungleich leichtere — Aufstellung der endlichen continuierlichen Gruppen als Ergänzung angesehen werden kann. Die Nummern 1. bis 3. dieser Note enthalten eine Recapitulation derjenigen Sätze aus der Theorie der quadratischen Transformationen, welche zur Bestimmung der fraglichen Gruppen benutzt wurden. Die geometrischen Sätze sind durch diejenigen analytischen Formeln begleitet, welche eine vollständige Durchrechnung der hier gegebenen Resultate ermöglichen.

Die Nummern 4.—6. geben die Bestimmung der verlangten Gruppen.

I. Quadratische Transformationen überhaupt.

Bestimmt man die Punkte einer Ebene (x) durch homogene Coordinaten $x_1 : x_2 : x_3$, so wird eine quadratische Transformation dieser Ebene (x) in eine neue (x') durch die Gleichungen definiert:

$$(1) \qquad \sum_{i,\varkappa} a_{i\varkappa} x_i x'_\varkappa = 0, \quad \sum_{i,\varkappa} b_{i\varkappa} x_i x'_\varkappa = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3).$$

sobald weder in der Matrix:

$$(2) \qquad \| \sum_i a_{i\varkappa} x_i, \ \sum_i b_{i\varkappa} x_i \| \ (\varkappa = 1, 2, 3)$$

noch in der Matrix:

$$(2') \qquad \| \sum_\varkappa a_{i\varkappa} x'_\varkappa, \ \sum_\varkappa b_{i\varkappa} x'_\varkappa \| \ (i = 1, 2, 3)$$

alle Determinanten zweiter Ordnung identisch für beliebige Variable x, x' verschwinden. Nehmen wir dies ein für alle Male an, so existieren sowohl in der Ebene (x) als in der Ebene (x') Punkte, für welche nicht alle Determinanten zweiter Ordnung der Matrix (2) bezw. (2') verschwinden und jeder solche Punkt heißt ein Nichtfundamentalpunkt der Ebene (x) bezw. (x'). Ihr contradictorisches Gegenteil bilden die Fundamentalpunkte der Ebene (x) bezw. (x').

Ist — wie weiter angenommen werden soll — die durch (1) definierte Transformation wirklich eine quadratische und artet sie nicht etwa in eine projective aus, so ist die Anzahl der Fundamentalpunkte in beiden Ebenen eine endliche und zwar entweder in beiden Ebenen gleich 3 oder in beiden Ebenen gleich 2. Hierdurch teilen sich die quadratischen Transformationen in zwei distincte Klassen: solche mit 3 und solche mit 2 Fundamentalpunkten.

Die Transformation (1) definiert in bekannter Weise den oder die Punkte (x), welche einem gegebenen Punkte (x') 'entsprechen'. Ist (x') ein Nichtfundamentalpunkt, so 'entspricht' ihm ein und nur ein Punkt, welcher auch durch die Gleichungen:

$$(3) \qquad x_i = \sum_\varkappa a_{i+1,\varkappa} x'_\varkappa \cdot \sum_\varkappa b_{i+2,\varkappa} x'_\varkappa - \sum_\varkappa a_{i+2,\varkappa} x'_\varkappa \sum_\varkappa b_{i+1,\varkappa} x'_\varkappa$$

definiert werden kann. Die Indices in diesen Gleichungen sind modulo 3. zu lesen. Ihre Gültigkeit bleibt auf Nichtfundamentalpunkte (x') beschränkt. Trotzdem darf man als die einer Curve m^{ter} Ordnung C_m der Ebene (x):

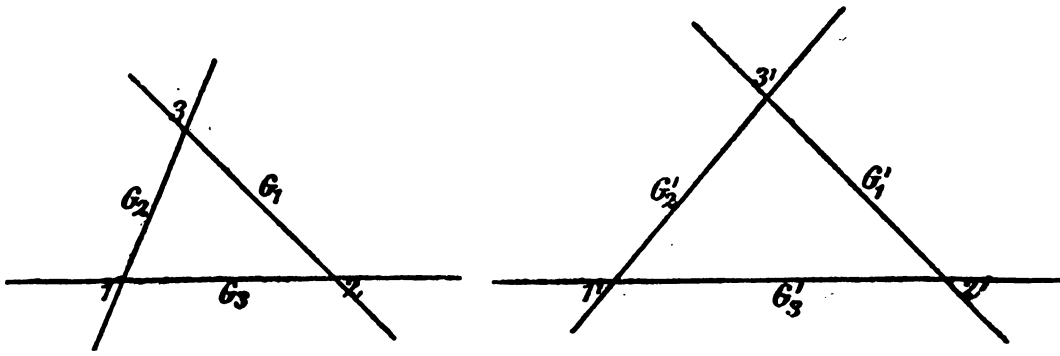
$$F(x_1 x_2 x_3)_m = 0$$

in der Ebene (x') entsprechende Curve diejenige C'_{2m} definieren, welche entsteht, wenn man aus (3) die Werte der x als Functionen der x' in F einsetzt.

Von jetzt an mögen die quadratischen Transformationen mit 3 Fundamentalpunkten und solche mit 2 getrennt betrachtet werden.

2. Quadratische Transformationen mit 3 Fundamentalpunkten.

Die Figur zeigt Fundamentalpunkte und Fundamentalgeraden in beiden Ebenen, welche sich in bekannter Weise entsprechen und in jeder Ebene ein wirkliches Dreieck bilden.



Algebraisch wird die Transformation durch die zwei Gleichungen:

(1a) $$G_1(x) \cdot G'_1(x') = G_2(x) \cdot G'_2(x') = G_3(x) \cdot G'_3(x')$$

in voller Allgemeinheit definiert, während die Gleichungen:

(3a) $$G_i(x) = G'_{i+1}(x') \cdot G'_{i+2}(x')$$

nur für Nicht-Fundamentalpunkte (x') gelten. G_1, G_2, G_3 einerseits, sowie G'_1, G'_2, G'_3 andrerseits sind irgend drei lineare Formen mit nicht verschwindender Determinante.

Von einer C_m sagt man, sie geht durch den Fundamentalpunkt i gerade k_i mal, wenn ihre linke Seite sich schreiben läßt:

$$F(x_1 x_2 x_3)_m = \varphi_{k_i}(G_{i+1}, G_{i+2}) \cdot G_i^{m-k_i} + \cdots + \varphi_m(G_{i+1}, G_{i+2})$$

und wenn φ_{k_i} nicht identisch Null ist. Enthält die C_m keine Fundamentalgeraden, so ist auch φ_m nicht identisch Null. Mit Hülfe der Bemerkung in No. 1 über das Entsprechen von Curven erhält man nun die der C_m entsprechende C'_{2m} einfach durch Substitution

der x an Stelle der x' mit Hülfe der Gleichungen (3a) und gelangt so in bekannter Weise zu dem bekannten Satze:

Einer C_m, welche keine Fundamentalgeraden enthält und durch den Fundamentalpunkt i gerade k_i mal hindurchgeht, entspricht eine C'_{2m}, welche die Gerade G'_i gerade k_i mal und außerdem noch eine $C'_{m'}$ enthält, die ihrerseits keine Fundamentalgerade mehr enthält und durch den Fundamentalpunkt i' gerade k'_i mal hindurchgeht. Dabei ist:

$$(4) \qquad m' = 2m - k_1 - k_2 - k_3, \quad k'_i = m - k_{i+1} - k_{i+2}.$$

Wir schlagen die Bezeichnungsweise vor:

'Die $C'_{m'}$ ist das Bild der C_m'

und bemerken, daß dieselbe nur für Curven definiert ist, welche keine Fundamentalgerade enthalten. Der Begriff des Bildes ist umkehrbar; d. h.:

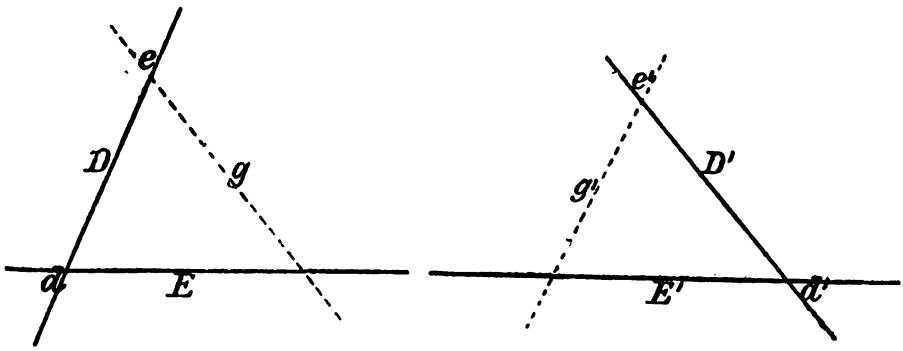
'Ist die $C'_{m'}$ das Bild der C_m, so ist auch die C_m das Bild der $C'_{m'}$.

Wir heben weiter hervor: Enthält eine C_m keine Fundamentalgerade, aber eine C_n, so enthält das Bild $C'_{m'}$ der C_m das Bild $C'_{n'}$ der C_n.

Hieraus ist abzunehmen, daß das Bild einer reduciblen C_m ohne Fundamentalgeraden eine ebensolche $C'_{m'}$ ist. Also ist auch das Bild einer irreduciblen Curve wieder eine irreducible Curve.

3. Quadratische Transformationen mit 2 Fundamentalpunkten.

Hier sind die Fundamentalfiguren, welche sogleich erläutert werden sollen, diese:



Analytisch wird eine quadratische Transformation mit 2 Fundamentalpunkten definiert durch zwei Gleichungen:

$$(1b) \quad g(x) \cdot D'(x') = g'(x') \cdot D(x), \quad D(x) D'(x') = E(x) E'(x'),$$

in welchen $D(x)$, $E(x)$, $g(x)$ einerseits, sowie $D'(x')$, $E'(x')$, $g'(x')$ andrerseits drei lineare Formen der x bezw. x' mit nicht verschwindender Determinante bedeuten. In der Ebene (x) bestimmen $D(x) = 0$, $E(x) = 0$, $g(x) = 0$ drei ein wirkliches Dreieck bildende Gerade D, E, g, von denen die beiden ersten Fundamentalgerade und zwar D die Doppelfundamentalgerade, E die einfache Fundamentalgerade heißt. g heiße Hülfsgerade. D und E schneiden sich im Doppelfundamentalpunkte d, E und g im einfachen Fundamentalpunkte e. Accente ergeben die analogen Definitionen für die Ebene (x').

Um die Verwandlungen einer C_m zu bestimmen, setzen wir voraus:

Es sei eine C_m gegeben mit folgenden Eigenschaften:

1. Sie enthält weder eine Fundamental-, noch eine Hülfsgerade.
2. Sie geht e mal durch den einfachen Fundamentalpunkt e.
3. Sie geht d mal durch den doppelten Fundamentalpunkt d, sodaß ihre linke Seite die Gestalt hat:

$$F(x_1 x_2 x_3)_m = \varphi_d(D, E) \cdot g^{m-d} + \cdots + \varphi_m(D, E),$$

wo weder φ_d noch φ_m identisch verschwinden.

Wir setzen nun endlich noch voraus, daß die Formen:

$$\varphi_d(D, E), \quad \varphi_{d+1}(D, E) \cdot E, \cdots \varphi_m(D, E) \cdot E^{m-d}$$

wohl E^ε, aber nicht mehr $E^{\varepsilon+1}$ als allen gemeinsamen Teiler besitzen. Diese vierte Annahme wollen wir kurz so formulieren:

4. Das Verhalten der C_m zur Geraden E im Punkte d ist durch die Zahl ε charakterisiert.

Unter diesen 4 Bedingungen gilt der Satz:

'Der C_m entspricht eine C'_{2m}, welche die Hülfsgerade g' gar nicht, die Doppelfundamentalgerade D' genau $d+\varepsilon$ mal, die einfache Fundamentalgerade E' genau e mal und außerdem noch eine $C'_{m'}$ enthält. Letztere ist von der Ordnung m', enthält keine Fundamentalgerade mehr, geht durch den Doppelfundamentalpunkt d' genau d', durch den einfachen Fundamentalpunkt e' genau e' mal und ihr Verhalten zur Geraden D' ist durch die Zahl e' charakterisiert. Dabei ist:

(5) $m' = 2m-d-e-\varepsilon$, $d' = m-e-\varepsilon$, $e' = m-d-\varepsilon$, $\varepsilon' = m-d-e$

zu setzen'.

Wie im vorigen Paragraphen, so werde auch hier die $C'_{m'}$ als das Bild der C_m bezeichnet. Dann gelten auch hier die analogen Betrachtungen und im besonderen der Satz, daß die C_m und die $C'_{m'}$ gleichzeitig reducibel oder irreducibel sind.

Als specieller Fall dieser allgemeinen Sätze werde der hervorgehoben, daß das Bild eines von D und E verschiedenen Strahles, welcher durch d geht, wieder ein von D' und E' verschiedener Strahl ist, der durch d' geht.

4. Continuierliche Gruppen von quadratischen Transformationen überhaupt.

Es seien:

$$x_i' = f_i(x_1 x_2 x_3)_2 \tag{6}$$

die Gleichungen einer quadratischen Transformation T, welche einer continuierlichen Gruppe G von quadratischen Transformationen angehört. Es seien:

$$x_i'' = f_i'(x_1' x_2' x_3')_2 \tag{7}$$

die Gleichungen einer zweiten quadratischen Transformation T' derselben Gruppe G. Die Transformation T' definiert ein Entsprechen der Punkte einer Ebene (x'') und der einer Ebene (x') in der oben ausgeführten Weise. Die Fundamentalpunkte dieser Transformation T' in (x'') seien typisch durch (p''), die in der Ebene (x') typisch durch (p') bezeichnet. Ebenso bewirkt die Transformation T ein Entsprechen von der Ebene (x') und einer neuen (x). Ihre Fundamentalpunkte in (x') seien (q'), die in (x) seien (q).

Führt man erst die Transformation T', dann T aus, so entsteht eine Transformation 4^{ten} Grades T'', welche die Gestalt hat:

$$x_i'' = f_i'(f_1(x), f_2(x), f_3(x)).$$

Damit nun T' und T derselben Gruppe G angehören ist notwendig und hinreichend, daß ihr auch T'' angehört, also muß aus den rechten Seiten ein gemeinsamer Teiler 2^{ten} Grades heraustreten:

$$f_i'(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = F(x_1 x_2 x_3)_2 \cdot f_i''(x_1 x_2 x_3)_2.$$

Versteht man demnach unter u_i unbestimmte Coefficienten, so muß vermöge (6)

$$\sum_i u_i f_i'(x_1' x_2' x_3') = F \cdot \sum_i u_i f_i''(x_1 x_2 x_3)$$

werden und zwar für beliebige Variable u, x. Da weder die f_i' für beliebige Variable x' noch die f_i'' für beliebige Variable x einen allen 3 Formen f_i' bezw. f_i'' gemeinsamen von den x' bezw. x abhangenden Teiler besitzen können, so giebt es Werte u, für welche sowohl die linke Seite, gleich Null gesetzt, einen irreduciblen Kegelschnitt der Ebene (x'), als auch auf der rechten Seite der zweite Factor,

gleich Null gesetzt, einen irreduciblen Kegelschnitt der Ebene (x) darstellt. Solche Werte u mögen 'allgemeine Werte' heißen und angenommen werden, daß für die u ein solches allgemeines Wertsystem gewählt ist. Dann ist:

$$\sum u_i f_i'(x_1' x_2' x_3') = 0$$

ein irreducibler Kegelschnitt C_2' eines Netzes von ∞^2 Kegelschnitten, welches durch die Punkte (p') hindurchgeht und die Frage ist einfach die, wie derselbe zu den Fundamentalpunkten (q') der Transformation T liegen muß, damit er wieder in einen irreduciblen Kegelschnitt:

$$\sum u_i f_i'(x_1 x_2 x_3) = 0$$

'abgebildet' wird, der seinerseits wieder einem Netze von ∞^2 Kegelschnitten C_2 durch die Punkte (q) angehört.

Wir denken uns jetzt T' als eine feste Transformation der Gruppe, sodaß auch die Punkte (p') festliegen. Hingegen wählen wir als Transformation T die allgemeine Transformation T_a der Gruppe G:

$$x_i' = f_i(x_1 x_2 x_3;\ a_1 \cdots a_r),$$

indem wir die Parameter a als unabhängige Variable betrachten.

5. Continuierliche Gruppen mit drei Fundamentalpunkten.

Es seien für eine feste Wahl der a, für welche T_a drei Fundamentalpunkte besitzt, die Fundamentalpunkte von T_a in (x') die Punkte (q_1'), (q_2'), (q_3') und die Fundamentalpunkte von T_a in (x) die Punkte (q_1), (q_2), (q_3). Die irreducible C_2':

$$\sum u_i f_i'(x_1' x_2' x_3') = 0$$

gehe k_i' mal durch den Fundamentalpunkt (q_i'). Das Bild der C_2', welches T_a in der Ebene (x) hervorruft, ist nach dem Vorigen eine irreducible C_m vom Grade:

$$m = 4 - k_1' - k_2' - k_3'.$$

Soll also $m = 2$ sein, so folgt:

$$k_1' + k_2' + k_3' = 2.$$

Also ist, da $k_i' < 2$ sein muß, die einzige Möglichkeit die, daß zwei der Zahlen k' gleich 1 sind, während die dritte verschwindet. Wir können etwa annehmen:

$$k_1' = 0,\ k_2' = 1,\ k_3' = 1.$$

Jeder irreducible Kegelschnitt C_2' des Netzes geht also 1 mal durch (q_2'), 1 mal durch (q_3') nicht durch (q_1') und sein Bild bei Anwendung der Transformation T_a ist in (x) ein irreducibler Kegelschnitt C_2, welcher 1 mal durch q_2, 1 mal durch q_3, nicht durch (q_1) geht. Nun geht aber jeder der ∞^2 Kegelschnitte des Netzes:

$$\sum u_i f_i'(x_1' x_2' x_3') = 0$$

auch durch die Punkte (p), deren Anzahl mindestens 2 ist. Also fallen zwei der Punkte (p') (und nicht mehr) mit (q_2') und (q_3') zusammen; zwei der Punkte (q') haben also eine feste, d. h. von den Parametern a der Transformation T_a unabhängige Lage; (q_2') falle in den festen Punkt (b), (q_3') in den festen Punkt (c) hinein. Die Fundamentalpunkte (q_2), (q_3) der inversen Transformation $T_{a'} = T_a^{-1}$ fallen ebenfalls nach (b) und (c). Bringen wir mithin die Ebene (x) mit der Ebene (x') zur Deckung, so daß Punkte mit gleichen Coordinaten zusammenfallen, so wird die Schar aller ∞^2 Kegelschnitte, welche durch die zwei festen Punkte (b), (c) gehen, in sich übergeführt.

Legen wir die zwei Punkte (b), (c) in die Kreispunkte der Ebene, so entsteht eine Gruppe von Transformationen, welche die Schar aller ∞^2 Kreise der Ebene in sich überführen: d. i. die Gruppe der Kreisverwandschaft oder eine ihrer Untergruppen. Die endlichen Gleichungen der Gruppe erhalten ihre einfachste Gestalt durch Uebergang zu Cartesischen Coordinaten und Einführung von Minimalcoordinaten (x, y). Dann wird:

$$(8) \qquad x' = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\gamma_1 x + \delta_1}, \quad y' = \frac{\alpha_2 y + \beta_2}{\gamma_2 y + \delta_2}$$

bei willkürlichen Parametern $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ die wohlbekannte 6 gliedrige Gruppe der Kreisverwandschaften. Unsere gesuchten Gruppen G sind also, soweit ihre allgemeine Transformation 3 Fundamentalpunkte besitzt, vermöge einer projectiven Variabelnänderung mit dieser 6 gliedrigen Gruppe oder einer ihrer wohlbekannten Untergruppen ähnlich.

6. Continuierliche Gruppen mit 2 Fundamentalpunkten.

Es sei jetzt die allgemeine Transformation T_a der Gruppe G nur mit 2 Fundamentalpunkten behaftet; d' ihr Doppelfundamentalpunkt, e' ihr einfacher Fundamentalpunkt in (x') und es gelte

die analoge Bezeichnung in (x). Ist eine irreducible C_2' in der in No. 3 genannten Weise durch die Zahlen d', e', ε' charakterisiert, so ist ihr Bild eine irreducible C_m, wo

$$m = 4 - d' - e' - \varepsilon'$$

ist. Soll also $m = 2$ sein, so folgt:

$$d' + e' + \varepsilon' = 2$$

und wieder kann keine der Zahlen d', e', ε' größer als 1 sein. Da nach No. 3 auch d' nicht Null sein kann, so ist es gleich 1 und es bleiben die zwei Fälle:

a) $d' = 1$, $e' = 1$, $\varepsilon' = 0$; b) $d' = 1$, $e' = 0$, $\varepsilon' = 1$.

Der Fall a) ist ganz so zu behandeln, wie der in No. 5. Man erkennt wie dort, daß d' und e' eine feste, von der Wahl der Parameter a unabhängige Lage haben und schließt hieraus, daß die vorliegende Gruppe eine Untergruppe der allgemeinen Gruppe in No. 5 ist. In der That lehrt die Rechnung, daß in den Gleichungen (8) einfach $\gamma_1 = 0$ und also x' eine ganze, lineare Function von x wird.

Etwas Neues liefert dagegen der Fall b). Man bemerke zunächst, daß ein irreducibler Kegelschnitt C_2', der durch d' geht und E' berührt, aber nicht durch e' geht, wieder zum Bilde hat einen irreduciblen Kegelschnitt C_2, der durch d geht und E berührt, aber nicht durch e geht und schließe hieraus wieder wie in No. 5, daß sowohl der Doppelfundamentalpunkt d' als die einfache Fundamentalgerade E' eine von den Werten a der Parameter der Transformation T_a unabhängige Lage haben und ferner, daß d' mit d, und E' mit E zusammenfällt, wenn beide Ebenen (x') und (x) in der alten Weise zur Deckung gebracht werden. Es sei

$$l(x) = 0$$

die Gleichung der Geraden E, ferner der Schnittpunkt von:

$$m(x) = 0, \quad l(x) = 0$$

der Doppelfundamentalpunkt d. Endlich $n(x)$ eine dritte lineare Form der x, welche mit den beiden anderen ein System von Formen bildet, dessen Determinante nicht verschwindet und deren Coefficienten von den Parametern a unabhängig sind. Dann schließt man aus dem eben Gesagten und den Gleichungen (1 b) einer qua-

dratischen Transformation mit 2 Fundamentalpunkten, daß die Gleichungen unserer Gruppe die Gestalt haben:

$$
\begin{aligned}
l(x') &= \{\gamma_4 l(x) + \gamma_3 m(x)\}^2 \\
(9) \quad m(x') &= \{\gamma_4 l(x) + \gamma_3 m(x)\}\ \{\gamma_2 \cdot l(x) + \gamma_1 m(x)\} \\
n(x') &= \alpha_0 l(x) n(x) + \beta_0 l(x)^2 + \beta_1 l(x) m(x) + \beta_2 m(x)^2,
\end{aligned}
$$

wo die griechischen Buchstaben Functionen der Parameter a sind. Schon wenn diese willkürliche Variable sind, stellen die Gleichungen (9) eine continuierliche Gruppe dar. Also ist jede der jetzt gesuchten Gruppen eine Untergruppe von dieser.

Die Gleichungen erhalten ihre einfachste Gestalt, wenn vermöge:

$$
(10) \qquad x = \frac{m(x_1 x_2 x_3)}{l(x_1 x_2 x_3)}, \quad y = \frac{n(x_1 x_2 x_3)}{l(x_1 x_2 x_3)}
$$

rechtwinklige Coordinaten eingeführt werden.

Wir fassen alles in dem Resultate zusammen:

Es giebt 2 Arten continuierlicher Gruppen von quadratischen Transformationen-Ebene. Die endlichen Gleichungen der einen sind:

$$
(8) \qquad x' = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\gamma_1 x + \delta_1}, \quad y' = \frac{\alpha_2 y + \beta_2}{\gamma_2 y + \delta_2}.
$$

Sie können als die 6gliedrige Gruppe aller Kreisverwandschaften gedeutet werden und lassen 2 Scharen von ∞^1 Curven — die beiden Scharen von Minimalgeraden — invariant. Die endlichen Gleichungen der anderen Art sind:

$$
(11) \qquad x' = \frac{\gamma_1 x + \gamma_2}{\gamma_3 x + \gamma_4}, \quad y' = \frac{\alpha_0 \cdot y + (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)}{(\gamma_3 x + \gamma_4)^2}.
$$

Sie stellen eine 7gliedrige Gruppe dar, welche eine Schar von ∞^1 Curven — die Schar aller Parallelen zur y Achse — invariant läßt. Die Untergruppen jeder von diesen Gruppen lassen sich nach Lie's Theorien sofort hinschreiben. Jede endliche continuierliche Gruppe von quadratischen Transformationen der Ebene ist vermöge einer projectiven Coordinatentransformation mit einer dieser 2 Gruppen oder einer ihrer Untergruppen ähnlich.

Hierzu möge noch bemerkt werden, daß die infinitesimalen Transformationen der ersten Gruppe diese sind:

$$\boxed{p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ y^2q}$$

Hingegen sind die der zweiten:

$$\boxed{q,\ xq,\ x^2q,\ yq;\ p,\ xp;\ x^2p+2xyq}$$

Beide Gruppen sind auch Typen in Lie's allgemeiner Tafel aller endlichen continuierlichen Gruppen der Ebene.

Göttingen, Januar 1896.

Ueber die Darstellung endlicher Gruppen durch Cayley'sche Farbendiagramme.

Von

H. Maschke in Chicago.

Vorgelegt in der Sitzung am 25. Januar 1896 von F. Klein.

In einer demnächst im American Journal erscheinenden Arbeit: „The representation of finite groups, especially of the rotation-groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space by Cayley's colour-diagrams" habe ich eine Reihe von Untersuchungen angestellt, deren Hauptresultate im Folgenden mitgetheilt werden sollen.

Was zunächst Cayley's Methode[1]) anbetrifft, so kann dieselbe in Kürze folgendermaßen auseinandergesetzt werden. Ist eine Gruppe von der Ordnung N gegeben, so representire man die N Objecte, welche durch Anwendung der N Operationen der Gruppe aus einem Object O hervorgehen, durch N Punkte; vorausgesetzt ist hierbei, was stets bei der Wahl von O durch Vermeidung specieller Annahmen erreicht werden kann, daß die N resultirenden Objecte, und demnach die N dieselben representirenden Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_N$ alle von einander verschieden sind. Sind nun $S, R, B, \ldots$ erzeugende Operationen der Gruppe, so wird z. B. S jeden der N Punkte in einen anderen überführen. Wir representiren nun S durch schwarze Linien, welche jeden der N Punkte mit demjenigen verbinden, in welchen derselbe durch S übergeführt wird, und bezeichnen den Sinn dieser Ueberführung durch einen der Linie beigesetzten Pfeil. In gleicher Weise representiren wir R durch rothe, B durch blaue Linien, etc. Hat eine Operation die Periode 2, so ist jede der entsprechenden Linien mit zwei entgegengesetzten Pfeilen zu versehen, welche dann der Einfachheit wegen beide weggelassen werden.

---

1) Cayley: The theory of groups; graphical representation. American Journal, Bd. I, p. 174 und: On the theory of groups. American Journal, Bd. XI, p. 139.

Man erhält in dieser Weise eine sogenannte Farbengruppe. Dieselbe hat folgende, sie definirende, Eigenschaften:

1) *Von* und *nach* jedem der N Punkte führt eine und nur eine Linie von jeder Farbe. Demgemäß definirt jede Operation $S^\alpha R^\beta B^\gamma \ldots$ eindeutig eine bestimmte Route, die von irgend einem Punkte a_i als Ausgangspunkt einzuschlagen ist.

2) Jede durch ein Symbol von der Form $S^\alpha R^\mu B^\nu \ldots$ definirte Route, welche von *einem* Punkte zu demselben Punkte zurückführt, führt von *jedem* Punkte a_i wiederum zu demselben Punkte a_i zurück. Demgemäß giebt der Endpunkt a_k der von einem Punkte a_i aus eingeschlagenen Route $S^\alpha R^\beta B^\gamma \ldots$ den Effect der Operation $S^\alpha R^\beta B^\gamma \ldots$ auf a_i an.

Die Farbendiagramme der Rotationsgruppen der regulären Körper erhalte ich nun auf folgende Weise:

1) Man stumpfe die Endpunkte sämmtlicher 5 regulären Körper ab, wodurch Polygone an Stelle der Ecken treten, wähle als Seiten dieser Polygone schwarze Linien, während die übrig gebliebenen Seiten des ursprünglichen regulären Polyeders durch rothe Linien bezeichnet werden mögen. Die rothen Linien erhalten keinen Pfeil; die durch sie representirte Rotation von der Periode 2 soll mit R_2 bezeichnet werden. Die schwarzen Linien werden derart mit Pfeilen versehen, daß jedes Polygon, von außen betrachtet, in der Richtung der Pfeile in demselben Sinne umlaufen wird. Die durch die schwarzen Linien dargestellte Operation werde durch S_i bezeichnet, wo i die Periode von S_i (Anzahl der Seiten der schwarzen Polygone) angiebt.

Die so entstehenden Diagramme sind Farbengruppen, und repräsentiren

für das Tetraeder die aus einer S_3 und einer R_2 erzeugte Tetraedergruppe, (1)

für den Würfel eine aus einer S_3 und einer R_2 erzeugte Octaedergruppe, (2)

für das Octaeder eine aus einer S_4 und einer R_2 erzeugte Octaedergruppe, (3)

für das Ikosaeder eine aus einer S_5 und einer R_2 erzeugte Ikosaedergruppe, (4)

für das Dodekaeder eine aus einer S_3 und einer R_2 erzeugte Ikosaedergruppe. (5)

2) Man schneide sämmtliche 5 regulären Körper längs ihrer

Kanten auf, und ziehe die so erhaltenen Polygone ein wenig auseinander, sodaß aus jeder ursprünglichen Polyederkante jetzt zwei parallele Polygonseiten geworden sind. Diese Seiten bezeichne man sämmtlich durch rothe Linien. Die Eckpunkte der Polygone, welche symmetrisch um einen ursprünglichen Polyedereckpunkt herumgruppirt sind, verbinde man durch schwarze Linien. Die so erhaltene Figur kann man sich auch durch Abstumpfung von Kanten und Ecken der ursprünglichen Polyeder entstanden denken. Die Richtung der Pfeile für die rothen und schwarzen Linien setze man nun in der Weise fort, daß, von außen gesehen, alle rothen Polygone in gleicher Richtung von den Pfeilen umlaufen werden, und ebenso alle schwarzen.

Die so entstehenden Diagramme sind wiederum Farbengruppen. Sie repräsentiren

für das Tetraeder eine aus einer S_3 und einer R_3 erzeugte Tetraedergruppe, (6)

für das Octaeder und Hexaeder eine aus einer S_3 und einer R_4 erzeugte Octaedergruppe, (7)

für das Ikosaeder und Dodekaeder eine aus einer S_3 und einer R_5 erzeugte Ikosaedergruppe. (8)

Die acht so erhaltenen räumlichen Diagramme lassen sich nun sämmtlich von einem Punkte aus, den man nur nahe genug über einer Seitenfläche des betreffenden Polyeders zu wählen hat, so auf eine Ebene projiciren, daß sich die projectirten Farbenlinien nirgends kreuzen.

Für den Fall des Dieders lassen sich unmittelbar zwei Farbengruppen in der Ebene angeben. Die erste besteht aus zwei concentrischen, entgegengesetzten regulären Polygonen von je n Seiten, welche durch schwarze Linien gegeben sein mögen, und aus den Verbindungslinien je zweier entsprechender Endpunkte, welche durch rothe Linien ohne Pfeil repräsentirt sind:

Diedergruppe aus einer S_n und einer R_2 (9)

Die zweite Farbengruppe ist einfach gegeben durch ein Polygon von $2n$ Seiten, welche abwechselnd aus schwarzen und rothen Linien bestehen, beide ohne Pfeile:

Diedergruppe aus einer S_2 und einer R_2. (10)

Die Eigenschaft, daß die Farbenlinien sich nirgends in der Ebene kreuzen, verleiht den genannten Farbengruppen (1)—(10) eine ganz besondere Uebersichtlichkeit, sodaß dieselben für viele Zwecke beim Studium der Rotationsgruppen den Modellen der regulären Körper vorzuziehen sind.

Es entsteht nun die Frage, ob außer den aufgeführten 10

Gruppen noch andere zweifarbige Farbengruppen existiren, die so beschaffen sind, daß sich ihre Farbenlinien nirgends kreuzen. Diese Frage läßt sich mittelst Ueberlegungen, die größten Theils der analysis situs entnommen sind, dahin entscheiden, daß außer diesen 10 Gruppen nur noch zwei andere von der genannten Eigenschaft existiren, nämlich:

1) Eine Gruppe von der Ordnung $2n$, deren Farbendiagramme sich von (9) nur dadurch unterscheidet, daß die beiden Polygone von n Seiten gleichgerichtet sind. (11) Die Operationen dieser Gruppe sind sämmtlich unter einander vertauschbar.
2) Eine Gruppe von der Ordnung 24, die sich von (2) nur dadurch unterscheidet, daß ihre 8 schwarzen Dreiecke abwechselnd entgegengesetzt gerichtet sind. (12) Diese Gruppe enthält die Tetraedergruppe als ausgezeichnete Untergruppe.

Durch Ausdehnung der Principien, welche zur Construction der angegebenen Farbengruppen geführt haben, erhält man neue Farbengruppen.

Entwerfen wir die Diagramme (1)—(5), sowie (9) und (10) in zwei parallelen Blättern als congruente übereinanderliegende Figuren und verbinden übereinander liegende Punkte durch blaue Linien von der Periode 2 (B_2), so stellen die resultirenden räumlichen Diagramme wiederum Farbengruppen dar. Setzt man hierbei insbesondere fest, daß die den schwarzen Linien beigegebenen Pfeile in beiden Blättern entgegengesetzt verlaufen sollen, so erhält man genau die sogenannten erweiterten[1]) Rotationsgruppen. Von den Gruppen die man erhält, wenn man die Pfeile gleichgerichtet in beiden Blättern verlaufen läßt, sei nur diejenige erwähnt, die auf die angegebene Weise aus der Tetraederfarbengruppe (1) resultirt. Diese Gruppe erweist sich als identisch mit der unter (12) aufgeführten.

Mit Bezug auf dreifarbige Gruppen in der Ebene, deren Farbenlinien sich nicht kreuzen, läßt sich beweisen, daß dieselben nur aus Farbenlinien von der Periode 2 bestehen können. Derartige Farbengruppen erhält man, wenn man an den regulären Körpern die Kanten abstumpft, und dann die Ecken so weit, daß an Stelle der ursprünglichen Ecken Polygone von doppelt so vielen Seiten erscheinen, als Kanten in den ursprünglichen Ecken zusammenliefen.

Die so erhaltenen Farbengruppen geben nun wiederum die er-

1) F. Klein. Ikosaeder, p. 23.

weiterten Rotationsgruppen der regulären Körper. Hierbei ist von besonderem Interesse das aus dem Tetraeder hervorgehende Diagramm. Von demselben läßt sich leicht zeigen, daß es als Farbengruppe mit der Octaedergruppe identisch ist. Hieraus folgt, daß die erweiterte Tetraedergruppe mit der Octaedergruppe holoedrisch isomorph ist.

Um weitere Farbengruppen zu erhalten, gehen wir von den Projectionen der regulären vierdimensionalen Körper in den dreidimensionalen Raum aus, wie sie durch die Schlegel-Brill'schen Modelle gegeben sind. Wir denken uns das 5-Zell, 8-Zell, 24-Zell und 120-Zell aus blauen Fäden construirt. In jedem Eckpunkt der 5-, 8- und 120-Zells laufen 4 Fäden zusammen. Einen jeden dieser Eckpunkte denken wir uns nun durch ein aus rothen Fäden construirtes Tetraeder ersetzt, sodaß die ursprünglich in einer Ecke zusammenlaufenden blauen Fäden nun an den 4 Ecken des substituirten Tetraeders befestigt sind. Ferner denken wir uns die Ecken dieser Tetraeder wiederum abgestumpft, und durch je ein Dreieck aus schwarzen Fäden ersetzt, sodaß ein jedes dieser abgestumpften Tetraeder eine unter (1) beschriebene Farbengruppe liefert. An Stelle der in den ursprünglichen Ecken der Tetraeder endenden einzelnen blauen Fäden haben wir nun je 3 blaue Fäden zu setzen. Genau der analoge Proceß wird an den Hexaedern des 24-Zells vollzogen.

Setzen wir nun fest, daß die rothen und blauen Fäden Operationen von der Periode 2, die schwarzen solche von der Periode 3 repräsentiren, wobei die Richtung der Pfeile so festgesetzt werden soll, daß sie die schwarzen Dreiecke sämmtlich im nämlichen Sinne umlaufen, wenn man die resp. abgestumpften Tetraeder oder Hexaeder von außen betrachtet, so stellen die so erhaltenen räumlichen Diagramme dreifarbige Gruppen von den Ordnungen 60, 192, 576 und 7200 dar. Diese Farbengruppen sind holoedrisch isomorph mit den Rotationsgruppen der entsprechenden regulären vierdimensionalen Körper.

Einer Ausdehnung der im Vorhergehenden angegebenen Methoden liegt für die Untersuchung bekannter, oder Aufsuchung neuer Gruppen nach den verschiedensten Richtungen ein weiter Spielraum offen. In Bezug auf die Diagramme, insbesondere deren Zuordnung zu den angegebenen Gruppen, sowie auf die Beweise, und überbaupt auf die näheren Ausführungen muß ich auf die Anfangs erwähnte Arbeit verweisen.

University of Chicago. 1. Jan. 1896.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen (III).

Von

O. Wallach.

Mit Tafel I.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Februar 1896.

1. Ueber ein neues Heptylamin.

Ungesättigte cyclische, primäre Basen spalten, wie ich an einer Reihe von Beispielen gezeigt habe, beim Erhitzen ihrer Chlorhydrate Salmiak ab und liefern Kohlenwasserstoffe. Bei gesättigten Basen konnte eine solche Reaction hingegen nicht erzielt werden. Es war nun zu untersuchen, ob sie unter besonders günstigen Umständen nicht doch eintreten würde. Solche würden unzweifelhaft gegeben sein, wenn das Amidradical in unmittelbarer Nähe tertiär an Kohlenstoff gebundener Wasserstoffatome steht. Um nun eine Verbindung zu erhalten, die diesen Bedingungen möglichst gut entspricht, habe ich vor einiger Zeit Hrn. Th. Whittelsey veranlaßt aus dem Biisopropylketon ein Heptylamin herzustellen. Das schon bekannte Biisopropylketoxim $C_3H_7C(NOH)C_3H_7$ wurde in alkoholischer Lösung mit Hülfe von Natrium reducirt, dabei entstand die flüssige Base

$$(CH_3)_2CH\,CH(NH_2)\,CH(CH_3)_2.$$

Die Verbindung siedet zwischen 135—140°, zieht sehr schnell Kohlensäure aus der Luft an und erstarrt dabei zu einem zwischen 104—105° schmelzenden Salz. Das Platinsalz schmilzt bei 213°, das in Nadeln krystallisirende Carbamid, $C_7H_{15}NH.CO\,NH_2$, bei 170°, das Chlorhydrat bei 243—244°. Die letztere Verbindung läßt sich bei gewöhnlichem Atmosphärendruck ohne jede Spur von Zersetzung destilliren. Obgleich der Bau der Verbindung der Entstehung von Heptylen sehr Vorschub leisten sollte, ist bei den gesättigten Basen der Fettreihe die Neigung

zur Ammoniakabspaltung augenscheinlich zu gering als daß die Zersetzung erfolgte.

2. Ueber Ketone aus Propenyl-Verbindungen.

Die in den Nachrichten d. G. 1895 S. 177 erwähnte Arbeit über die Ueberführung von Propenyl-Verbindungen in Ketone habe ich gemeinschaftlich mit Hrn. Pond fortgesetzt. Es hat sich herausgestellt, daß die durch Addition von Brom an das Propenyl-Radical entstehenden Bromide $R.CHBr\,CHBr\,CH_3$ bei der Behandlung mit Natrium-Methylat zunächst die ungesättigten Aether $R.C(O\,CH_3) = CH\,CH_3$ liefern, welche durch Wasserdampf verseift werden, während die so entstehenden ungesättigten Alkohole $R.C(OH):CH.CH_3$ nach der Erlenmeyer'schen Regel sich in Ketone $R.CO\,CH_2\,CH_3$ umwandeln. Der Beweis dafür, daß in den betreffenden Ketonen die Propionyl- und nicht die Acetyl-Gruppe enthalten ist, konnte dadurch geführt werden, daß es gelang aus jenen Ketonen mit Hülfe von conc. Schwefelsäure Propionsäure abzuspalten. Es ließ sich nun auch zeigen, daß die früher von Tönnis [1]) aus Anetholnitrit und von Angeli aus Biisonitrososafrol dargestellten Ketone mit den von uns gewonnenen Propionyl-Verbindungen identisch sind und daß ihnen nicht die von jenen Forschern angenommene Constitution zukommt.

Gelegentlich dieser Untersuchung wurde noch eine andere nicht uninteressante Beobachtung gemacht. Um die eben erwähnte Abspaltung von Propionsäure zu constatiren, war es z. Th. bequemer statt von den Ketonen selbst von den zugehörigen Oximen auszugehen. Das Oxim des Aethyl-Anisyl-Ketons

$$C_6H_4\begin{matrix}O\,CH_3\\ C(NOH)\,CH_2\,CH_3\end{matrix}$$

zeigte nun ein eigenthümliches und für den ersten Augenblick befremdliches Verhalten. Beim Erwärmen mit conc. Schwefelsäure spaltete es leicht Propionsäure ab, die durch Destillation mit Wasserdämpfen zu gewinnen war. Aus der rückständigen saueren Flüssigkeit, beziehungsweise beim Verdünnen des ursprünglichen Reactionsproducts mit etwa dem sechsfachen Volum Wasser schieden sich Krystalle einer Säure aus, welche sich durch wiederholtes Lösen in Ammoniak und wieder Ausfällen mit Schwefelsäure reinigen ließen. Die Verbindung zersetzte sich bei etwa 310° ohne zu schmelzen. Analyse und Eigenschaften der Verbindung führten zu der Erkenntniß, daß man es mit der Sulfosäure

1) Ber. chem. Ges. 20, 2982.

des Paraamidophenols $C_6H_3(OH)(NH_2)(SO_3H)$ zu thun habe, welche auch durch directes Sulfuriren von p. Amidophenol gewonnen werden kann. Ein Vergleich der auf verschiedenem Wege gewonnenen Substanzen ließ über die Identität keinen Zweifel.

Die Bildung jener Sulfosäure aus dem genannten Oxim kann man sich nun erklären, wenn man annimmt, daß das Oxim bei der Behandlung mit conc. Schwefelsäure zunächst eine Beckmann'sche Umlagerung zu Propionyl-Anisidin

$$C_6H_4\begin{matrix}OCH_3\\NH.COCH_2CH_3\end{matrix}$$

erleidet. Dieses würde dann unter dem Einfluß der concentrirten Säure sowohl die Propionyl- als auch die Methyl-Gruppe verlieren und das gebildete Amidophenol kann dann natürlich unmittelbar durch die Schwefelsäure sulfurirt werden.

Daß die Reaction in der That so verläuft, konnte nachgewiesen werden, wenn man das Oxim statt mit Schwefelsäure, die gleich weitergehend wirkt, mit Chlorphosphor behandelte.

Es gelang auf diesem Wege das Aethyl-Anisyl-Keton in Propionyl-Anisidin überzuführen, das den Schmelzpunkt 86° zeigte und mit verdünnter Schwefelsäure in Propionsäure und Anisidin zerfiel.

Der geschilderte Reactionsverlauf fällt vollkommen in den Rahmen der von Beckmann gemachten Beobachtungen, der z. B. auch gezeigt hat, daß Bezilmonoxim $C_6H_5C(NOH)COC_6H_5$ durch conc. Schwefelsäure in Benzoësäure und Sulfanilsäure zerfällt. Die obige Reaction bildet aber doch einen erneuten Beweis dafür, daß bei den Umlagerungen der Oxime das Stickstoffatom an dieselbe Stelle im Benzolkern eintritt, welche vorher das mit Stickstoff verknüpfte Kohlenstoffatom inne hatte. Dafür giebt es aber noch nicht soviel Belege, daß nicht ein neues Beispiel aufgeführt zu werden verdiente.

3. Ueber Reuniol.

Die Ansichten darüber, welches der Hauptbestandtheil des Rosenöls und der diesem nahe stehenden Geraniumöle sei, gehen immer noch etwas auseinander.

Markownikoff und Reformatzki haben zuerst behauptet, daß im Rosenöl ein Alkohol der Formel $C_{10}H_{20}O$ enthalten sei, welchen sie Roseol nannten. Poleck und Eckart haben das bestritten. Sie fanden im Rosenöl einen ungesättigten primären Alkohol $C_{10}H_{18}O$, dem sie den Namen „Rhodinol" gaben.

Monnet und Barbier zeigten, daß ein mit dem Rhodinol identischer Alkohol sich auch im Oel von Pelargonium odoratissimum (französischem Geraniumöl) vorfinde und glauben, daß dieselbe Verbindung $C_{10}H_{18}O$ auch den Hauptbestandtheil des Geraniumöls ausmache, welches auf der Insel Réunion gewonnen wird. Auch Bertram und Gildemeister entscheiden sich dafür, daß dem Alkohol des Rosenöls die Formel $C_{10}H_{18}O$ zukomme und halten ihn für identisch mit dem in verschiedenen Geraniumölen gefundenen Alkohol.

Diesem Alkohol wird jetzt aber gewöhnlich der Name Geraniol beigelegt und er ist dadurch scharf characterisirt, daß er sich mit Calciumchlorid verbindet und bei der Oxydation erhebliche Mengen von Citral liefert, aus dem er nach Semmler und Tiemann auch durch Reduction gewonnen werden kann.

Als sich nun, wesentlich auf Grund der Arbeiten der eben erwähnten Chemiker, die Ansicht zu befestigen begann, es sei eben der primäre Alkohol $C_{10}H_{17}OH$, das Geraniol, welches den Grundbestandtheil, sowohl des Rosenöls als auch einer Reihe von Geranium-Oelen bilde, erschien eine Abhandlung von A. Hesse[1]), in welcher die Behauptung aufgestellt wird, daß das französische und africanische Geraniumöl und das Rosenöl ein Gemisch von Geraniol mit einem zweiten Alkohol vorstelle, von dem dahingestellt blieb, ob er mit Geraniol isomer, oder um zwei Wasserstoffatome reicher sei und welchen Hesse mit dem Namen Reuniol belegte. Dieser Name wurde deßhalb gewählt, weil der neue Alkohol aus Reunionöl isolirt wurde, aus welchem, im Gegensatz zu den übrigen Geraniumölen mit Hülfe von Chlorcalcium kein Geraniol abgeschieden werden konnte. Das Reuniol wurde von nicht alkoholischen Beimengungen durch den Camphersäureester hindurch befreit.

Vor einem Jahr nun wandte sich Hr. Hesse mit der Frage an mich, ob es Interesse für mich habe, das Reuniol mit dem kurz vorher von mir synthetisch aus dem Menthonoxim dargestellten, rosenartig riechenden Alkohol $C_{10}H_{20}O$ zu vergleichen und stellte mir zu dem Zweck ein auf dem angegebenen Wege gereinigtes Präparat Reuniol zur Verfügung. Ich habe das dankenswerthe Anerbieten gern angenommen und habe in Gemeinschaft mit Herrn Naschold die Untersuchung mit einem von der Firma Heine & Co. in zuvorkommender Weise in größerer Menge gelieferten Product ausgeführt.

Das Resultat dieser Untersuchung ist, daß das Réuniol

1) Z. f. pr. Ch. 1894, 472.

in der That ein eigenartiger, vom Geraniol sowohl in den Eigenschaften, als auch in der Zusammensetzung völlig verschiedener Alkohol ist. Wenn daher H. Erdmann und P. Huth in einer in diesem Augenblick erschienenen Abhandlung[1]) sich dahin aussprechen, „das Reuniol sei aus der wissenschaftlichen Litteratur zu streichen", so befinden sie sich in einem augenscheinlichen Irrthum. Im Gegentheil wird dem Vorkommen von Reuniol auch im Rosenöl und in verwandten Oelen weiter nachzugehen sein. Denn das Reuniol hat nicht die Formel $C_{10}H_{18}O$, sondern die Zusammensetzung $C_{10}H_{20}O$ und es erscheint nunmehr wenigstens möglich, daß auch Markownikoff ein Rosenöl unter Händen hatte, das neben Geraniol einen Alkohol $C_{10}H_{20}O$ enthielt, so sehr ihm das auch bisher bestritten worden ist.

Die positiven Resultate der von Herrn Naschold ausgeführten Untersuchung sind folgende.

Das käufliche Reuniol, welches nach dem Verfahren von Hesse durch den Camphersäureester hindurch dargestellt wird, ist noch kein ganz einheitliches Product, sondern erhält noch nachweisbare Mengen von Geraniol. Die Auffindung des letzteren Alkohols in jenem Material mag andere Forscher zu der Ansicht verleitet haben, daß das käufliche Reuniol überhaupt vom Geraniol nicht verschieden sei. Das ganz verschiedene Verhalten beider Alkohole ermöglicht es aber nicht nur sie zu unterscheiden, sondern auch das Reuniol von beigemengtem Geraniol zu befreien.

Es hat sich nämlich herausgestellt, daß wenn man Geraniol unter Druck 6—8 Stunden mit Wasser auf 240—250° erhitzt, dieser Alkohol unter Bildung theils von niedrig siedenden Terpenkohlenwasserstoffen, theils von hochsiedenden Polymerisationsproducten so gut wie vollständig zerlegt wird, während Reuniol unter diesen Bedingungen kaum verändert wird. Wenn man daher das auf die angegebene Weise mit Wasser erhitzte Roh-Reuniol fractionirt, gelingt es, das Reuniol selbst mit seinen eigenthümlichen Eigenschaften zu isoliren.

Der Siedepunkt des so gewonnenen Reuniols liegt um mehrere Grad niedriger als der des Geraniols und zwar bei 12—13 mm bei 114—115°, $d = 0{,}856$ bei 22°, $n_\alpha = 1 \cdot 95\,609$. Die Analysen führten auf die Formel $C_{10}H_{20}O$.

---

1) Z. f. pr. Ch. 1896 (N. F. 53) 42.

Berechnet		Gefunden		
$C_{10}H_{18}O$	$C_{10}H_{20}O$			
C · 77.85	76.92	77.20	76.88	76.68
H · 11.77	12.82	12.75	12.91	12.80.

Im chemischen Verhalten weicht das Reuniol vom Geraniol ganz erheblich ab. Letzteres läßt sich durch geeignete Oxydation mit Chromsäure leicht in Citral überführen. Wird Reuniol unter genau denselben Bedingungen mit Chromsäure oxydirt, so entstehen nur sehr kleine Mengen Aldehydartiger Stoffe (deren Auftreten vielleicht auf noch vorhandene Verunreinigungen zurückzuführen ist). Ein großer Theil des Reuniols bleibt unverändert. Dies Verhalten der Verbindung deutet darauf hin, daß Reuniol nicht gleich dem Geraniol ein primärer, sondern daß es ein secundärer oder auch tertiärer Alkohol ist.

Bei der Oxydation des Reuniols mit Kaliumpermanganat unter den von Markownikoff für „Roseol" angegebenen Bedingungen wurde ein neutraler, wasserlöslicher Syrup erhalten, der unter 20^{mm} Druck bei 195° destillirte und dessen Analyse auf die Formel eines Glycerins $C_{10}H_{19}(OH)_3$ stimmte.

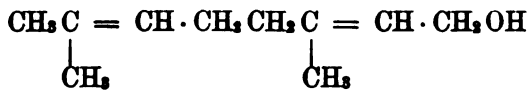
Berechnet	Gefunden	
C 63.11	63.64	63.50
H 11.66	11.50	11.58.

Wurde das Reuniol mit Kaliumpermanganatlösungen bei 0° durchgeschüttelt, bis nach 1—2 Stunden in der Kälte keine Entfärbung der Lösung mehr eintrat, so erwies sich eine $2^1/_2$—3 Atomen Sauerstoff entsprechende Menge des Oxydationsmittels verbraucht. Als Oxydationsproduct fand sich eine wasserlösliche, syrupförmige Säure vor, die beim Erhitzen Ameisensäure abspaltete. Wenn die Oxydation, welche in der Kälte zu diesem Product führte in der Wärme weiter geführt wurde, so wurden im Ganzen etwa 8 Atome Sauerstoff verbraucht, bis die Farbe des Permanganats bestehen blieb. Nun fanden sich als Producte der Oxydation Essigsäure und eine in Wasser sehr lösliche krystallisirte Säure, welche bei 86° schmolz und bei 10^{mm} bei etwa 210° destillirte. Nach der Analyse des Silbersalzes kommt dieser Säure die Formel $C_7H_{12}O_4$ zu.

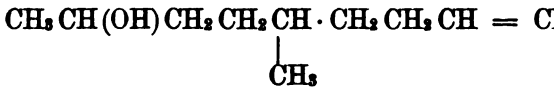
Berechnet für $C_7H_{10}O_4Ag_2$	Gefunden
C · 22.47	22.78
H · 2.70	2.89
Ag · 57.70	57.60.

Die Eigenschaften der freien Säure stimmten vollkommen mit denen der aus Menthon und Pulegon erhältlichen β-Methyladipinsäure überein, mit der sie auch bezüglich der Spaltungsproducte direct verglichen worden ist. An der Natur der Säure kann daher kein Zweifel sein. Uebrigens kann man statt mit Permanganat die Oxydation des Reuniols auch mit Chromsäure zu Ende führen und erhält dann dieselbe Methyladipinsäure.

Geraniol verhält sich nach den Versuchen von Tiemann und Semmler bei der Oxydation ganz anders. Während von diesen Chemikern auf Grund ihrer Versuche für das Geraniol[1]) die Formel



erschlossen worden ist, kann man die bisher beobachteten Thatsachen gut deuten, wenn man dem Reuniol die Formel



zuschreibt. Eine so gebaute Verbindung müßte bei der Oxydation in Essigsäure, β-Methyl-Adipinsäure und Ameisensäure (bezw. CO_2) zerfallen.

Unerwähnt darf nicht bleiben, daß Barbier und Bouveault[2]) bei der Oxydation ihres „Rhodinols" auch schon angeben eine Methyladipinsäure erhalten zu haben. Für diese geben sie aber den Schmelzpunkt zu 100° an, was mit keiner der bekannten Säuren $C_7H_{12}O_4$ stimmt, auch schreiben sie dem Rhodinol die Formel $C_{10}H_{18}O$ zu. Nichts destoweniger ist kaum zu bezweifeln, daß der Untersuchung der genannten Chemiker ein unreines Reuniol zu Grunde lag.

Mit dem Alkohol $C_{10}H_{20}O$ aus Menthonitril ist das Reuniol isomer. Ersterer giebt bei der Oxydation einen nach Apfelsinen riechenden Aldehyd, der beiläufig inzwischen auch näher characterisirt worden ist. Der Alkohol ist also ein primärer. Auch die dem Menthylalkohol zugehörige Säure ist früher schon dargestellt. Sie bildet eine bei 257—261° siedende Flüssigkeit. Das Amid dieser Säure bildet in kaltem Wasser schwer lösliche Blättchen, die bei wiederholtem Umkrystallisiren ihren Schmelzpunkt von 92° bis 120° verschoben. Bei der Oxydation mit Kaliumperman-

1) Ber. chem. Ges. 28, 2132.
2) Compt. rend. 119, 334.

ganat geht die Säure in eine sehr leicht lösliche Pimelinsäure $C_7H_{12}O_4$ über.

Dieselbe Säure wie aus Menthonitril kann übrigens auch, wie es scheint, gewonnen werden, wenn man Menthonoxim mit Kali auf höhere Temperatur erhitzt.

Die Verbindungen, welche ich so aus dem Menthon darstellte, ähneln im höchsten Grade denen, welche man nach Semmler aus dem natürlichen Citronellaöl darstellen kann. Ob sie identisch sind, bleibt noch zu entscheiden.

4. Ueber Pinolhydrat.

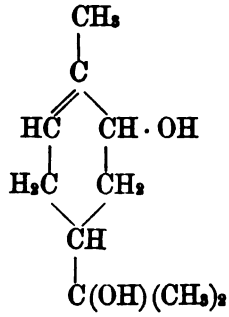
Die Beobachtungen über das eigenthümliche Verhalten der Abkömmlinge des Pinols machten es mir wünschenswerth, das Pinolhydrat einem erneuten Studium zu unterwerfen. Die Resultate dieser Untersuchung, bei der mich Herr Dr. Guericke eifrig unterstützt hat, sind folgende. Das Pinolhydrat ist unzweifelhaft eine ungesättigte Verbindung, welche eine secundäre Alkohol-Gruppe enthält. Es ergiebt sich das letztere aus dem Verhalten des Pinolhydrat bei der Oxydation mit Chromsäure. Werden 5 Gr. Pinolhydrat, in 30 ccm Eisessig gelöst, mit einer wässrigen Auflösung von 2 Gr. Chromsäureanhydrid versetzt, so erfolgt eine lebhafte Reaction. Nach Beendigung derselben wurde mit Soda neutralisirt und die Flüssigkeit mit Aether ausgeschüttelt. Der Aether nahm ein nicht unzersetzt destillirbares Oel von Ketoncharacter auf. Dies Keton liefert ein Oxim von der Formel $C_{10}H_{16}O(NOH)$ und dem Schmelzpunkt 134°, das unzweifelhaft identisch ist mit dem Oxim, das durch Salzsäure-Entziehung aus Terpineolnitrosochlorid erhalten werden kann. Auch ein Semicarbazon ließ sich von dem Keton $C_{10}H_{16}O_2$ bereiten, das bei 173—174° schmolz und das nach den Analysen die Zusammensetzung $C_{10}H_{16}ON \cdot NHCONH_2 + 1H_2O$ besitzt.

Wenn man zu Pinolhydrat in Chloroformlösung ein Mol. Brom fügt, so gelingt es ein krystallinisches Bibromid $C_{10}H_{18}O_2 \cdot Br_2$ herzustellen, das selbst in Chloroform ziemlich schwer löslich ist und bei 131—132° schmilzt. Wird dies Bibromid mit Natriummethylat erwärmt, so verliert es 2 Mol. Bromwasserstoff und man erhält die Verbindung $C_{10}H_{16}O_2$ in Form eines schweren, in Wasser merklich löslichen Oeles, das im Vacuum bei 12 mm bei 82°, bei gewöhnlichem Druck bei 207—208° unzersetzt siedet.

Diese Verbindung $C_{10}H_{16}O_2$ verhält sich — unerwarteter Weise — wie eine gesättigte. Weder Kaliumpermanganat noch Brom werden von ihr entfärbt. Beide Sauerstoffatome sind in ihr

in Oxyd-Form gebunden und zwar ist sie nichts anderes als das Anhydrid des Pinolglycols, in welches letztere sie leicht durch Wasseraufnahme übergeht.

Die gemachten Beobachtungen erklären sich vollständig, wenn man dem Pinolhydrat die Formel



zuschreibt.

5. Ueber Isothujon und Thujamenthon.

Um die Beziehungen des Isothujon zum Thujon und Carvenon, sowie die des Thujamenthon zum Menthon und Tetrahydrocarvon zu klären, habe ich eine Reihe von Versuchen ausgeführt, bei denen mich mein Assistent Dr. Günther unterstützt hat.

Isothujon wird von Kaliumpermanganat viel schneller angegriffen als Thujon. Wenn man die ersten Producte der Oxydation fassen will, muß man die Oxydation in der Kälte und unter Anwendung großer Verdünnung des Oxydationsmittels einleiten. Es gelingt dann das Isothujon in eine gesättigte Säure überzuführen, welche bei 12 mm bei 142—143° siedet und der, wie die Analyse der freien Säure und einiger Derivate lehrte, die Zusammensetzung $C_{10}H_{16}O_3$ zukommt. Das Silbersalz der Säure ist sehr lichtempfindlich und zur Analyse daher nicht geeignet. Die Säure ist eine Ketonsäure und isomer mit den aus dem Thujon erhältlichen Ketonsäuren und sie soll daher als Isothujaketonsäure bezeichnet werden.

Die Säure läßt sich, ganz wie die Isomeren, leicht in eine bei 153° schmelzende Isothujaketoximsäure und in ein krystallisirendes bei 193° schmelzendes Semicarbazon überführen.

Während die α- und β-Thujaketonsäuren beim Erhitzen in Kohlensäure und Methylheptylenketon $C_9H_{16}O$ zerfallen, ist die Isothujaketonsäure unzersetzt destillirbar und siedet bei 271—272°. Ganz anders ist auch ihr Verhalten gegen Brom und Natronlauge. Die ersteren Säuren geben bei der Behandlung mit

diesem Reagens eine gesättigte, bei 141—142° schmelzende Säure $C_9H_{14}O_4$. Die gegen höhere Temperatur so viel beständigere Isothujaketonsäure liefert unter denselben Bedingungen eine Säure $C_7H_{12}O_4$, welche bei 115—116° schmilzt und als identisch mit Isopropyl-Bernsteinsäure erkannt wurde.

Auch das Reductionsproduct des Isothujons, das mit Menthon isomere Thujamenthon giebt bei der Oxydation mit Chromsäure eine Ketonsäure $C_{10}H_{18}O_3$, aber nicht so glatt, wie das Menthon. Das Semicarbazon dieser Säure schmilzt bei 174°,5. Bei weiterer Oxydation liefert die Ketonsäure u. a. eine zweibasische Säure $C_9H_{16}O_4$ vom Schmelzpunkt 136°. Kaliumpermanganat greift das Thujamenthon schwer an. Verwendet man indeß die doppelte Menge Chromsäure für die Oxydation des Thujamenthons als zur Bildung der eben erwähnten Ketonsäure nöthig ist, so bildet sich (neben einer flüssigen Säure) eine mit Wasserdämpfen nicht flüchtige, mit Aether ausschüttelbare Verbindung, welche nach der Destillation im Vakuum erstarrt, bei 41° schmilzt und die ein Ketolacton der Formel $C_{10}H_{16}O_3$ zu sein scheint. Diese Verbindung giebt bei der Oxydation mit Natriumhypobromid Bromkohlenstoff und eine Säure. Bei der Gelegenheit sei bemerkt, daß auch die früher von mir erhaltenen α- und β-Thujaketonsäuren durch Herrn Lazell etwas weiter untersucht worden sind. Zur Characteristik sind die Semicarbazone beider Säuren dargestellt worden. Das der α-Säure schmilzt bei 182—183°, das der β-Säure bei 190°. Das Semicarbazon des durch Destillation der Säuren entstehenden Methylhephylenketons schmilzt bei 134°.

Durch Einleiten von Salzsäuregas in die methylalkoholischen Lösungen der Ketonsäuren konnten gechlorte Ester gewonnen werden, was scheinbar für die ungesättigte Natur der Säuren spricht. Es steht das in eigenthümlichem Gegensatz zu der Thatsache, daß, wie erst bemerkt, bei der Behandlung der Säuren in alkalischer Lösung mit Brom eine gesättigte Bicarbonsäure $C_9H_{14}O_4$ sich bildet, woraus man die gesättigte Natur der Säuren folgern sollte. Wahrscheinlich enthalten die Thujaketonsäuren eine leicht lösliche und verschiebbare Bindung.

Noch leichter wie die Ketonsäuren addiren die Thujaketoximsäuren Chlor- und Brom-Wasserstoff.

6. Ueber Refractions- und Dispersions-Vermögen einer Reihe isomerer Campher.

In einer kürzlich (N. d. K. G. d. W. 1895. S. 305) der Gesellschaft gemachten Mittheilung habe ich einige isomere Verbindungen

besprochen, deren Molekularrefractionen von der erwarteten abweichende Werthe zeigen. Es handelte sich wesentlich um die Verbindungen Carvenon, Isothujon und Pulegon, welche man nach ihrem chemischen Verhalten alle drei als cyclische Ketone mit einer Aethylenbindung zu betrachten Veranlassung hat, während ihre optischen Eigenschaften eher darauf hinzudeuten scheinen, daß man es mit Alkoholen, die zwei Aethylenbindungen enthalten, zu thun hat. Die Gründe, welche die letztere, anfänglich von mir getheilte Auffassung bedenklich erscheinen lassen, habe ich l. c. schon angegeben. Diese Bedenken werden dadurch nicht geringer, daß soeben Knövenagel (Ann. d. Ch. 288, 330) die interessante Beobachtung mitgetheilt hat, daß sämmtliche von ihm auf synthetischem Wege dargestellten s. g. Δ_2-Keto-R. hexene sich optisch auch wie Alkohole mit zwei Aethylenbindungen verhalten. Man hat es also unzweifelhaft hier mit Abweichungen zu thun, die nicht vereinzelt sind, sondern die gesetzmäßig auftreten.

Die ausgesprochene chemische Natur aller jener Verbindungen als Ketone nun einfach des physicalischen Befunds wegen zu verleugnen und sie als Alkohole zu bezeichnen, obgleich, wie a. O. bemerkt, ihre Bildungsweise einer solchen Auffassung vom chemischen Standpunkt aus z. Th. direct widerspricht, das scheint mir unzulässig zu sein. Auch ist es auf Grund der, wenn auch noch sehr geringen, Erfahrungen, welche wir über die Aenderung der optischen Eigenschaften bei der Isomerisation chemischer Verbindungen besitzen, vorläufig unnöthig, solche dem chemischen Empfinden widersprechende Annahmen zu machen.

Für einen sehr einfachen Fall hat Eykman[1]) nachgewiesen, daß mit der einfachen Bindungsverschiebung, welche die Allyl-Verbindungen $R \cdot CH_2 CH = CH_2$ bei ihrem Uebergang in Propenyl-Verbindungen $R \cdot CH = CH CH_3$ erleiden, eine wesentliche Veränderung der Brechungs- und Dispersionsverhältnisse, welche das Molekül aufweist, Hand in Hand gehen.

Man wird nun nicht in Abrede stellen können, daß das, was für Verbindungen mit offener ungesättigter Kette gilt, auch für Bindungsverschiebungen innerhalb eines cyclischen Systems zur Geltung gelangen kann. Man muß es doch für ebenso möglich halten, daß die relative Lage einer Aethylenbindung im Kohlenstoffring z. B. zu einer Methyl- oder Carbonyl-Gruppe ein ähnlich verschiedenartiges optisches Verhalten zwischen Isomeren bedingen

1) Ber. d. chem. Ges. 22, 2736. 2862. 23, 855.

wird, wie man es zwischen Allyl- und Propenyl-Verbindungen bemerkt. So würde sich das optisch verschiedene Verhalten isomerer cyclischer Ketone doch wohl ebenso gut deuten lassen, als wenn man die gezwungene Annahme macht, gewisse Ketone seien eigentlich Alkohole.

Natürlich wird es nöthig sein, um die vorliegenden Fragen definitiv zu entscheiden ein möglichst umfangreiches Beobachtungsmaterial herbeizuschaffen.

Nach den Beobachtungen von Eykman macht sich der Unterschied zwischen Allyl- und Propenyl-Verbindungen, wie gesagt, besonders auch in den abweichenden Dispersionsverhältnissen geltend.

Ich habe daher von acht isomeren Verbindungen $C_{10}H_{16}O$ der Campherreihe, von theils gleichem, theils verschiedenem Sättigungsgrad neben dem von mir schon früher ermittelten Brechungsindex für die *D*-Linie die Dispersion bestimmt.

Zur Untersuchung kamen: Die gesättigten Ketone Fenchon und Thujon, die ungesättigten Ketone Isothujon, Carvenon, Bihydrocarvon und Pulegon und die beiden ungesättigten Oxyde Pinol und das Oxyd aus Bihydrocarveol. Die Beobachtungen wurden mit dem neuen Pulfrich'schen Refractometer von Zeiß ausgeführt.

Die nachfolgende Tabelle giebt die für die *C*, *D* und *F*-Linie gefundenen Werthe, sowie die specifische Dispersion $\frac{C-F}{d}$. Die Beobachtungen, die leider unterbrochen werden mußten, sollen so bald wie möglich ergänzt und noch einmal controllirt werden.

$C_{10}H_{16}O$	d	n_C	n_D	n_F	$\frac{C-F}{d}$
Fenchon	0.946	1.46060	1.46315	1.46915	0.00904
Thujon	0.917	1.44898	1.45147	1.45740	0.00918
Isothujon	0.927	1.47900	1.48263	1.49156	0.01356
Carvenon	0.927	1.47917	1.48283	1.49179	0.01359
Bihydrocarvon	0.924	1.46763	1.47067	1.47768	0.01097
Pulegon	0.936	1.48277	1.48611	1.49544	0.01356
Pinol	0.941	1.46698	1.46679	1.47644	0.00936
Oxyd aus Bihydrocarveol	0.962	1.48376	1.48620	1.49361	0.01024

Es ergiebt sich aus der Tabelle deutlich, daß die Verbindungen von gleichem chemischen Verhalten und gleichem Sättigungsgrad

auch nahezu übereinstimmende specif. Dispersion aufweisen. Eine Ausnahme macht aber auch hier das Bihydrocarvon, das eine erheblich geringere Dispersion zeigt, als sein (mit Hülfe verd. Schwefelsäure daraus erhältliches) Umwandlungsproduct, das Carvenon. Hingegen fallen die für Carvenon, Isothujon und Pulegon gefundenen Werthe wieder zusammen.

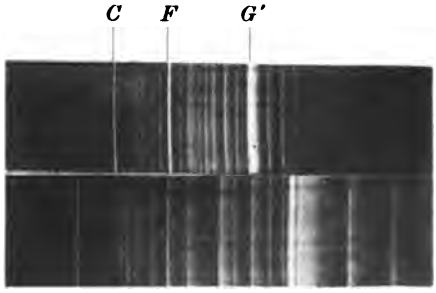
Es schien mir nun von gewissem Interesse zu sein, die durch Zahlen ausgedrückten Verhältnisse auch für die directe Anschauung einmal deutlich zu machen und es ist mit Erfolg versucht, das mit Hülfe der Photographie zu erreichen.

In einem Spectrometer, das Herr Prof. Nernst so gefällig war für diese Zwecke aus seinem Institut herzuleihen, wurde das Ocular durch eine photographische Camera ersetzt und das Glasprisma durch ein Hohlprisma, welches nacheinander mit den zu untersuchenden Flüssigkeiten beschickt wurde. Nachdem vor den Spalt des Objectivs eine Geisler'sche Röhre mit glühendem Wasserstoff gebracht war, wurde in allen Fällen auf das Minimum der Ablenkung der *F*-Linie eingestellt und dann das Wasserstoffspectrum photographirt, wobei Sorge getragen wurde, daß bei allen Aufnahmen die Temperaturen der Flüssigkeiten, welche zur Verwendung kamen, möglichst dieselben waren. Alle Aufnahmen, von welchen die beiliegende Tafel ein Bild giebt, sind mit viel Ausdauer und Geschick von meinem Assistenten Herrn Dr. M. Herz gemacht worden.

Neben den Bildern, welche bei Anwendung der Isomeren $C_{10}H_{16}O$ erhalten wurden, sind auch die mit Safrol und Isosafrol hergestellten auf der Tafel wiedergegeben. Gegen die Originalaufnahmen sind die acht ersten Reproductionen um das sechsfache, die für Safrol und Isosafrol nur um das dreifache vergrößert. Man erkennt also, wie viel stärker die Dispersionsfähigkeit der letzteren Verbindungen ist.

Die Bilder zeigen ferner die abweichende Dispersion von Safrol und Isosafrol, sowie die theils abweichenden, theils übereinstimmenden Dispersionen der isomeren Campher in deutlichster Weise. Es tritt bei denselben weiter eine Thatsache hervor, die besonders hervorgehoben zu werden verdient. Während die meisten Verbindungen $C_{10}H_{16}O$, welche zur Untersuchung kamen, im Violett und Ultraviolett noch deutliche Bilder zeigen, erscheint beim Pulegon von der *F*-Linie an das Spectrum fast vollständig ausgelöscht. Dieser Umstand ist nicht etwa auf eine sichtbare Färbung des angewandten Präparats zurückzuführen. Es wurde immer ein frisch im Vacuum rectificirtes, so gut wie farbloses Pulegon ver-

	$\frac{C-F}{d}$
Thujon	0,00918
Fenchon	0,00904
Pulegon	0,01356
Isothujon	0,01356
Carvenon	0,01359
Bihydrocarvon	0,01097
Pinol	0,00936
Oxyd aus Bihydrocarveol	0,01024



	$\frac{C-F}{d}$
Safrol: $\left[C_6H_3O_2CH_2\right]CH_2-CH=CH_2$	0,0168
Isosafrol: $\left[C_6H_3O_2CH_2\right]CH=CH-CH_3$	0,0239

Reprod. von J. B. Obernetter, München.

wendet, auch zeigten andere, stark gelb gefärbte Oele das Verhalten des Pulegons nicht. Vielmehr läßt sich constatiren, daß dem Pulegon in der That ein ganz auffallend starkes Absorptionsvermögen für die violetten Lichtstrahlen zukommt. Schaltet man z. B. zwei Reagensröhren verschiedener Weite in einander, so daß zwischen beiden ein Zwischenraum von etwa $^1/_2$ cm bleibt und füllt diesen mit Pulegon, während man in das innere Reagensrohr frisch gefälltes Chlorsilber oder ein mit Chlorsilber in geeigneter Weise präparirtes Papier bringt, so kann man das durch die Pulegonschicht vor dem directen Strahlenzutritt geschützte Chlorsilber einige Zeit dem directen Sonnenlicht und sogar einige Tage dem zerstreuten Tageslicht aussetzen, ohne daß Färbung des Silberpräparats erfolgt, während momentane Schwärzung eintritt, wenn man bei dem Versuch das Pulegon durch die isomeren Substanzen oder durch Wasser ersetzt.

Die Frage ist nun, ob das Pulegon der eigenthümlichen Art der in ihm enthaltenen Kohlenstoffbindung sein von seinen Isomeren $C_{10}H_{16}O$ abweichendes Verhalten verdankt. Für das Terpinolen, in dem man jetzt eine ähnliche Kohlenstoffverkettung annimmt, konnte ein entsprechendes optisches Verhalten nicht beobachtet werden. Sehr interessant ist es aber, daß von den drei Isomeren $C_{10}H_{14}O$, nämlich dem Carvacrol, Carvon und Eucarvon das letztere sich ganz ebenso verhält wie Pulegon, ja es hält in entsprechend dünner Schicht die nach dem Violett zu gelegenen Strahlen jenseits der *F*-Linie noch mehr zurück wie das Pulegon, während Carvon und Carvacrol diese Strahlen ganz ungehindert passiren lassen.

Zur Theorie der Erdölbildung.

Von

Fr. Heusler.

Vorgelegt in der Sitzung vom 7. März von O. Wallach.

(Mitteilung aus dem chem. Institut der Universität Bonn.)

Die Untersuchungen auf dem Gebiet der Theer- und Erdölchemie, welche ich vor einigen Jahren im Göttinger Universitätslaboratorium begann, haben zu einem Resultat geführt, welches geeignet zu sein scheint, unsere Anschauungen über den Entstehungsproceß des Erdöls zu klären. Da diese Frage über den engeren Kreis der Fachgenossen hinaus ein gewisses Interesse hat, so teile ich meine Resultate an dieser Stelle mit.

Die vielfachen Diskussionen, welche über die Theorie der Erdölbildung im Lauf der letzten Jahrzehnte geführt worden sind, haben bekanntlich die Mehrzahl der Geologen und Chemiker zu der Ansicht geführt, daß das Erdöl aus Fetten entstanden, also wesentlich animalischen Ursprungs ist. Das größte Verdienst um diese Frage hat sich C. Engler[1]) dadurch erworben, daß er ihre Lösung auf experimenteller Grundlage unternahm. Er unterwarf Fischthran und andere Fette der Destillation unter einem Druck von mehreren Atmosphären und erhielt ein Destillat, welches aus einem Gemisch von Kohlenwasserstoffen bestand. Da das Druckdestillat des Thrans im wesentlichen die gleichen Kohlenwasserstofftypen enthielt, wie die Erdöle, so konnte Engler durch seine Experimente die Hypothese stützen, daß das Erdöl einer unter hohem Druck und bei relativ niedriger Temperatur verlaufenen Destillation von Fett seine Entstehung verdankt.

Die Angaben, welche Engler über die chemische Zusammensetzung seiner Druckdestillate macht, scheinen mir dafür zu spre-

1) Engler, Ber. deutsch. chem. Ges. 21, 1816; 22, 592; 26, 1436.

chen, daß zwar deren qualitative Zusammensetzung nicht aber das quantitative Mischungsverhältnis der einzelnen Kohlenwasserstoffklassen mit derjenigen der natürlichen Erdöle identisch ist. Engler macht darauf aufmerksam, daß seine Druckdestillate mit den Destillationsprodukten der bituminösen Schiefer verwandt sind[1]) und gibt in einer neueren Abhandlung[2]) an, daß in den niedrig siedenden Anteilen seiner Druckdestillate etwa $^1/_3$ der Kohlenwasserstoffe den ungesättigten Fettkörpern angehören. Das ist ein Gehalt an ungesättigten Substanzen, wie er nach meinen Erfahrungen in ungefähr gleicher Höhe in dem Vorlauf der indifferenten Anteile des Braunkohlentheers und Schiefertheers vorliegt, wie er aber in den entsprechend siedenden Anteilen des Erdöls niemals sich finden dürfte.

Ich bin daher schon vor längerer Zeit zu der Anschauung geführt worden, daß die Englerschen Druckdestillate noch nicht als „synthetisches Erdöl" bezeichnet werden sollten; trotzdem bin ich der Ansicht, daß der Bildungsvorgang des Erdöls in der Natur in ähnlicher Weise verlief und daß das auf solche Weise gebildete Produkt durch sekundäre chemische Vorgänge im Lauf der geologischen Entwicklung seine heutige Zusammensetzung erlangt hat.

Die experimentellen Resultate, durch welche ich diese Annahme zu stützen in der Lage bin, sind durch meine Bemühungen ein Verfahren zur Entschwefelung der Braunkohlentheeröle zu finden, herbeigeführt worden. Ich habe gezeigt[3]), daß die unter 200° siedenden Anteile des Braunkohlentheers der Hauptsache nach aus Paraffinen, Naphtenen, aromatischen Kohlenwasserstoffen und Aethylenen bestehen. Nachdem ich ferner gefunden hatte, daß die Schwefelverbindungen des Braunkohlentheers der Thiophenreihe angehören, war für meine Bestrebungen die wissenschaftliche Grundlage geschaffen. Das Thiophen wird von Aluminiumchlorid in eigentümlicher Weise angegriffen; läßt man aber unter geeigneten Bedingungen[4]) Aluminiumchlorid auf Braunkohlentheeröle von niederem Siedepunkt einwirken, so gelingt es nicht blos die Thiophene sondern auch die Aethylene quantitativ zu entfernen. Die Substanzen, welche aus den letzteren entstehen, sind Schmieröle von sehr hohem Siedepunkt und hoher Viscosität, auch in ihrer

1) Dieckhoff, Dingl. polyt. Journ. 287, 41.

2) Engler, Chem. Industrie 1895, 1.

3) Heusler, Ber. deutsch. chem. Ges. 25, 1665; 28, 488.

4) Ueber die chemischen Details dieser Versuche, welche u. a. auch die Entschwefelung des Ohioerdöls ermöglich haben, vgl. das D. R. Patent 83494 und eine demnächst in der Zeitschr. für angewandte Chemie erscheinende Abhandlung

empirischen Zusammensetzung identisch mit den Schmierölen, welche sich im Erdöl in größerer oder geringerer Menge finden. Ganz analoge Resultate wurden erhalten, als die Destillate der bituminösen Schiefer Schottlands mit Aluminiumchlorid behandelt wurden. Hingegen ergaben entsprechende Fraktionen verschiedener Erdölarten entsprechend ihrem geringen Gehalt an ungesättigten Substanzen nur wenig, zuweilen gar kein Schmieröl. Die folgenden Zahlen illustrieren diese Ergebnisse.

100 ccm der bei 140—150° siedenden Fraktion von Braunkohlentheer gaben	61.5 ccm		gesättigte schwefelfreie Kohlenwasserstoffe
100 ccm der bei 100—110° siedenden Fraktion von Schiefertheer . .	„ 62	„	„
100 ccm der bei 130—160° siedenden Fraktion von elsässischem Erdöl	„ 95	„	„

Es schien mir von Interesse, den gleichen Versuch mit dem Engler'schen Druckdestillat von Thran anzustellen. Hr. Engler hat die große Liebenswürdigkeit gehabt, mir eine kleine Menge dieses wertvollen Materials von 100—120° siedend zur Verfügung zu stellen; ich verfehle nicht, ihm dafür auch an dieser Stelle meinen verbindlichen Dank auszusprechen.

110 ccm dieses Materials wurden mit Aluminiumchlorid, das nach und nach in Reaktion gebracht wurde, erwärmt. Es entwich reichlich Salzsäure und eine sehr kleine Menge Schwefelwasserstoff. Als nach dem Erkalten das von dem aluminiumhaltigen Harz abgegossene Oel mit Wasserdampf destilliert wurde, gingen die von dem Aluminiumchlorid nicht angegriffenen Kohlenwasserstoffe — 67 ccm — über. Dieses Resultat steht in ziemlich guter Uebereinstimmung mit der Angabe Englers, daß der Vorlauf seines Druckdestillats 33 % ungesättigte Kohlenwasserstoffe enthält. Im Rückstand blieb ein viscöses Oel, welches durch Erhitzen mit wenig Kalk entwässert und von einem geringen Chlorgehalt befreit wurde. Bei der Rectification desselben im Vacuum ging die Hauptmenge unter 15 mm Druck bei 190—280° als ein sehr dickflüssiges Oel über. Ein kleinerer Teil, welcher eine außerordentlich hohe Viscosität besitzt, sott bis etwa 330°.

Die Elementaranalyse zeigte, daß das von 190—280° bei 15 mm siedende Schmieröl aus dem Druckdestillat Englers nahezu die

gleiche Zusammensetzung (I) hatte, wie ein früher aus Fraktion 100—110 des Braunkohlentheers dargestelltes Schmieröl (II)

I. 0.1155 gr Substanz, von Herrn Nefgen verbrannt, ergaben 0,1349 gr H_2O und 0,3695 gr CO_2.

II. 0,1492 gr gaben 0,1662 gr H_2O und 0,4787 gr H_2O

I.	II.
12,38 % H	12,97 % H
87,50 % C	87,25 % C

Es ist von Interesse zu erwähnen, daß nach den kürzlich veröffentlichten Analysen von Engler und Jezioranski[1]) die über 200° siedenden Anteile verschiedener Erdölsorten eine ähnliche Zusammensetzung, nämlich

12,65	12,80	12,76	13,20 % H
87,35	87,20	86,97	86,80 % C

haben.

Die mitgeteilten Versuche zeigen, daß in der That das Druckdestillat Englers in seiner Zusammensetzung dem Schiefertheer nahe steht und daß es wie dieser durch Aluminiumchlorid in Produkte verwandelt werden kann, welche als wesentliche Bestandteile der Erdöle bekannt sind. Man kann sich daher vorstellen, daß auch die natürliche Bildung des Erdöls aus Fett in zwei Stadien verlief, deren erstes von Engler künstlich nachgeahmt wurde und deren zweites in analoger Weise verlief wie die oben beschriebene Einwirkung von Aluminiumchlorid. Man kann annehmen, daß diese sekundäre Umwandlung in der Natur sehr langsam verlief und in der Regel nicht zu einer völligen Entfernung der Aethylene führte.

Welche Reagentien eine solche sekundäre Veränderung des Erdöls bewirkt haben können, lasse ich dahingestellt. Da ich voraussehe, daß man — in Anlehnung an die von Herrn Ochsenius geäußerten Anschauungen — den Mutterlaugensalzen eine derartige Rolle zuschreiben wird, so bemerke ich, daß ich den gleichen Effekt wie mit Aluminiumchlorid mittelst anderer Metallchloride (wasserfreies Chlormagnesium, Chlorzink, Eisenchlorid) bisher nicht erzielen konnte.

Es erübrigt mir noch, darauf hinzuweisen, daß ähnliche An-

---

1) Engler u. Jezioranski, Ber. deutsch. chem. Ges. 28, 2501.

schauungen von Le Bel[1]) ausgesprochen und auch von Engler[2]) in Erwägung gezogen wurden.

Noch in einer anderen Hinsicht wird die Frage nach der Entstehung des Erdöls durch meine Untersuchungen berührt. Man kann sich bisher die Entstehung derjenigen Erdölsorten, welche Naphtene enthalten, nicht erklären. Ich habe in Gemeinschaft mit Herrn Gärtner gezeigt, daß die Destillationsprodukte der Braunkohlen Naphtene enthalten und die gleiche Thatsache hat kürzlich Herr Nefgen für den schottischen Schiefertheer festgestellt. Es gibt somit bituminöse Substanzen, welche bei der trockenen Destillation Naphtene liefern und damit fällt die erwähnte Schwierigkeit weg. —

Februar 1896.

---

1) Le Bel, Compt. rend. 73, 499.

2) Engler, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbefleißes 1887; Ber. deutsch. chem. Ges. 28, 2505.

Ueber einen Satz aus der Analysis situs.

Von

A. Schoenflies in Göttingen.

(Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 7. März.)

Mit 7 Figuren.

In der Analysis situs pflegt man den Satz, daß eine einfache, sich nirgends durchsetzende geschlossene „Curve“ die Ebene in einen „innern“ und einen „äußern“ Flächenteil zerlegt, als einen anschauungsmäßig gegebenen Grundsatz zu betrachten. Ist jedoch die Curve analytisch durch Gleichungen gegeben, so versteht sich dieser Satz keineswegs von selbst; ein Beweis scheint überdies um so mehr notwendig zu sein, als der Satz bekanntlich die Grundlage für die Cauchy-Riemann'sche Darstellung der Functionentheorie bildet. So viel mir zur Zeit bekannt ist, haben nur die Herren Cam. Jordan, Neumann und Thomae zu dem Satz Stellung genommen. Herr Thomae[1]) beruft sich ausdrücklich auf die Intuition, Herr Neumann[2]) begnügt sich mit einigen Andeutungen; nur der cours d'analyse des Herrn Jordan[3]) enthält eine ausführlich gehaltene Darlegung. Diese ist jedoch ziemlich umständlich und wenig durchsichtig. Aus diesem Grunde teile ich im Folgenden einen Beweis mit, der sich nur auf die einfachsten Begriffe stützt, und geometrisch nur diejenigen Sätze voraussetzt, die die Teilung der Ebene durch gerade Linien betreffen.

1. Unter einem einfachen Curvenstück AB wollen wir die Gesammtheit aller Punkte verstehen, die durch zwei Gleichungen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$
$$t_a \leqq t \leqq t_b$$

1) Theorie der Functionen eines complexen Arguments (1891) Halle. S. 5.

2) Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen, (1884) S. 3.

3) Cours d'analyse, (2.) Bd. I, 1893.

definirt sind, in denen φ und ψ eindeutige und stetige Functionen sind, die für jeden Wert von t mit Einschluß der Grenze eine bestimmte Ableitung besitzen. Wir nehmen ferner an, daß zu zwei verschiedenen Werten von t nicht die gleichen Werte x und y gehören, und daß sich auch der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

in dem betrachteten Intervall stetig und monoton ändert, und zwar mit Einschluß der Grenzen. Das Curvenstück hat also in jedem Punkte eine bestimmte, sich stetig und monoton ändernde Tangente.

Die Curve selbst soll aus einer endlichen Anzahl solcher Curvenstücke

$$A_1A_2, \quad A_2A_3, \cdots\cdots A_nA_1$$

zusammengesetzt sein; das Curvenstück A_iA_{i+1} ist durch die Gleichungen

$$x = \varphi_i(t), \quad y = \psi_i(t)$$
$$t_i \leqq t \leqq t_{i+1}$$

gegeben, und zwar denken wir uns die Parameterverteilung so, daß

$$t_1 < t_2 < t_3 \cdots\cdots < t_n$$

ist, und geben dem Punkt A_1 als Punkt des Curvenzuges A_nA_1 den Parameterwert t_{n+1}. Zum Punkt A_i gehört somit der gleiche Parameterwert, ob wir ihn als Punkt von $A_{i-1}A_i$ oder von A_iA_{i+1} auffassen, d. h. es ist

$$\varphi_{i-1}(t_i) = \varphi_i(t_i) \text{ und } \psi_{i-1}(t_i) = \psi_i(t_i),$$

während jedoch die Tangenten der in A_i zusammenstoßenden Curvenzüge von einander verschieden sein können.

Aus diesen Festsetzungen folgt noch, daß Punkte, in denen die Curve eine der y-Axe parallele Tangente besitzt, unter die Punkte A_i aufzunehmen sind; längs eines Curvenzuges sind daher niemals zwei parallele Tangenten vorhanden.

Endlich setzen wir noch fest, daß sich die Curve nicht selber kreuzt, d. h. es kann

$$r^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2$$

nur dann Null sein, wenn $t' = t''$ ist; so lange also $t'-t''$ größer als die endliche Größe τ ist, giebt es auch für r eine von Null

verschiedene untere Grenze ϱ. Dies ist im besondern immer dann erfüllt, wenn t' und t'' zu Punkten verschiedener Curvenstücke gehören, und nicht in der Nähe eines und desselben Punktes A_i liegen.

2. Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze über ein einzelnes Curvenstück AB.

a) Trifft die Gerade g das Curvenstück c in einem Punkt P, ohne jedoch zu berühren, so liegt die Curve in der Nähe von P auf verschiedenen Seiten von g.

Ist nämlich $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ die Gleichung von g, so folgt wegen

$$\begin{aligned} \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t) + \gamma &= 0 \\ \alpha\psi'(t) + \beta\psi'(t) &\gtrless 0, \end{aligned}$$

daß wenn t' in der Nähe von t bleibt, $\alpha\varphi + \beta\psi + \gamma$ für $t' < t$ und $t' > t$ verschiedenes Vorzeichen besitzt. Ebenso umgekehrt, wenn die Punkte von c teils auf der einen, teils auf der andern Seite von g liegen, so schneidet g die Curve. Denn mit φ und ψ ist auch der Abstand d des Curvenpunktes P von g eine stetige Function von t, also giebt es sicher einen Wert t, für den der Abstand Null ist. Dies ist im besondern für jede Gerade g erfüllt, die AB zwischen A und B trifft.

b) Ist p_1 die Tangente in P_1, so liegt die Curve ganz auf der nämlichen Seite von p_1. Ist nämlich wieder $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ die Gleichung der Tangente, so ist

$$\begin{aligned} \alpha\varphi(t_1) + \beta\psi(t_1) + \gamma &= 0 \\ \alpha\varphi'(t_1) + \beta\psi'(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

Liegt nun die Curve nicht auf der nämlichen Seite von p_1, so giebt es nach a) einen Punkt t_2, in dem p_1 die Curve schneidet, so daß

$$\alpha\varphi(t_2) + \beta\psi(t_2) + \gamma = 0.$$

Wir können unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß $t_2 > t_1$, und daß für $t > t_1$ zunächst $\alpha\varphi + \beta\psi + \gamma > 0$. Nun ist dieser Ausdruck stetige Function von t, also besitzt er zwischen t_1 und t_2 mindestens ein Maximum; tritt dies für t' ein, so ist

$$\alpha\varphi'(t') + \beta\psi'(t') = 0,$$

also hätte c in t' eine zu p_1 parallele Tangente, was nicht der Fall ist. Es folgt noch aus a), daß die Tangente die Gerade AB nicht zwischen A und B trifft.

Da unsere Voraussetzungen für alle Intervalle $t_i \cdots t_{i+1}$ mit Einschluß der Grenzen erfüllt sein sollen, so gilt das vorstehende auch für die Tangenten in den Endpunkten A und B.

Aehnlich ergiebt sich, daß auch die Gerade AB das Curvenstück c außer in A und B nicht weiter schneidet. Hat daher eine Gerade g zwei Punkte P und Q mit der Curve gemein, so sind dies die einzigen, da ja auch PQ ein Curvenstück ist wie AB.

c) Ist P wieder ein beliebiger Punkt von c und λ der Winkel, den PA mit der Axe bildet, so ändert sich auch die Function

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\psi(t_a) - \psi(t)}{\varphi(t_a) - \varphi(t)}$$

stetig mit t und zwar mit Einschluß der Grenzen. Sind λ_a und λ_b die Winkel der Tangenten in A resp. B, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß $\lambda_a > \lambda_b$ und $\lambda_a - \lambda_b < \frac{\pi}{2}$. Man sieht sofort, daß auch $\operatorname{tg}\lambda$ eine sich monoton ändernde Function von t ist. Gehörte nämlich zu zwei Werten t_1 und t_2 das nämliche λ, so sei P_1 der Punkt, der näher an A liegt, als P_2. Nun liegt nach a) die Curve nur auf einer Seite der Tangente in P_1, und zwar auf derjenigen, auf der A liegt, also ist die Existenz eines Punktes P_2 ausgeschlossen. Jedem λ im Intervall $\lambda_a > \lambda > \lambda_b$ entspricht daher ein und nur ein Punkt P von c Also jede durch A gezogene Gerade, die in den von t_a und AB gebildeten Winkel fällt, schneidet c in noch einem von A verschiedenen Punkt.

Es folgt hieraus noch beiläufig, daß AB mit t_a und t_b ein gewöhnliches Dreieck bestimmt, das c einschließt.

3. Wir beweisen nun, daß das von c und AB gebildete Segment σ die Ebene in ein Aeusseres und ein Inneres teilt.

Wenn die Gerade g die Strecke AB zwischen A und B trifft, in G, so schneidet sie nach 2a) die Curve c in einem Punkte P. Ein zweiter Schnittpunkt ist unmöglich, da er und G, also auch er und A resp. B auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen würden. Wenn g die Verlängerung von AB trifft, und einen Punkt P mit c gemein hat, so ist sie entweder Tangente, oder die Curve liegt nahe bei P zu verschiedenen Seiten von g. Ist S ein Punkt, der auf der entgegengesetzten Seite von g liegt, wie A, so gilt dies auch für S und B, daher hat g noch einen zweiten Punkt mit c gemein. Andere Schnittpunkte giebt es nicht (2).

Jede nicht durch A oder B gehende Gerade trifft daher das Segment σ in 0 oder zwei Punkten — ein Berührungspunkt ist doppelt zu zählen. — Ist nun l eine von diesen Geraden, und schneidet sie σ in L_1 und L_2, so wollen wir die zwischen L_1 und L_2 liegenden Punkte innere Punkte nennen. Diese Bezeichnung bezieht

sich zwar zunächst nur auf l, wir zeigen aber sofort, daß sie von l unabhängig ist, und einer Eigenschaft des Segments selbst entspricht.

Wenn nämlich (Fig. 1) zunächst l die Sehne AB in G und die Curve c in P trifft, so bestimmt P mit A und B ein Dreieck, und es liegt jeder, bezüglich g innere Punkt J auch innerhalb des Dreiecks. Jede durch J gelegte Gerade l_1 schneidet daher zwei Dreieckseiten, also auch die über ihnen stehenden Bogen in je einem Punkt, es ist also J auch für jede dieser Geraden ein innerer Punkt.

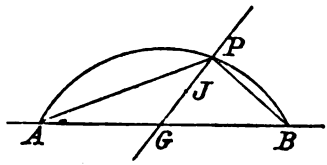


Fig. 1.

Wenn dagegen (Fig. 2) die Ausgangsgerade l zwei Punkte P und Q von c selbst trifft, so bestimmen sie mit A und B ein convexes Viereck, und es trifft daher jede durch einen innern Punkt J von PQ gelegte andere Gerade l_1 noch genau eine weitere Viereckseite. Man sieht überdies leicht, daß J auch für sie ein innerer Punkt ist.

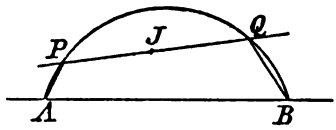


Fig. 2.

Damit sind alle Punkte der Ebene, die nicht auf dem Bogen der Sehne AB selbst liegen, als innere resp. äußere Punkte des Segments characterisirt.

Wir machen noch auf folgende einfache Thatsache aufmerksam, die für das folgende wichtig ist. Durch den inneren Punkt J legen wir eine Gerade l. Wir legen auf ihr eine Richtung fest, so wird sie (Fig. 3) entweder erst den Bogen AB und dann die

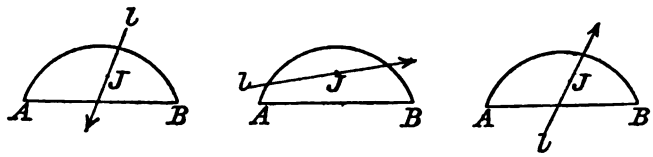


Fig. 3.

Sehne, oder erst die Sehne und dann den Bogen treffen, oder aber nur den Bogen AB. Drehen wir jetzt l um J, während wir den Richtungssinn unverändert lassen, so ist klar, daß ein Uebergang aus der ersten Lage in die zweite immer nur durch die dritte Lage hindurch möglich ist. Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Lage von l zum Segment davon abhängig ist, ob l die begrenzte oder die unbegrenzte Strecke AB trifft.

4. Sei jetzt k die Curve, die, wie oben definirt, aus einer endlichen Zahl von Curvenbögen

$$A_1A_2, \quad A_2A_3 \cdots\cdots A_nA_1$$

besteht, wie AB. Wir verbinden je zwei Punkte A_iA_{i+1} mit einander und erhalten ein Polygon $\mathfrak{P}$, dessen Seiten sich beiläufig bemerkt auch kreuzen können. Wir ziehen wieder eine beliebige Gerade l, die wir nur der Beschränkung unterwerfen, daß sie durch keinen Punkt A_i geht. Man kann nun leicht zeigen, daß jede solche Gerade l das Polygon in einer geraden Anzahl von Punkten schneidet; es seien $2p$. Schneidet aber l eine Polygonseite, so auch den zugehörigen Curvenbogen; dies giebt bereis $2p$ Schnittpunkte mit k. Ferner hat jedes Segment, dessen Sehne nicht getroffen wird, keinen oder zwei Punkte mit l gemein, also hat l mit der Curve eine gerade Zahl von Schnittpunkten gemein.

Wir legen wieder auf l eine bestimmte Richtung fest, zählen die Schnittpunkte dieser Richtung gemäß, und wollen diejenigen Punkte von l, die auf einen ungeraden Schnittpunkt folgen, als innere Punkte bezeichnen. Zunächst ist ersichtlich, daß diese Definition davon unabhängig ist, in welcher Richtung wir die Schnittpunkte zählen. Wir weisen nach, daß die Bezeichnung auch von der benutzten Geraden l selbst unabhängig ist.

Sei J ein innerer Punkt für l, so trifft l die Curve k vor J in einer ungeraden Zahl von Punkten. Wir setzen zunächst voraus, daß J nicht in eine Polygonseite A_iA_{i+1} fällt. Mit jedem Segment bestimmt die Gerade l zwei oder Null Punkte. Es liege J innerhalb von λ Segmenten (Fig. 4). Von den beiden Schnittpunkten mit jedem dieser λ Segmente liegt je einer vor, je einer hinter J; die Schnittpunkte mit den andern Segmenten, die l schneidet, liegen entweder beide vor oder beide hinter J. Es mögen μ Segmente vor J, ν dagegen hinter J getroffen werden, und zwar soll bei μ_1 resp. ν_1 Sehne und Bogen, bei μ_2 resp. ν_2 nur der Bogen getroffen werden. Die λ Segmente zerfallen ihrerseits in drei Classen, je nachdem (Fig. 3) erst der Bogen und dann die Sehne, oder zuerst die Sehne und dann der Bogen, oder aber nur der Bogen geschnitten wird. Solcher Segmente mögen bezüglich λ_1, λ_2, λ_3 vorhanden sein.

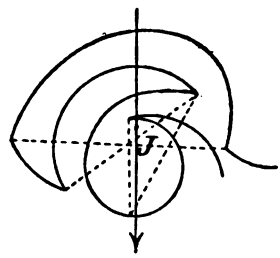


Fig. 4.

Wir haben demgemäß vor J folgende Schnittpunkte mit dem Polygon resp. der Curve

von den λ_1 Segmenten	0	λ_1
von den λ_2 Segmenten	λ_2	0
von den λ_3 Segmenten	0	λ_3
von den μ Segmenten	μ_1	$\mu_1 + 2\mu_2$,

hinter J dagegen

von den λ_1 Segmenten	λ_1	0
von den λ_2 Segmenten	0	λ_2
von den λ_3 Segmenten	0	λ_3
von den ν Segmenten	ν_1	$\nu_1 + 2\nu_2$.

Insgesammt also vor J

$$\lambda_2 + \mu_1 \text{ resp. } \lambda_1 + \lambda_3 + \mu_1 + 2\mu_2$$

und hinter J

$$\lambda_1 + \nu_1, \text{ resp. } \lambda_2 + \lambda_3 + \nu_1 + 2\nu_2$$

Schnittpunkte mit dem Polygon und der Curve.

Ist l' eine andere durch J gehende Gerade, so ist für sie $\lambda' = \lambda$, aber λ_1', λ_2', λ_3' werden im Allgemeinen von λ_1, λ_2, λ_3 verschieden sein. In Bezug auf jedes einzelne Segment ist aber ein Uebergang aus der ersten Lage in die zweite, resp. umgekehrt nur durch die dritte Lage möglich (3). Drehen wir also l um J, bis zum ersten Mal ein λ_i sich ändert, so muß von dieser Aenderung notwendig λ_3 betroffen werden; die Aenderung von λ_3 um eine Einheit bedingt eine Aenderung von λ_1 oder λ_2 um eine Einheit. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir setzen

$$\lambda_1' = \lambda_1, \qquad \lambda_2' = \lambda_2 \pm 1, \qquad \lambda_3' = \lambda_3 \mp 1$$

Beachten wir nun, daß der Punkt J in Bezug auf das Polygon eine feste Lage hat, d. h. entweder innerer oder äußerer Punkt ist, so folgt mod. 2

$$\nu_1 + \lambda_1 \equiv \nu_1' + \lambda_1',$$
$$\mu_1 + \lambda_2 \equiv \mu_1' + \lambda_3'.$$

Es ergiebt sich daher $\nu_1 \equiv \nu_1'$, $\mu_1 \equiv \mu_1' + 1$, und daher auch

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + 2\mu_2 \equiv \lambda_1' + \lambda_2' + \mu_1' + 2\mu_2',$$
$$\lambda_2 + \lambda_3 + \nu_1 + 2\nu_2 \equiv \lambda_2' + \lambda' + \nu_1' + 2\nu_2',$$

d. h. es ist J auch für l' ein innerer Punkt; der Begriff des Innern und Aeußern ist demnach der Curve als solcher eigentümlich. Auf keiner unserer Geraden l kann man von einem äußern Punkt zu einem innern Punkt gelangen, ohne die Curve zu überschreiten.

Wir wollen noch zeigen, daß sich auch die vorläufig ausge-

schlossenen Punkte und Geraden in diese Begriffsbestimmungen einordnen lassen. Ausgeschlossen waren zunächst diejenigen innern Punkte J, die auf einer Polygonseite $A_i A_{i+1}$ liegen. Es ist nun klar, daß es auf jeder durch J gehenden Geraden l in unmittelbarer Nähe von J Punkte J' giebt, die nicht auf $A_i A_{i+1}$ liegen, aber zu jedem Curvenbogen die gleiche Lage haben, wie J selbst. Daraus folgt sofort, daß man auch von J selbst auf keiner Geraden l zu einem äußern Punkt gelangen kann, ohne die Curve zu überschreiten. Endlich hatten wir die Geraden ausgeschlossen, auf denen irgend ein Punkt A_i liegt; für einen bestimmten innern Punkt J sind es diejenigen, die ihn mit einer Ecke A_i verbinden. Ist g_i die Gerade JA_i, so giebt es beliebig viele Geraden l durch J, die die Curve in unmittelbarer Nähe von A_i treffen. Diese Geraden treffen entweder beide in A_i zusammenstoßende Curvenbögen oder nur einen, und da der Abstand der Curvenbogenpunkte von der Sehne eine stetige Function von t ist, so ist g_i entweder die Grenzlage von lauter Geraden, die beide in A_i zusammenstoßende Curvenbögen treffen, oder von solchen, die nur einen dieser Curvenbögen treffen. Im letzten Fall haben wir A_i als gewöhnlichen Schnittpunkt zu zählen, im ersten Fall als Vertreter von zwei Schnittpunkten, d. h. wie einen Berührungspunkt. Damit ist bewiesen:

Die Curve k teilt die Ebene in ein äußeres und ein inneres Gebiet, so daß man von einem innern Punkt zu einem äußern nur gelangen kann, wenn man die Curve überschreitet.

5. An letzter Stelle geben wir noch an, wie man jeden innern Punkt J, mit jedem innern Punkt J_1 durch einen ganz im Curveninnern verlaufenden Curvenzug verbinden kann. Hierzu gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Es sei g eine beliebige Gerade und

$$t_\alpha t_\beta t_\gamma \cdots\cdots t_\varrho$$

seien ihre Schnittpunkte mit der Curve. Wir ziehen alle zu g parallelen Geraden g', die entweder durch eine Ecke A gehen oder einen Curvenbogen $A_i A_{i+1}$ berühren; ihre Zahl ist endlich Wir nehmen jetzt noch an, g sei so gewählt, daß keine zwei dieser Geraden g' zusammenfallen. Verschieben wir g bis zur nächsten Geraden g' parallel mit sich selbst, so ändern sich auch die t_λ stetig. Um dies in aller Form darzutun, verbinden wir (Fig. 5) den Punkt P, in dem g den Curvenbogen $A_i A_{i+1}$ trifft, mit einem der Endpunkte, z. B. mit A_i und ziehen in P die Tangente p, so

liegt der Bogen $A_i P$ gemäß (2) zwischen der Tangente p und der Sehne $A_i P$, und es schneidet jede zu g parallele Gerade g_1, die die Sehne in einem Punkt G_1 zwischen P und A_i trifft, den Curvenbogen in P_1 und die Tangente in T_1 so, daß P_1 zwischen G_1 und T_1 liegt. Der Abstand PP_1 ist daher sicher kleiner, als mindestens eine der Strecken PG_1 resp. PT_1, woraus die Behauptung folgt.

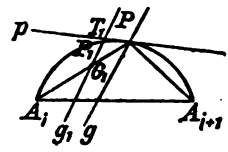


Fig. 5.

Seien nun t_λ und t_μ zwei aufeinander folgende Schnittpunkte von g, so daß die Strecke $t_\lambda t_\mu$ lauter innere Curvenpunkte enthält; wir sagen kurz, $t_\lambda t_\mu$ sei eine innere Strecke s. Im allgemeinen werden t_λ und t_μ verschiedenen Curvenbögen angehören. Wir verschieben nun g bis zur nächsten Grenzlage g', so werden im Allgemeinen auch t'_λ und t'_μ von einander verschieden sein. Aus der Stetigkeit des Wachstums von t_λ und t_μ folgt, daß dabei $t_\lambda t_\mu$ stets innere Strecke bleibt; g und g' bestimmen mit den beiden Curvenbögen eine einfache geschlossene Fläche. Besondere Fälle sind die, daß t_λ und t_μ dem gleichen Curvenbogen angehören, und g' die Tangente dieses Bogens ist, oder daß t_λ und t_μ zwei benachbarten Curvenbögen angehören und die Grenzlage g' durch den gemeinsamen Bogenendpunkt A geht. In beiden Fällen bestimmt g mit den bezüglichen Curvenbögen ebenfalls eine einfache geschlossene Fläche.

Ueberschreitet g eine Grenzlage g', so wird dabei entweder (Fig. 6) ein Curvenbogen in T berührt oder (Fig. 7) eine Ecke A

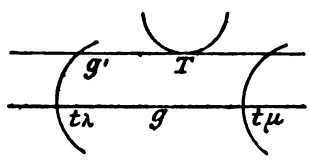


Fig. 6.

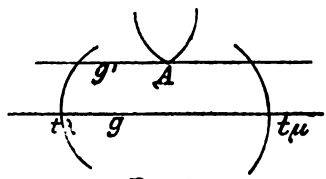


Fig. 7.

überstrichen. Entweder stellen sich dadurch zwischen t_λ und t_μ zwei neue Schnittpunkte t'_λ und t'_μ ein, so daß $t_\lambda t'_\lambda$ und $t'_\mu t_\mu$ innere Strecken s' resp. s'' sind, oder es verschwinden zwei solche Schnittpunkte, resp. es treten zwei innere Strecken s' und s'' zu einer einzigen s zusammen, oder aber es tritt weder das eine noch das andere ein. Daraus folgt, daß die Geraden g' die gesammte Fläche in lauter einfache Flächenstücke zerfällen, die von einer oder zwei dieser Geraden begrenzt sind, und zwar so, daß längs jeder inneren Strecke s einer solchen Geraden zwei Flächenstücke an einander stoßen. Setzen wir jetzt zunächst einmal voraus, daß

man in jedem derartigen von zwei Geraden g', g'' begrenzten Flächenteil F von einem Punkt von g' zu einem Punkt von g'' einen geradlinigen Linienzug ziehen kann, der überdies durch einen beliebigen innern Punkt hindurchgeht, so läßt sich nunmehr leicht zeigen, daß man auch jeden innern Curvenpunkt J_1 mit jedem andern innern Punkt J_2 durch einen ganz im Innern verlaufenden Linienzug verbinden kann.

Seien nämlich F_1 und F_2 die Flächenteile, in den J_1 resp. J liegen, so ziehe man von J_1 aus den bezüglichen Linienzug bis zu einer der F_1 begrenzenden Geraden g'. Diese Gerade g' möge den Curvenbogen $A_i A_{i+1}$ in G_i' treffen. Wir bezeichnen jetzt die durch die Reihenfolge A_1, A_2, A_3 gegebene Umlaufsrichtung der Curve als positive, so giebt es genau einen Flächenteil F', zu dessen Curvenbogen die Fortsetzung von $A_i A_{i+1}$ über G_i' in positiver Richtung gehört. Auf diese Weise ist eine bestimmte Reihe von Flächenteilen

$$F_1,\ F',\ F'' \cdots\cdots F_2$$

definirt, in deren letztem J_2 liegt. Zwei anstoßende Flächenteile haben entweder eine Strecke s' einer Geraden g' als gemeinsame Begrenzung, oder aber zwei verschiedene Strecken s' und s'', die jedoch aneinander stoßen, und zwischen sich einen Berührungspunkt T mit einem Curvenbogen oder aber einen Punkt A enthalten. Auf Grund unserer obigen Voraussetzung schließen wir daher, daß wir von J_1 nach J_2 einen geradlinigen Linienzug legen können, der in F_1 beginnt, $F', F'' \cdots$ durchzieht und in F_2 endigt, im übrigen im Innern der Curve verläuft, bis auf die dem Rande angehörigen Punkte T und A. Zu bemerken ist nur, daß bei solchen Flächenteilen F', die nur eine Gerade g' als Grenzgerade enthalten, nur diese Gerade selbst in den Linienzug eingeht.

Die gemachte Voraussetzung erweisen wir wie folgt. Die bezüglichen Flächenteile F werden von solchen Curvenbogen begrenzt, für die gemäß (1) das Quadrat des Abstandes

$$r^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$$

niemals unter eine von Null verschiedene untere Grenze ϱ sinken kann. Trifft nun eine Gerade g die Curvenbogen von F in G_λ und G_μ, so liegt der mit dem Radius $\frac{\varrho}{2}$ um die Mitte M von $G_\lambda G_\mu$ geschlagene Kreis, wie leicht zu sehen, ganz innerhalb von F. Zieht man daher über F eine Schaar paralleler Geraden g, deren Abstand $\delta \leqq \frac{\varrho}{2}$, so liegt das von den Mitten M auf die benachbarten

Geraden gefällte Lot ganz innerhalb von F, und es bilden diese Lote, zusammen mit den bezüglichen Stücken der Geraden g von den Fußpunkten der Lote bis zu den Mitten M, den oben genannten geradlinigen Linienzug. Wir haben nur auch dafür zu sorgen, daß eine Parallele durch J_1 eine andere durch J_2 geht, was stets ausführbar. — Wir ziehen hieraus noch eine weitere Folgerung. Stoßen zwei Flächenstücke F' längs zweier Strecken s' und s'' an einander, die zwischen sich einen Berührungspunkt T oder einen Punkt A enthalten, so kann man die zwischen ihren Mittelpunkten M' und M'' liegende Strecke $M'TM''$ resp. $M'AM''$ durch eine andere ersetzen, die im Curveninnern liegt, ohne T resp. A zu enthalten. Wir ziehen zu diesem Behuf wieder diejenige Parallele zu g' im Abstand $\frac{\varrho}{2}$, auf der die innern Strecken s' und s'' in eine einzige Strecke zusammengetreten sind, und fällen von M' und M'' die Lote auf sie.

Wir gewinnen auf diese Weise einen polygonalen Linienzug, der in J_1 beginnt, in J_2 endigt, und ganz im Innern der Curve verläuft. Dieser Linienzug kann sich möglicherweise durchsetzen. In diesem Fall braucht man aber nur die überflüssigen Schleifen zu tilgen, um zu einem sich nicht durchsetzenden von J_1 nach J_2 gehenden Linienzug zu gelangen. Hiermit ist der geforderte Beweis vollständig geliefert; jeder innere Punkt kann mit jedem andern inneren Punkt durch einen ganz im Innern verlaufenden sich nicht durchsetzenden, aus geraden Strecken bestehenden Weg verbunden werden.

Ueber die Theorie der automorphen Modulgruppen.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. April 1896 von F. Klein.

In meiner Note „Ueber die Discontinuitätsbereiche der Gruppen u. s. w.“, welche in den Göttinger Nachrichten vom 19. Okt. 1895 gedruckt ist, habe ich die Grundlagen einer Theorie der sogenannten Hauptkreisgruppen skizziert und am Schlusse bemerkt, daß diese Betrachtungen in einer „Theorie der Modulgruppen der verschiedenen Gattungen (p, n)“ ihre natürliche Fortsetzung finden. Die wichtigsten Grundsätze der Theorie dieser „automorphen Modulgruppen“ erlaube ich mir hier mitzuteilen, sende jedoch zu diesem Ende einige Ergänzungen meiner eben genannten Note voraus.

Ueber die Begriffsbestimmung der normalen D. B. (cf. Art. I l. c.) habe ich eine historische Bemerkung nachzutragen. Für die aus Substitutionen der Gestalt $\zeta' = \zeta + c$ bestehenden Gruppen ist der normale D. B. ein Sechseck der parabolischen Ebene. Dieses Sechseck ist von Dirichlet in Crelle's Journal Bd. 40 pg. 209 ff. ausführlich betrachtet. Sind C_0, C_1, ... die aequivalenten Polygoncentren, so definiert Dirichlet das Sechseck als Inbegriff aller derjenigen Punkte der Ebene, welche von C_0 nicht weiter entfernt sind, als von irgend einem anderen Punkte C. Diese „Dirichlet'sche Definition des normalen D. B.“ behält ihre volle Gültigkeit bei denjenigen l. c. betrachteten Gruppen, welche auf der fundamentalen Ellipse uneigentlich discontinuierlich sind; für die übrigen Gruppen sind Ergänzungen erforderlich, die jedoch hier nicht besprochen werden sollen.

Ein unmittelbares Ergebnis der Dirichlet'schen Definition des normalen D. B. ist der folgende Reciprocitätssatz: Der Punkt

C_0 gehört stets und nur dann dem normalen D. B. des Centrums C_0' an, wenn C_0' dem normalen D. B. von C_0 angehört. Dieser für alle Gruppen meiner vorigen Note gültige Satz bleibt auch selbst dann noch bestehen, wenn eines der beiden Centren C_0, C_0' oder auch beide in einen Fixpunkt der Gruppe hineinrücken. Nur bedarf für diesen Fall der Begriff des normalen D. B. wieder einer nahe liegenden Ergänzung.

Von besonderer Wichtigkeit waren bei der weiteren Ausbildung der normalen D. B. gewisse „Specialtypen von Normalbereichen". Die letzteren sind solche Normalpolygone, welche eine geringere Seitenanzahl haben, als man nach der allgemeinen Theorie erwarten sollte. Die Centren dieser Polygone liegen auf den Grenzlinien derjenigen Bereiche A_0, A_1, ... (cf. Art. I l. c.), aus denen sich die natürlichen D. B. zusammensetzen. Für die Gattung (1, 1) sind die normalen D. B. von allgemeinem Typus Zehnecke; aber es kommen bei jeder Gruppe ∞^1 normale Achtecke und zwei Normalsechsecke vor. Ein Normalseckseck hat zwei dreigliedrige Eckencyclen, und der eine dieser Cyclen besteht aus zufälligen Ecken. Die beiden Sechseckteilungen stehen in der Beziehung zu einander, daß die zufälligen Ecken der einen die Centren der anderen Teilung sind. —

Der in Art. II l. c. über die Gestalt der kanonischen Polygone ausgesprochene Satz gestattet eine wesentliche Ergänzung. Dabei ist es wichtig, das zunächst aus $(n + 3p)$ Schnitten a, b, c, d bestehende kanonische Schnittsystem der geschlossenen Fläche so auszugestalten, daß man die Schnitte c auf Punkte zusammenzieht. Eine stetige Deformation einzelner oder auch aller Querschnitte, welche ohne Zerreißen der letzteren sowie ohne Collision derselben unter einander vor sich geht, gilt als unwesentlich; das von dem zugehörigen kanonischen D. B. gelieferte System der Erzeugenden bleibt bei solchen Deformationen unverändert. Es gilt dann der Satz: Jedes Schnittsystem der bezeichneten Art liefert entweder direct oder nach unwesentlicher Umgestaltung als kanonischen D. B. ein geradliniges Polygon von $(2n + 4p)$ Seiten und mit lauter concaven Winkeln. Dieser Satz ist für die Transformationstheorie der kanonischen Polygone fundamental.

Alle beweglichen Ecken des fraglichen kanonischen D. B. gehören zu einem Cyclus zusammen. Nennen wir irgend eine specielle unter diesen Ecken E, so ist bei Bewegung von E die Veränderung des ganzen D. B. eindeutig reguliert. Soll das Polygon die Geradlinigkeit der Seiten und Concavität

der Winkel nicht einbüßen, so ist E auf einen mit den Gruppenerzeugenden festgegebenen Bereich beschränkt, welcher durch Stücke von Geraden, Kegelschnitten oder Curven dritter Ordnung begrenzt ist.

Der Uebergang von einem ersten kanonischen Querschnittsystem auf der geschlossenen Fläche zu irgend einem zweiten soll als Transformation des Querschnittsystems und entsprechend des Polygons bezeichnet werden. Diese Transformationen spielen in der Theorie der Abel'schen Functionen eine bekannte principielle Rolle[1]). Die Transformationstheorie der kanonischen Polygone ist indessen reichhaltiger, weil hier einmal die n Schnitte d nach den singulären Punkten der geschlossenen Fläche hinzukommen, und weil überdies die Schnitte c wesentlich sind.

Die ersten Hauptsätze der Transformationstheorie der kanonischen Polygone sind die folgenden: Alle Transformationen eines kanonischen Polygones der Gattung (p, n) lassen sich aus n oder $5p$ oder endlich $(n+5p-4)$ Elementartransformationen durch Wiederholung und Combination zusammensetzen, je nachdem die Gattung $(0, n)$, $(p, 0)$ oder (p, n) mit $p>0$, $n>0$ vorliegt. Die n Elementartransformationen des Falles $(0, n)$ sind alle gleichartig; sie werden sogleich als Elementartransformationen zweiter Art näher beschrieben. Im allgemeinen Falle (p, n) hat man drei Arten von Elementartransformationen, nämlich $2p$ von der ersten, $(n+p-2)$ von der zweiten und $(2p-2)$ von der dritten Art. Auf Grund des obigen Theorems über die Gestalt der kanonischen D. B. läßt sich die einzelne Elementartransformation am Polygon durch eine sehr einfache Construction ausführen; im Falle einer Transformation der ersten oder zweiten Art handelt es sich um Abtrennung eines geradlinigen Dreiecks und Verlegung desselben; eine Transformation dritter Art ist im Falle $(2, 0)$ durch zwei Verlegungen dieser Art zu vollziehen, und im allgemeinen Falle nur unwesentlich complicierter.

Die Transformationen der in Rede stehenden drei Arten sol-

---

1) Man vergl. etwa Clebsch-Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, pg. 304 ff., sowie die Schlußbemerkung in Kronecker's Abhandlung „Ueber bilineare Formen" Monatsberichte der Berliner Akademie von 1866 pg. 597 ff.

len in der Weise beschrieben werden, daß in jedem Falle die Veränderung des Querschnittsystems und der erzeugenden Substitutionen angegeben wird.

Eine Elementartransformation erster Art bezieht sich auf Umwandlung eines einzelnen Paares conjugierter Schnitte a, b. Nach bekannten Sätzen der Theorie der elliptischen Functionen lassen sich alle Transformationen dieses Paares a, b aus zwei elementaren herstellen. Lassen wir den Substitutionen V_b und V_a die beiden Transformationen:

$$(1) \qquad (V_b) \quad u' = u + \omega_1, \quad (V_a) \quad u' = u + \omega_2$$

entsprechen, so gehen die beiden symbolisch etwa durch T_1 und T_2 zu bezeichnenden Elementartransformationen:

$$(2) \qquad \begin{cases} (T_1) & V_a' = V_b^{-1} V_a, \quad V_b' = V_b, \\ (T_2) & V_a' = V_a, \quad V_b' = V_b V_a \end{cases}$$

den beiden Modulsubstitutionen $\begin{pmatrix} 1, 0 \\ -1, 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ parallel. Die Substitutionen der Modulgruppe sind aber auf die gesamten aus T_1 und T_2 herzustellenden Transformationen erst 1-∞-deutig bezogen, da zwar die Integralsubstitutionen (1), nicht aber die ihnen correspondierenden ζ-Substitutionen permutabel sind. Der Identität $\omega' = \omega$ entsprechen die ∞^1 Transformationen:

$$(3) \qquad V_a' = V_c^{-\nu} V_a V_c^{+\nu}, \quad V_b' = V_c^{-\nu} V_b V_c^{+\nu}, \qquad \nu = -\infty, \cdots + \infty,$$

welche abgesehen vom Falle der Gattung (1, 1) wesentlich verschieden sind. Das Gesamtpolygon gestattet, wie schon bemerkt, $2p$ Elementartransformationen (2).

Eine Elementartransformation zweiter Art bedeutet eine Abänderung der Reihenfolge zweier benachbarten Schnitte d oder c. Im Falle $(0, n)$ giebt es n derartige Elementartransformationen, zwischen denen freilich eine Relation besteht; zusammen mit ihren inversen erzeugen sie alle hier eintretenden Transformationen. Bei der Gattung $(p, 0)$ stellen sich entsprechend p Elementartransformationen zweiter Art ein, und im allgemeinen Falle (p, n) mit $p > 0$, $n > 0$ deren $(n + p - 2)$, da die Schnitte c, und ebenso die Schnitte d, nur unter sich zu permutieren sind. In den Erzeugenden stellt sich die Abänderung der Reihenfolge der beiden Schnitte d_1 und d_2 entweder durch die erste oder zweite der beiden folgenden Transformationen dar:

$$(4)\qquad \begin{cases} (T_1') & V_1' = V_2, \qquad V_2' = V_2^{-1} V_1 V_2, \\ (T_2') & V_1' = V_1 V_2 V_1^{-1}, \; V_2' = V_1; \end{cases}$$

hierbei ist T_2' die inverse Transformation zu T_1'.

Endlich bezieht sich eine Elementartransformation dritter Art auf die Umwandlung zweier benachbarten Paare a_i, b_i und a_{i+1}, b_{i+1} in zwei neue Querschnittpaare. Für jedes Paar giebt es zwei solche Transformationen und ihre inversen. Die eine etwa durch T_{12} zu bezeichnende Transformation für das erste Paar ist durch:

$$(5)\qquad \begin{cases} V_{a_1}' = V_{b_2} V_{b_1} V_{b_2}^{-1}, & V_{b_1}' = V_{b_2} V_{b_1} V_{b_2}^{-1} V_{a_1}^{-1} V_{b_1}^{-1} V_{b_2}^{-1}, \\ V_{a_2}' = V_{b_2} V_{b_1} V_{b_2} V_{b_1}^{-1} V_{b_2}^{-1}, & V_{b_2}' = V_{b_2} V_{a_2}^{-1} V_{b_1}^{-1} V_{b_2}^{-1} \end{cases}$$

gegeben. Man zeigt ohne Mühe das Bestehen der Relation:

$$V_{a_1}'^{-1} V_{b_1} V_{a_1}' V_{b_1}^{-1} \cdot V_{a_2}'^{-1} V_{b_2} V_{a_2}' V_{b_2}'^{-1} = V_{a_1}^{-1} V_{b_1} V_{a_1} V_{b_1}^{-1} \cdot V_{a_2}^{-1} V_{b_2} V_{a_2} V_{b_2}^{-1},$$

welche nach Artikel II l. c. notwendig ist. Da die beiden Querschnittpaare a_1, b_1 und a_2, b_2 in (5) nicht dieselbe Rolle spielen, so ist T_{21} von T_{12} verschieden. Das Gesamtpolygon gestattet demnach für $n = 0$ im ganzen $2p$, für $n > 0$ aber $(2p-2)$ Elementartransformationen dritter Art. Natürlich treten diese Transformationen überhaupt erst für $p > 1$ auf. —

Die einzelne Transformation behält ihre volle Bedeutung unabhängig von den besonderen Werten, welche die Invarianten j_1 j_2, . . . oder (wie wir weiterhin sagen wollen) „Moduln“ des kanonischen D. B. der Gruppe Γ haben mögen. Hieraus geht einmal hervor, daß die gesamten Transformationen, welche bei der einzelnen Gruppe auftreten, selber eine Gruppe bilden, und zweitens, daß diese letztere Gruppe unabhängig von der besonderen Γ als ein Attribut der Gattung (p, n) anzusehen ist.

Dieses Ergebnis gewinnt seine einfachste Gestalt, falls wir die Moduln j_1, j_2, . . . explicite einführen. Hier besteht nämlich der wichtige Satz: Das Modulsystem des kanonischen D. B. erfährt bei einer Transformation des letzteren eine rationale und rational umkehrbare Transformation. Man beweist diesen Satz, indem man auf die Darstellung des Erzeugendensystems in den Moduln zurückgeht und von der gegenseitigen Ausdrückbarkeit des ursprünglichen und des transformierten Erzeugendensystems durch einander Gebrauch macht.

Jede einzelne Gattung, abgesehen von der niedersten (0, 3),

liefert in dieser Art eine Gruppe unendlich vieler birationaler Modultransformationen, und ich bezeichne diese Gruppe kurz als die Modulgruppe der Gattung (p, n). Sie entspricht ihrer Begriffsbestimmung nach genau der zu den „doppeltperiodischen Gruppen“:

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

gehörenden „elliptischen Modulgruppe“ und gleicht ihr in vielen wesentlichen Punkten.

Zum Zwecke geometrischer Deutung der Moduln hat man einen Raum $R_{3n+6p-6}$ höheren Grades von $(3n+6p-6)$ Dimensionen zu Grunde zu legen. Innerhalb dieses Raumes ist dann für die einzelne Gruppenfamilie (cf. l. c. Art. III) durch deren charakteristische Bedingungen ein zusammenhängender Bezirk eingegrenzt, dessen Punkte die Modulsysteme dieser Gruppen liefern. Man kann zeigen, daß innerhalb jedes solchen Bezirkes die Modulgruppe (p, n) eigentlich discontinuierlich ist. Es kommt dies schließlich auf den Umstand zurück, daß die Gruppen Γ der Gattung (p, n) frei von infinitesimalen Substitutionen sind. Die Modulgruppe der Gattung (p, n) läßt sich aus einer endlichen Anzahl von Transformationen erzeugen. In der That sind es die oben besprochenen Elementartransformationen, welche die erzeugenden Transformationen liefern.

Die Aufsuchung eines D. B. der Modulgruppe in demjenigen Teile des $R_{3n+6p-6}$, dessen Punkte Modulsysteme liefern, entspricht dem Problem, unter allen kanonischen Polygonen einer Gruppe (p, n) eines als reduciert zu charakterisieren. Man kann, um dies zu leisten, auf die Normalpolygone der Gattung (p, n) zurückgreifen und aus dem einzelnen solchen Polygone nach einer festen Vorschrift einen kanonischen D. B. herstellen. Im Falle $(0, n)$ wird man im Innern eines Normalpolygons einen Punkt fixieren und ihn mit den n festen Ecken durch Gerade verbinden, welche dann die Seiten des kanonischen Polygons liefern. Bei der Gattung (1, 1) hat man an die beiden schon oben erwähnten Netze normaler Sechsecke zu knüpfen. Es ist interessant zu bemerken, daß beide Netze congruent sind und durch diejenige elliptische Substitution der Periode zwei in einander übergehen, welche zum Fixpunkt den Pol der Verbindungsgeraden der Fixpunkte von V_a und V_b hat. Das einzelne Sechseck liefert aber durch eine einfache Construction drei reducierte kanonische D. B. Ein ähnliches Verfahren in den höheren Fällen ist im Princip nicht schwierig, läßt sich aber stets erst dann durchführen, falls man

die Kenntnis der zur Gattung (p, n) gehörenden Typen von Normalpolygonen gewonnen hat. Wie man auf Grund der Theorie der natürlichen D. B. schließen kann, gilt immer der Satz, daß für die einzelne Gruppe Γ nur eine endliche Anzahl reducierter kanonischer D. B. existiert.

Die vorstehenden Ansätze sollen am Beispiele der Gattung (1, 1) näher erläutert werden. Die Erzeugenden der einzelnen Gruppe (1, 1) schreibe man nach Art. II l. c. V_a, V_b, $V_c = V_b V_a^{-1} V_b^{-1} V_a$. Die Invarianten j_a, j_b, j_{ab} des Paares V_a, V_b sind die Moduln des zugehörigen Polygons, und für die Invariante j_c gilt:

$$j_c = j_a^2 + j_b^2 + j_{ab}^2 - j_a j_b j_{ab} - 2. \tag{6}$$

Es gelten die Gleichungen:

$$j_a > 2,\ j_b > 2,\ j_{ab} > 2. \tag{7}$$

Alle Gruppen mit $j_c < -2$ bilden eine Familie, desgleichen alle Gruppen mit $j_c = -2\cos\frac{\pi}{l}$, wo l eine bestimmte ganze Zahl >1 ist.

Zum Zwecke geometrischer Deutung führen wir rechtwinklige Raumcoordinaten x, y, z ein und setzen $j_a = x$, $j_b = y$, $j_{ab} = z$. Gleichung (6) liefert:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz - (j_c + 2) = 0 \tag{8}$$

und stellt somit ein Büschel von Flächen dritter Ordnung F_3 dar, von denen durch den einzelnen Raumpunkt stets eine und nur eine hindurchgeht.

Den Verlauf der Flächen (3) brauchen wir nur in dem durch $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ angegebenen Raumoktanten näher zu beschreiben, und es kann überdies j_c auf die Werte $j_c \leqq 0$ eingeschränkt bleiben. Innerhalb dieser Oktanten liefert nun der Einzelwert $j_c \leqq 0$ einen zusammenhängenden Flächenmantel, der in der unendlich fernen Ebene in das Dreieck $xyz = 0$ eingespannt erscheint, übrigens aber vollständig in dem Bereiche $x > 2$, $y > 2$, $z > 2$ verläuft. Für $j_c = -2$ ist überdies der Nullpunkt ein isolierter Punkt, der sich für $j_c > -2$ zu einem Oval weitet; doch kommt letzteres zufolge (7) für uns nicht in Betracht.

Die Modulgruppe der Gattung (1, 1) ist mit der elliptischen Modulgruppe genau isomorph. Combinieren wir die in (2) angegebenen Erzeugenden in der Art, daß wir direct

die den Modulsubstitutionen $\omega' = \omega + 1$ und $\omega' = \frac{-1}{\omega}$ entsprechenden Transformationen gewinnen, so erscheinen:

$$(9) \qquad \begin{cases} (S) & x' = x, \quad y' = z, \quad z' = xz - y, \\ (T) & x' = y, \quad y' = x, \quad z' = xy - z \end{cases}$$

als Erzeugende der Modulgruppe (1, 1). Die Transformation S ist aperiodisch, T von der Periode 2, und man hat:

$$(10) \qquad (TS) \quad x' = z, \quad y' = x, \quad z' = y.$$

Die Transformation $V_a' = V_a$, $V_b' = V_b^{-1}$ entspricht der Substitution zweiter Art $\omega' = -\bar{\omega}$. Durch Zusatz derselben gewinnen wir die „erweiterte Modulgruppe (1, 1)", welche sich aus den drei folgenden symmetrischen Umformungen:

$$(11) \qquad \begin{cases} x' = x, \quad y' = y, \quad z' = xy - z, \\ x' = x, \quad y' = z, \quad z' = y, \\ x' = y, \quad y' = x, \quad z' = z \end{cases}$$

erzeugen läßt.

Jede einzelne in (8) gegebene Fläche dritter Ordnung F_3 wird durch die gesamten Transformationen der Modulgruppe (1, 1) in sich selbst transformiert, und die Modulgruppe ist jedenfalls auf demjenigen (oben beschriebenen) Mantel der F_3 eigentlich discontinuierlich, dessen Punkte Modulsysteme (1, 1) ergeben. Die erweiterte Gruppe liefert auf dem Mantel der F_3 eine regulär-symmetrische Einteilung in dreiseitige Bereiche, wobei jeder einzelne Bereich sich nach einer Richtung hin ins Unendliche erstreckt und somit nur zwei im Endlichen gelegene Ecken aufweist. Die Grenzlinien der Bereiche sind algebraische Curven von steigender Ordnungszahl. Die Randcurven des Ausgangsbereiches werden zufolge (11) durch die beiden Ebenen $y = z$, $x = y$ sowie durch das hyperbolische Paraboloid $xy = 2z$ ausgeschnitten. Wir machen noch auf den Complex der sechs dreiseitigen Bereiche aufmerksam, welche den Punkt $x = y = z$, d. h. den auf F_3 gelegenen Fixpunkt der Transformation TS umgeben. Diese sechs Bereiche setzen einen größeren dreiseitigen Bereich zusammen, dessen Randcurven durch die drei Paraboloide:

$$(12) \qquad xy = 2z, \quad yz = 2x, \quad zx = 2y$$

ausgeschnitten werden, und der sich nach drei Richtungen ins Unendliche erstreckt. —

Nach der allgemeinen Theorie müssen sich die vorstehenden Entwicklungen über den D. B. der Modulgruppe (1, 1) auf der einzelnen F_s auch aus der Theorie der normalen D. B. gewinnen lassen. Um dies auszuführen, ist eine Vorbetrachtung vorauszusenden.

Es liege für eine Gruppe (1, 1) irgend ein nach Art. II l. c. gewähltes kanonisches Viereck vor. Der Mittelpunkt des letzteren ist Fixpunkt der oben bereits erwähnten elliptischen Substitution der Periode zwei, welche die Gruppe (1, 1) in sich transformiert. Der Zusatz dieser Substitution zur Gruppe (1, 1) liefert eine Gruppe (0, 4), für welche durch Hälftung des Vierecks vermöge einer Diagonale ein kanonischer D. B. entspringt. Die Seitenmitten des so zu gewinnenden Dreiecks sind die Fixpunkte der drei Erzeugenden V_1, V_2, V_3 von der Periode zwei; die Ecken des Dreiecks liefern einen Cyclus fester Ecken.

Auf Grund dieser Ergebnisse hat man folgende zwei äußerst einfache Definitionsweisen einer Gruppe (1, 1).

Erstlich kann man eine Gruppe (1, 1) durch Angabe eines Dreiecks festlegen, dessen Ecken zugleich innerhalb, auf oder außerhalb der Ellipse liegen. Im ersten und dritten Falle findet man die Seitenmitten durch einfache projective Construction; im zweiten Falle sind zwei Punkte willkürlich zu „Seitenmitten" zu wählen, und die dritte findet sich durch einfache Construction. Hiermit sind die Substitutionen V_1, V_2, V_3 und also auch die Erzeugenden $V_2V_3 = V_a$ und $V_1V_3 = V_b$ der Gruppe (1, 1) bekannt. Die Angabe der Winkelsumme des Dreiecks läuft auf die Festlegung von j_a hinaus; alle Dreiecke mit gegebener Winkelsumme bilden ein Continuum und letzterem entspricht der einzelne oben beschriebene Flächenmantel F_s.

Noch einfacher ist die Definition einer Gruppe (1, 1) durch drei im Ellipseninneren beliebig, jedoch nicht auf einer Geraden gelegene Punkte. Hier führt eine elegante Construction zu einem eindeutig bestimmten Dreieck, welches jene Punkte zu Seitenmitten hat; die drei Erzeugenden sind mit jenen drei Punkten direct gegeben. Wir nennen die drei Punkte e_1, e_2, e_3, die Längen ihrer Verbindungsgeraden $\overline{e_2e_3}$, ... bez. s_1, s_2, s_3; für letztere gelten die Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} s_1 = \log\,(j_a+\sqrt{j_a^2-4})-\log 2, \\ s_2 = \log\,(j_b+\sqrt{j_b^2-4})-\log 2, \\ s_3 = \log\,(j_{ab}+\sqrt{j_{ab}^2-4})-\log 2. \end{cases}$$

Den Uebergang vom Dreieck (0, 4) zu einem D. B. der Gruppe (1, 1) vollzieht man in folgender Weise. In den drei mit dem Ausgangsdreieck benachbarten Dreiecken fixiere man drei aequivalente Punkte und verbinde sie mit den drei Ecken des Ausgangsdreiecks. Das entspringende Sechseck, welches drei zufällige Ecken hat, und dessen Gegenseiten einander zugeordnet sind, ist ein D. B. der Gruppe (1, 1). Verbindet man eine zufällige Ecke des Sechsecks geradlinig mit den beiden anderen und verlegt die beiden hierdurch abgetrennten Dreiecke, so entspringt ein kanonischer D. B. Da man diese Construction auch umkehren kann, so folgt: Bei einer Gruppe (1, 1) liefert jeder kanonische D. B. ein Dreieck obiger Art der Seiten s_1, s_2, s_3, jedes solche Dreieck aber liefert drei kanonische D. B. Den Uebergang zwischen diesen drei D. B. vollzieht man durch cyclische Permutation der Moduln j_a, j_b, j_{ab}.

Auf der so gewonnenen Grundlage läßt sich nun die Frage nach den reducirten D. B. beantworten. Wir werden den kanonischen D. B. reduciert nennen, falls das als Durchgangsfigur benutzte Sechseck das Normalsechseck ist, von dem oben die Rede war. Die Theorie der normalen D. B. gestattet, diese Angabe noch weiter zu präcisieren. Die gesamten mit e_1, e_2, e_3 aequivalenten Punkte bilden ein in drei Classen zerfallendes reguläres Punktsystem. Es folgt, daß beim Normalsechseck kein Punkt der zweiten (zu e_2 gehörigen) Classe dem Punkte e_1 näher liegt als e_2 u. s. w. Mit Rücksicht auf (13) können wir auch sagen: Ein kanonischer D. B. der Gruppe (1, 1) soll reduciert heißen, falls das zugehörige Product $j_a j_b j_{ab}$ nicht größer ist als irgend ein bezüglich der Modulgruppe mit ihm aequivalentes Product $j'_a j'_b j'_{ab}$. Im allgemeinen sind alsdann immer drei D. B. zugleich reduciert; doch würde es nicht schwer halten, die Bestimmungen so zu präcisieren, daß der reducierte D. B. eindeutig bestimmt ist.

Die gewonnenen Ergebnisse führen zu der früheren Construction eines D. B. der Modulgruppe zurück. Ueben wir auf $j_a j_b j_{ab}$ die Operation T aus, so ist zu fordern:

$$j'_a j'_b j'_{ab} = j_b j_a (j_a j_b - j_{ab}) \leqq j_a j_b j_{ab}, \tag{14}$$

was auf $j_a j_b \leqq 2 j_{ab}$ führt. Transformieren wir T demnächst durch TS und $(TS)^2$ und üben die so zu erhaltenden Transformationen auf $j_a j_b j_{ab}$ aus, so reihen sich die beiden Bedingungen $j_a j_{ab} \leqq 2 j_b$, $j_b j_{ab} \leqq 2 j_a$ an. Wir kommen somit zu dem durch die drei Bedin-

gungen (12) eingegrenzten D. B. der Modulgruppe zurück, in dessen Innern stets drei aequivalente Punkte liegen. —

Der einzelne mit einem regulären Netze bedeckte Flächenmantel F_s ist auf die mit der bekannten Dreiecksteilung versehene ω-Halbebene analytisch, sowie (nach bekannten Sätzen von Klein) wechselweise eindeutig bezogen. Für die sehr interessante hier vorliegende Beziehung sind die neueren Untersuchungen Picard's über die partielle Differentialgleichung $\Delta u = 2ke^u$ fundamental; doch muß die nähere Behandlung dieses Gegenstandes einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben.

Braunschweig, den 15. März 1896.

Ueber die nach der elektromagnetischen Lichttheorie durch eine Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Feldstärke bedingte optische Wirkung eines elektrischen Feldes.

Von

F. Pockels.

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung vom 25. April 1896.

Während schon lange bekannt ist, daß die Magnetisirungsconstante, nicht nur die der stark magnetischen Metalle, sondern auch ihrer Oxyde und Salze, eine Function der magnetischen Feldstärke ist [1]), sind analoge Untersuchungen über die Dielektricitätsconstante noch kaum versucht [2]) und haben jedenfalls noch zu keinen sichern Resultaten geführt, was in der Schwierigkeit elektrostatischer Messungen mit hohen Spannungen seinen Grund haben mag. Dennoch ist diese Frage von Wichtigkeit für gewisse Anwendungen der elektromagnetischen Lichttheorie, wie im Folgenden erörtert werden soll. Zwar wird man berechtigt sein, die dielektrischen Eigenschaften innerhalb derjenigen Grenzen der elektrischen Feldstärke, wie sie in den intensivsten Lichtwellen vorkommen [3]), als wirklich constant zu betrachten [4]); aber es müßte sich schon eine sehr geringe Veränderlichkeit derselben bemerklich machen, wenn das von den Lichtwellen durchzogene Medium gleichzeitig einem starken constanten elektrischen Felde unterworfen wird.

Die einfachste Annahme über die hypothetische Abhängigkeit

---

1) Vgl. z. B. Plücker, Pogg. Ann. 91, 1, 1854; Ges. Abh. II, Nr. 24.

2) Cardani, Rendiconti Accad. Lincei (5) I [2], S. 48–54, 91–98, 1892.

3) Maxwell berechnete aus der Pouillet'schen Messung der Energie des Sonnenlichts die (durchschnittliche) Amplitude der elektrischen Kraft im Sonnenlicht zu ca. 0,02 $cm^{-\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} sec.^{-1}$ (Treatise on Electr. and Magn. II, S. 549).

4) Anderenfalls würden die Differentialgleichungen für die elektrische Kraft aufhören linear zu sein, woraus Abweichungen von den gewöhnlichen Gesetzen der Fortpflanzung von Lichtwellen folgen würden.

der Dielektricitätsconstanten von der Feldstärke ist die, daß sie lineare Functionen der letzteren seien. Dies ist jedoch nur bei krystallinischen Medien ohne Centrum der Symmetrie möglich, da nur in solchen die Dielektricitätsconstanten von dem Vorzeichen der elektrischen Kraft abhängen können.

Das dielektrische Verhalten eines beliebigen acentrischen Krystalls ist durch 6 „Dielektricitätsconstanten“ ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, ε_{12}, ε_{31}, ε_{23}, bestimmt, welche in der gewöhnlichen Theorie dadurch definirt sind, daß die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{31} Z, \\ \mathfrak{Y} &= \varepsilon_{12} X + \varepsilon_{22} Y + \varepsilon_{23} Z, \\ \mathfrak{Z} &= \varepsilon_{31} X + \varepsilon_{23} Y + \varepsilon_{33} Z \end{aligned}$$

die dielektrischen Polarisationen darstellen, und

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11} X^2 + \varepsilon_{22} Y^2 + \varepsilon_{33} Z^2 + 2\varepsilon_{23} YZ + 2\varepsilon_{31} ZX + 2\varepsilon_{12} XY)$$

die elektrische Energie der Volumeinheit ist. Falls nun die $\varepsilon_{\lambda\mu}$ Functionen von X, Y, Z sind, wird man sie als die partiellen Differentialquotienten der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ nach den X, Y, Z definiren, also setzen können:

$$1) \qquad \begin{aligned} d\mathfrak{X} &= \varepsilon_{11} dX + \varepsilon_{12} dY + \varepsilon_{13} dZ, \\ d\mathfrak{Y} &= \varepsilon_{21} dX + \varepsilon_{22} dY + \varepsilon_{23} dZ, \\ d\mathfrak{Z} &= \varepsilon_{31} dX + \varepsilon_{32} dY + \varepsilon_{33} dZ. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß allgemein die Aenderung der elektrostatischen Energie der Volumeinheit gegeben ist durch

$$2) \qquad dE = \mathfrak{X} dX + \mathfrak{Y} dY + \mathfrak{Z} dZ,$$

so folgt

$$3) \qquad \varepsilon_{11} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial X} = \frac{\partial^2 E}{\partial X^2}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial^2 E}{\partial Y^2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial^2 E}{\partial Z^2},$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial Z} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial Y} = \frac{\partial^2 E}{\partial Y \partial Z}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{\partial^2 E}{\partial Z \partial X}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\partial^2 E}{\partial X \partial Y}.$$

Hiermit sind gewisse Relationen zwischen den Functionen $\varepsilon_{\lambda\mu}$ gegeben, z. B.

$$4) \qquad \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial Y} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial X} = \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial Y} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial Z}.$$

In dem gegenwärtig vorausgesetzten Falle, daß die $\varepsilon_{\lambda\mu}$ lineare Funktionen der X, Y, Z sind, gehen vorstehende Relationen direct in solche zwischen den neu einzuführenden Constanten der Ansätze:

5)
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{11}^{(1)} X + \varepsilon_{11}^{(2)} Y + \varepsilon_{11}^{(3)} Z$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

über und sagen aus, daß diejenigen $\varepsilon_{\lambda\mu}^{\iota}$, die sich nur durch die Stellung der 3 Indices unterscheiden, übereinstimmende Werthe besitzen, z. B. $\varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{12}^{(1)}$, $\varepsilon_{23}^{(1)} = \varepsilon_{31}^{(3)} = \varepsilon_{12}^{(3)}$ ist. Demnach sind von den neu eingeführten Constanten nur 10 von einander verschieden, deren Zahl sich für Krystalle mit Symmetrieeigenschaften noch weiter reducirt. Es sei noch bemerkt, daß die elektrostatische Energie die Form annimmt

$$E_e = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{11}^0 X^2 + \cdots + \varepsilon_{12}^0 XY + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{11}^{(1)} X^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{12}^{(1)} X^2 Y + \varepsilon_{22}^{(1)} XY^2) + \cdots + \varepsilon_{12}^{(3)} XYZ.$$

Wir wollen hiervon eine Anwendung machen auf die Aenderung, welche die Fortpflanzung ebener Wellen in einem acentrischen Krystall durch die Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes zufolge der elektromagnetischen Lichttheorie erfahren muß, wenn dieselben dielektrischen Eigenschaften, welche das Medium bei statischen elektrischen Kräften besitzt, auch für elektrische Schwingungen von der Periode der Lichtschwingungen bestehen bleiben, d. h. wenn man von Dispersionserscheinungen absieht.

Die Amplitude der elektrischen Kräfte in den Lichtwellen ist so gering (cf. Anm. auf S. 1), daß man sie gegenüber den starken constanten äußeren elektrischen Kräften vernachlässigen, d. h. in den Formeln 5) die oscillirenden Kräfte X, Y, Z durch ihre Mittelwerthe, nämlich die gegebenen constanten Componenten X^0, Y^0, Z^0 des äußeren Feldes, ersetzen kann. Dann sind also die $\varepsilon_{\lambda\mu}$ wieder Constanten, durch welche sich das dielektrische und damit zugleich das optische Verhalten nun ebenso bestimmt, wie es vor der elektrischen Einwirkung durch die $\varepsilon_{\lambda\mu}^0$ that. Die Gleichungen enthalten dann also die Gesetze für die Aenderung der Doppelbrechung acentrischer Krystalle im elektrischen Felde, welche zuerst von Röntgen und Kundt am Quarz beobachtet ist.

Für diese Erscheinungen habe ich nun früher schon ähnliche Formeln aufgestellt, ohne eine specielle optische Theorie zu benutzen[1]). Es wurden die 6 Parameter $B_{\lambda\mu}$ des Neumann'schen Ovaloids, dessen Gleichung lautet

$$\varrho^2 = B_{11}\mu^2 + B_{22}\nu^2 + B_{33}\pi^2 + 2B_{23}\nu\pi + 2B_{31}\pi\mu + 2B_{12}\mu\nu,$$

und dessen Hauptaxen die drei Hauptlichtgeschwindigkeiten dar-

1) F. Pockels, Neues Jahrb. f. Miner. Beil. Bd. 7, 201, 1890.

stellen, als lineare Functionen der elektrischen Momente a, b, c der Volumeinheit eingeführt:

$$6) \qquad \begin{aligned} B_{11} - B_1^0 &= e_{11}'' a + e_{12}'' b + e_{13}'' c \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{23} &= e_{41}'' a + e_{42}'' b + e_{43}'' c \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Der doppelte obere Index an den e_{hk} soll andeuten, daß der Ansatz 6) nur diejenigen optischen Einwirkungen des elektrischen Feldes darstellen soll, welche nicht von einer Deformation des Krystalles herrühren; es ist demgemäß bei Benutzung früherer Bezeichnungen

$$e_{hk}'' = e_{hk} - e_{hk}',$$

wo die Constanten e_{hk} der gesammten beobachteten Wirkung, die e_{hk}' dem nur von der Deformation herrührenden und aus dieser zu berechnenden Antheil entsprechen. —

Da dieser Ansatz im Allgemeinen 18 Constanten enthält, der oben für die ε_{hk} gewonnene aber nur 10, so müssen, wenn letzterer richtig ist, zwischen den e_{hk}'' noch 8 Relationen bestehen, auch wenn keine Symmetrieeigenschaften vorhanden sind. Um diese zu finden, haben wir die Größen ε_{hk} durch die B_{hk} auszudrücken, wobei zu beachten ist, daß die ε_{hk} die Coefficienten der Gleichung des Indexellipsoids, d. h. der inversen Fläche des Ovaloids, bedeuten. Die Transformationsformeln gestalten sich sehr einfach, wenn man die Coordinatenaxen in die ursprünglichen Hauptaxen dieser Flächen (also die optischen und zugleich die dielektrischen Symmetrieaxen) legt und voraussetzt, daß die im elektrischen Felde eintretenden Aenderungen der ε_{hk} sehr klein sind gegen die ursprünglichen Werthe ε_1^0, ε_2^0, ε_3^0 der ε_{hh}. Dann ergiebt sich nämlich, wenn die Aenderungen der B_{hh} mit B_{hh}' bezeichnet werden, und v die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume ist,

$$7) \qquad \left| \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{v^2}{B_{11}} = v^2\left(\frac{1}{B_{11}^0} - \frac{B_{11}'}{B_1^{0^2}}\right) = \varepsilon_1^0 - \varepsilon_1^{0^2}\frac{B_{11}'}{v^2}, \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2^0 - \varepsilon_2^{0^2}\frac{B_{22}'}{v^2}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3^0 - \varepsilon_3^{0^2}\frac{B_{33}'}{v^2}, \\ \varepsilon_{23} &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\frac{B_{23}}{B_2^0 - B_3^0} = -\varepsilon_2^0\varepsilon_3^0\frac{B_{23}}{v^2}, \\ \varepsilon_{31} &= -\varepsilon_3^0\varepsilon_1^0\frac{B_{31}}{v^2}, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\frac{B_{12}}{v^2}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man hierin die Ausdrücke 6) für die B_{hk} und B'_{hk} ein, nachdem man darin a, b, c vermöge der Relationen

$$a = \varkappa_1 X, \quad b = \varkappa_2 Y, \quad c = \varkappa_3 Z$$

durch die elektrischen Kräfte ausgedrückt hat, und vergleicht die so erhaltenen Ausdrücke mit denen in 5), so folgen die nachstehenden Beziehungen zwischen den Constanten ε_{hk} des neuen und e''_{hk} des früheren Ansatzes:

$$8)\quad \left|\begin{array}{l}
\varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{12}^{(1)} = -\varepsilon_1^{0\,2}\frac{e''_{12}\varkappa_2}{v^2} = -\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\frac{e''_{61}\varkappa_1}{v^2},\\
\varepsilon_{11}^{(3)} = \varepsilon_{31}^{(1)} = -\varepsilon_1^{0\,2}\frac{e''_{13}\varkappa_3}{v^2} = -\varepsilon_1^0\varepsilon_3^0\frac{e''_{51}\varkappa_1}{v^2},\\
\varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{12}^{(2)} = -\varepsilon_2^{0\,2}\frac{e''_{21}\varkappa_1}{v^2} = -\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\frac{e''_{62}\varkappa_2}{v^2},\\
\varepsilon_{22}^{(3)} = \varepsilon_{23}^{(2)} = -\varepsilon_2^{0\,2}\frac{e''_{23}\varkappa_3}{v^2} = -\varepsilon_2^0\varepsilon_3^0\frac{e''_{42}\varkappa_2}{v^2},\\
\varepsilon_{33}^{(1)} = \varepsilon_{31}^{(3)} = -\varepsilon_3^{0\,2}\frac{e''_{31}\varkappa_1}{v^2} = -\varepsilon_3^0\varepsilon_1^0\frac{e''_{53}\varkappa_3}{v^2},\\
\varepsilon_{33}^{(2)} = \varepsilon_{23}^{(3)} = -\varepsilon_3^{0\,2}\frac{e''_{32}\varkappa_2}{v^2} = -\varepsilon_2^0\varepsilon_3^0\frac{e''_{43}\varkappa_3}{v^2},\\
\varepsilon_{11}^{(1)} = -\varepsilon_1^{0\,2}\frac{e''_{11}\varkappa_1}{v^2},\\
\varepsilon_{22}^{(2)} = -\varepsilon_2^{0\,2}\frac{e''_{22}\varkappa_2}{v^2},\\
\varepsilon_{33}^{(3)} = -\varepsilon_3^{0\,2}\frac{e''_{33}\varkappa_3}{v^2},\\
\varepsilon_{23}^{(1)} = \varepsilon_{31}^{(2)} = \varepsilon_{12}^{(3)} = -\varepsilon_2^0\varepsilon_3^0\frac{e''_{41}\varkappa_1}{v^2} = -\varepsilon_3^0\varepsilon_1^0\frac{e''_{52}\varkappa_2}{v^2} = -\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\frac{e''_{63}\varkappa_3}{v^2}.
\end{array}\right.$$

Dabei stehen die Größen $\varkappa$ zu den Hauptdielektricitätsconstanten ε_h^0 in der Beziehung, daß $\varepsilon_h^0 = 1 + 4\pi\varkappa_h$ ist.

Zu den 8 Relationen, welche hiernach immer zwischen den e''_{hk} bestehen, kommen in jedem einzelnen Falle noch diejenigen[1]) hinzu, welche eine Folge der Symmetrieeigenschaften des gegebenen Krystalls sind und für die e'' ebenso lauten, wie für die e' und e.

Quantitative Beobachtungen über die optischen Aenderungen

1) F. Pockels, Neues Jahrb. f. Miner. Beil. Bd. 7, S. 207—210.

acentrischer Krystalle im elektrischen Felde sind bisher nur am Natriumchlorat, Seignettesalz und Quarz ausgeführt worden[1]). Beim regulär-tetartoëdrischen Natriumchlorat sind nach Symmetrie alle $e''_{hk} = 0$ bis auf e''_{41}, e''_{52}, e''_{63}, welche unter sich gleich sind; ferner ist $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$, $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = \varepsilon_3^0$. Demnach ergeben die Gleichungen 8) nichts Neues. Anders ist es beim Seignettesalz, wo zwar auch nur e''_{41}, e''_{52}, e''_{63} von Null verschieden sein können, aber aus bloßen Symmetriegründen in keiner gegenseitigen Beziehung stehen; hier ergiebt daher die letzte der Relationen 8) eine neue quantitative Beziehung zwischen $e''_{41}\varkappa_1$, $e''_{52}\varkappa_2$, $e''_{63}\varkappa_3$; es müssen nämlich diese Größen den entsprechenden Hauptdielektricitätsconstanten ε_1^0, ε_2^0, ε_3^0 proportional sein. Eine Prüfung dieses Resultates an den vorliegenden Beobachtungen ist indessen bisher nicht möglich, da die Elasticitätsconstanten, deren Kenntniß für die Berechnung der Größen e'_{hk} erforderlich ist, beim Seignettesalz noch nicht bestimmt sind, und somit aus den direkt beobachteten $e_{hk}\varkappa_k$ die $e''_{hk}\varkappa_k$ nicht gewonnen werden können. Beim Quarz hingegen sind wir im Besitze aller nöthigen Constanten. Legt man die Z-Axe des Coordinatensystems in die 3-zählige Symmetrieaxe, die X-Axe in eine der 2-zähligen, so sind nach Symmetrie von den e''_{hk} nur folgende von Null verschieden:

$$e''_{62} = e''_{21} = -e''_{11}, \quad e''_{41} = -e''_{52}.$$

Da dann auch $\varkappa_2 = \varkappa_1$ und $\varepsilon_2^0 = \varepsilon_1^0$ ist, so folgt aus den Beziehungen 8) außerdem noch

$$e''_{41} = e''_{52},$$

was mit Obigem nur vereinbar ist, wenn

$$e''_{41} = e''_{52} = 0 \text{ ist.}$$

Es kann also, wenn die Grundlage obiger Entwicklungen richtig ist, nur $e''_{11} = -e''_{21} = -e''_{62}$ von Null verschieden sein. Die Beobachtungen ergaben nun (l. c. S. 148):

$$\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} = 1{,}40 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2} = 0{,}586 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{e'_{11}\varkappa_1}{v^2} = 0{,}67 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{e'_{41}\varkappa_1}{v^2} = 0{,}423 \cdot 10^{-6}.$$

Hiernach ist in Wirklichkeit

1) F. Pockels, Einfluß des elektrostatischen Feldes auf das optische Verhalten piëzoelektrischer Krystalle, Abh. Ges. d. Wiss. Göttingen, 39, 1894.

$$\frac{e''_{11}\varkappa_1}{v^2} = 0,73 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{e''_{41}\varkappa_1}{v^2} = 0,163 \cdot 10^{-6}.$$

Es ist also zwar e''_{41} sehr klein gegen e''_{11}, aber doch noch merklich von Null verschieden. Daraus müßte man schließen, daß die Annahme einer Abhängigkeit der dielektrischen Constanten von den elektrischen Kräften beim Quarz noch nicht ausreicht, um den Einfluß des elektrischen Feldes auf die Doppelbrechung, welcher nach Abzug der indirecten Einwirkung der gleichzeitig stattfindenden Deformation übrig bleibt, zu erklären. Indessen ist dieser Schluß deshalb nicht ganz sicher, weil bei der ganzen vorhergehenden Entwicklung die Voraussetzung gemacht ist, daß dieselben Dielektricitätsconstanten für statische Zustände und für Lichtschwingungen maaßgebend seien; dies trifft aber durchaus nicht zu, da die Dielektricitätsconstanten des Quarzes viel größer sind, als sie nach der Maxwell'schen Relation sein müßten. —

Bei Krystallen, welche ein Symmetriecentrum besitzen, und bei isotropen Körpern müssen die Zusatzglieder, welche die Abhängigkeit der Dielektricitätsconstanten von den elektrischen Kräften darstellen, gerade Functionen der letzteren sein und können also in erster Annäherung als quadratische Functionen eingeführt werden. Es wird also an Stelle von 5) allgemein der Ansatz zu machen sein:

$$9) \quad \left| \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \varepsilon^0_{11} + \eta_{11} X^2 + \eta_{12} Y^2 + \eta_{13} Z^2 + 2\eta_{14} YZ + 2\eta_{15} ZX + 2\eta_{16} XY, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{12} = \quad \eta_{61} X^2 + \eta_{62} Y^2 + \eta_{63} Z^2 + 2\eta_{64} YZ + 2\eta_{65} ZX + 2\eta_{66} XY. \end{array} \right.$$

Da wieder die Beziehungen 4) gelten müssen, so folgt für alle Indices h und k

$$\eta_{hk} = \eta_{kh},$$

und außerdem

$$\eta_{44} = \eta_{23}, \quad \eta_{55} = \eta_{31}, \quad \eta_{66} = \eta_{12},$$
$$\eta_{45} = \eta_{36}, \quad \eta_{46} = \eta_{25}, \quad \eta_{56} = \eta_{14}.$$

Hierdurch reducirt sich die Zahl der Constanten im allgemeinsten Fall bereits auf 15, entsprechend den 15 Gliedern der im Ausdrucke für die elektrische Energie hinzukommenden Function 4. Grades:

$$\tfrac{1}{12}\eta_{11} X^4 + \cdots + \tfrac{1}{3}\eta_{16} X^3 Y + \cdots + \tfrac{1}{2}\eta_{12} X^2 Y^2 + \cdots + \eta_{14} X^2 YZ.$$

Eine weitere Verringerung der Constantenzahl ergiebt sich für die Krystallgruppen mit Symmetrieeigenschaften; es muß nämlich das Constantensystem der η_{kl} dieselbe Symmetrie besitzen, wie dasjenige der Elasticitätsconstanten [1]). So ergiebt sich z. B. für reguläre, centrisch symmetrische Krystalle das System:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \varepsilon^0 + \eta_{11} X^2 + \eta_{12} Y^2 + \eta_{12} Z^2, \\
\varepsilon_{22} &= \varepsilon^0 + \eta_{12} X^2 + \eta_{11} Y^2 + \eta_{12} Z^2, \\
\varepsilon_{33} &= \varepsilon^0 + \eta_{12} X^2 + \eta_{12} Y^2 + \eta_{11} Z^2, \\
\varepsilon_{23} &= 2\eta_{12} YZ, \\
\varepsilon_{31} &= 2\eta_{12} ZX, \\
\varepsilon_{12} &= 2\eta_{12} XY.
\end{aligned}$$

Bei isotropen Körpern kommt noch die Relation

$$\eta_{66} = \eta_{12} = \tfrac{1}{2}(\eta_{11} - \eta_{12})$$

hinzu, so daß wird

$$\eta_{12} = \tfrac{1}{3}\eta_{11}.$$

Macht man auch für den hier betrachteten Fall einen zu 6) analogen Ansatz, indem man die nicht von der Elektrostriction herrührenden Aenderungen der Größen B_{kl} als Functionen der influenzirten elektrischen Momente betrachtet [2]):

$$\begin{aligned}
B_{11} - B_1^0 &= k_{11} a^2 + k_{12} b^2 + k_{13} c^2 + 2k_{14} bc + 2k_{15} ca + 2k_{16} ab, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
B_{23} &= k_{41} a^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + 2k_{46} ab, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{10}$$

so bestehen zwischen den Constanten k und η folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&\eta_{11} = -\varepsilon_1^{0^2}\frac{k_{11}\varkappa_1^2}{v^2}, \quad \eta_{12} = -\varepsilon_1^{0^2}\frac{k_{12}\varkappa_2^2}{v^2}, \ \ldots\ \eta_{16} = -\varepsilon_1^{0^2}\frac{k_{16}\varkappa_1\varkappa_2}{v^2}, \\
&\eta_{21} = -\varepsilon_2^{0^2}\frac{k_{21}\varkappa_1^2}{v^2}, \ \ldots\ \eta_{26} = -\varepsilon_2^{0^2}\frac{k_{26}\varkappa_1\varkappa_2}{v^2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\eta_{61} = -\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\frac{k_{61}\varkappa_1^2}{v^2} \ \ldots\ \eta_{66} = -\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\frac{k_{66}\varkappa_1\varkappa_2}{v^2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Hiernach sind leicht die Relationen zu bilden, welche zwischen

1) Vergl. W. Voigt, Compendium der theoretischen Physik, I, S. 143.
2) F. Pockels, Neues Jahrb. f. Mineral. Beil. Bd. 7, S. 204.

den verschiedenen k_{mn} selbst bestehen. Indessen haben diese zunächst geringes Interesse, da Beobachtungen über Aenderungen der Doppelbrechung von centrischen Krystallen im elektrischen Felde nicht existiren und auch, da es sich um Wirkungen zweiter Ordnung handelt, höchstens bei optisch isotropen oder einaxigen Krystallen mit Aussicht auf Erfolg zu versuchen wären.

Dagegen sind bei isotropen Körpern — Glas und verschiedenen gut isolirenden Flüssigkeiten — unter dem Namen des Kerr'schen Phaenomens Erscheinungen bekannt, welche den durch obige Formeln ausgedrückten wenigstens qualitativ entsprechen. Für isotrope Körper erhält man:

$$12) \qquad k_{11} = 3k_{12} = -\frac{\eta_{11} v^2}{\varepsilon_0^2 \varkappa^2} = -\left(\frac{4\pi}{\varepsilon_0(\varepsilon_0 - 1)}\right)^2 v^2 \eta_{11},$$

also, wenn m das Gesammtmoment der Volumeinheit, und ω^0 die ursprüngliche Lichtgeschwindigkeit bezeichnet,

$$\begin{aligned} B_{11} &= \omega^{0^2} + k_{12}(2a^2 + m^2) \\ B_{22} &= \omega^{0^2} + k_{12}(2b^2 + m^2) \\ B_{33} &= \omega^{0^2} + k_{12}(2c^2 + m^2) \\ B_{23} &= 2k_{12} bc \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

oder bei Einführung der Feldstärke K und ihrer Componenten:

$$\frac{\omega^{0^2} - B_{11}}{v^2} = \frac{\eta_{12}}{\varepsilon_0^2}(2X^2 + K^2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{B_{23}}{v^2} = -\frac{\eta_{12}}{\varepsilon_0^2} \cdot 2YZ$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da $\omega^{0^2} = \frac{v^2}{\varepsilon_0}$ ist, so kann man auch schreiben

$$13) \qquad \begin{aligned} 1 - \frac{B_{11}}{\omega^{0^2}} &= \eta(2X^2 + K^2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{B_{23}}{\omega^{0^2}} &= -2\eta YZ, \end{aligned}$$

wo die Constante $3\eta = \frac{3\eta_{12}}{\varepsilon_0}$ die Bedeutung der relativen Zunahme der Dielektricitätsconstante durch ein Feld von der Stärke Eins, dessen Kraftlinien in die Richtung der neu hinzukommenden Polarisation fallen, besitzt.

Bei isotropen Körpern hindert nun nichts, eine der Coordinatenaxen, z. B. die Z-Axe, mit der Richtung der Kraftlinien des gegebenen elektrischen Feldes zusammenfallen zu lassen; dann wird $X = Y = 0$, $Z = K$, und somit

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{B_{11}}{\omega^{0^2}} &= \eta K^2, \\
1 - \frac{B_{22}}{\omega^{0^2}} &= \eta K^2, \\
1 - \frac{B_{33}}{\omega^{0^2}} &= 3\eta K^2, \\
B_{23} = B_{31} &= B_{12} = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Ein dielektrisch polarisirtes isotropes Medium verhält sich demnach wie ein einaxiger Krystall, dessen Axe der Isotropie in die Richtung der Kraftlinien fällt, und dessen Hauptlichtgeschwindigkeiten ω_o, ω_e, gegeben sind durch

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega^{0^2} - \omega_o^2}{\omega^{0^2}} &= \eta K^2, \\
\frac{\omega^{0^2} - \omega_e^2}{\omega^{0^2}} &= 3\eta K^2.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Die Doppelbrechung bestimmt sich durch

$$
\frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{\omega^{0^2}} = 2\eta K^2 \tag{14'}
$$

ist also proportional dem Quadrat der Feldstärke, was auch aus den vorhandenen Messungen hervorzugehen scheint. Ihr Charakter ist positiv oder negativ, je nachdem $\eta < 0$ oder > 0 ist, d. h. je nachdem die Dielektricitätsconstante mit der Feldstärke ab- oder zunimmt. Beide Fälle erscheinen von vornherein möglich, es widerstreitet also der hier gegebenen Deutung der Kerr'schen Doppelbrechung nicht, dass dieselbe bei einigen Substanzen positiv, bei anderen negativ ist.

Im Widerspruch zu obigen Formeln stehen dagegen die Beob-

achtungen, welche Kerr neuerdings an vier verschiedenen Flüssigkeiten mittelst des Jamin'schen Interferentialrefractors über die absoluten Geschwindigkeitsänderungen gemacht hat[1]). Diese ergaben nämlich, daß stets nur die außerordentliche Welle eine Geschwindigkeitsänderung erleidet, die ordentliche hingegen ihre Geschwindigkeit unverändert beibehält. Dies bedeutet in der Sprache der elektromagnetischen Lichttheorie, daß nur die Fortpflanzung derjenigen Wellen, in denen die elektrischen Schwingungen eine den Kraftlinien des constanten Feldes parallele Componente haben, durch letzteres beeinflußt wird. Demgegenüber ergeben die Formeln 14), daß die Geschwindigkeit der ordentlichen Welle ebenfalls geändert wird, wenn auch nur um den dritten Theil der Geschwindigkeitsänderung der senkrecht zu den Kraftlinien fortschreitenden außerordentlichen Welle. Eine entscheidende Bedeutung dürfte indessen diesem Widerspruch noch nicht beizulegen sein, da die an sich schon sehr schwierigen Beobachtungen über die absoluten Verzögerungen mannigfachen Fehlerquellen ausgesetzt sind, wie auch die von Kerr beschriebenen unregelmäßigen Streifenverschiebungen zeigen. Wenn auch die eine dieser Fehlerquellen, nämlich die Erwärmung der Flüssigkeit durch die nie ganz fehlende elektrische Leitung, durch die Kerr'sche Beobachtungsmethode (Beobachtung der Phasenänderungen im Momente der Entladung) ziemlich unschädlich gemacht sein mag, so gilt z. B. sicher nicht dasselbe von dem Einfluß, welchen eine infolge von Electrostriction eintretende Dichtigkeitsänderung der zwischen den Conductorplatten befindlichen Flüssigkeit auf die Lichtgeschwindigkeit haben kann. Es muß daher einer Wiederholung der Versuche unter sorgfältiger Berücksichtigung dieser und ähnlicher Fehlerquellen die Entscheidung vorbehalten bleiben, ob die Kerr'sche Doppelbrechung sich nicht doch durch eine Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Feldstärke erklären läßt.

Inzwischen läßt sich aus unseren Formeln nur der umgekehrte Schluß ziehen, daß nämlich — wenn die Grundannahme richtig ist — die Dielektricitätsconstante aller hinsichtlich des Kerr'schen Phaenomens untersuchten durchsichtigen Dielektrica nur äußerst wenig mit der Feldstärke variiren kann; denn andernfalls müßte eine dielektrische Polarisation viel stärkere Doppelbrechung hervorrufen, als beobachtet wird. Im Schwe-

1) Kerr, Phil. Mag. (5) 37, S. 380—394, 1894. Vergl. dazu auch Quincke, ibid. S. 508.

felkohlenstoff, welcher das Kerr'sche Phaenomen am stärksten zeigt, betrug die relative Geschwindigkeitsänderung durch die bei den letztgenannten Versuchen Kerrs angewandte, jedenfalls sehr beträchtliche, maximale Feldstärke $\frac{5}{4}$ Wellenlängen auf einer Wegstrecke von ca. 180 mm; daraus folgt nach 14')

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon^0}{\varepsilon^0} = 3\eta K^2 = \frac{8}{3}\frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{\omega^{0^2}} = 3\frac{\omega_e - \omega_o}{\omega^0} = 3 \cdot \frac{720}{180} \cdot 10^{-6} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}.$$

Eine so geringfügige Aenderung der Dielektricitätsconstante würde aber durch elektrische Messungen in keiner Weise nachweisbar sein. In der That sind, wie schon bemerkt, zuverlässige Beobachtungen, welche eine Abweichung von der Proportionalität zwischen dielektrischer Polarisation und elektrischer Kraft erkennen ließen, bisher nicht vorhanden. —

Göttingen, im März 1896.

Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (IV).

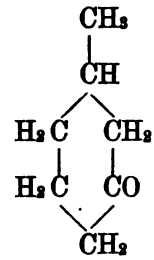
Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Mai 1896.

Ueber Condensationsproducte cyclischer Ketone und Synthesen innerhalb der Terpengruppe.

Wie ich kürzlich besprach[1]), kann man durch hydrolytische Spaltung des Pulegons sehr leicht zu dem cyclischen Methylhexanon:



gelangen.

Auch war bereits angedeutet, daß diese Verbindung zum synthetischen Aufbau von Verbindungen der Terpenreihe geeignet zu sein scheine. Eingehendere Versuche haben gezeigt, daß das Methylhexanon eine Verbindung von außerordentlicher Reactionsfähigkeit ist und sich namentlich leicht zu Condensationen herleiht, die, je nach Umständen, sich besser unter Anwendung von trockener Salzsäure oder von Natriumäthylat, oder auch von wäßriger Natronlauge abspielen.

Bicyclisches Keton $C_{14}H_{22}O$.

Leitet man in das Methylhexanon trockenes Salzsäuregas ein, so erstarrt die Flüssigkeit sehr bald zu einem Krystallbrei. Die

1) Nachr. d. K. G. d. W. 1895, 307 u. Ann. d. Chem. 289, 337.

aus Methylalkohol umkrystallisirten Krystalle schmelzen bei 90° und zeigen nach den Analysen die Zusammensetzung $C_{14}H_{23}OCl$. Diese Substanz ist das Salzsäure-Additionsproduct des Ketons $C_{14}H_{22}O$, das ich in Gemeinschaft mit Herrn Dorrance eingehender zu untersuchen im Begriff bin.

Bis jetzt ist Folgendes festgestellt. Ebensogut wie mit Salzsäure kann man das Methylhexanon mit Bromwasserstoffsäure condensiren. Es resultirt dabei die bei 77—78° schmelzende Verbindung $C_{14}H_{23}OBr$. Beide Verbindungen können durch Halogenwasserstoff bindende Agentien in das Keton $C_{14}H_{22}O$ übergeführt werden. Da die Bromwasserstoffverbindung sich leichter zersetzt, gingen wir von dieser aus. Durch kurzes Erhitzen mit Anilin wurde die Halogenwasserstoffsäure abgespalten und das in geeigneter Weise vom Anilin befreite Product mit Dampf destillirt, getrocknet und im Vacuum fractionirt.

Bei 10 mm destillirte zwischen 143—144° ein dickes, schwach riechendes Oel von der Zusammensetzung $C_{14}H_{22}O$.

Analyse:	Ber. für $C_{14}H_{22}O$				
	Procente:	C	81.55	H	10.68
Gef.	„	„	81.53	„	10.84.

Diese Substanz ließ sich glatt in ein gut krystallirtes, bei 152° schmelzendes Oxim überführen.

Analyse:	Ber. für $C_{14}H_{22}NOH$					
	Procente:	C	76.02		H	10.42	
Gef.	„	„	75.86	75.98	„	10.67	10.90.

Bei der Reduction geht das Oxim in eine krystallisirte, bei etwa 50° schmelzende und bei 20 mm zwischen 165—166° siedende Base $C_{14}H_{23}NH_2$ über.

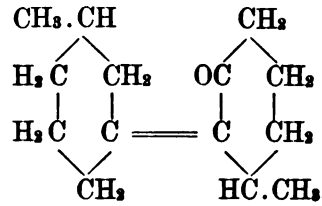
Das Chlorhydrat $C_{14}H_{23}NH_2.HCl$ ist im Wasser ziemlich schwer löslich.

Analyse:	Ber. für $C_{14}H_{26}NCl$					
	Procente:	C	69.00	H	10.68	Cl 14.58
Gef.	„	„	68.91	„	10.90	„ 13.89.

Das gutkrystallisirte Nitrat der Base läßt sich wegen seiner Schwerlöslichkeit durch Zusatz einer Salpeterlösung zu einer Lösung des Chlorhydrats ausfällen. Der Chlorplatinat ist auch gut krystallisirt.

Das Keton $C_{14}H_{22}O$ addirt Brom und giebt damit eine feste, krystallisirte Verbindung. Durch Salzsäureaddition entsteht dasselbe Chlorhydrat, welches bei der directen Condensation des

Methylhexanons auftritt. Die Constitution der Verbindung dürfte in folgender Formel ihren richtigen Ausdruck finden:



Es wäre aber auch möglich, daß die Condensation in der Parastellung zu dem einem Methyl Platz griffe.

Jedenfalls darf man die Halogenwasserstoff-Additionsproducte des Ketons als Derivate eines vollkommen hydrirten Bitolyls ansprechen.

Benzyliden-Methylhexanon, $C_7H_{10}O:CHC_6H_5$.

Das cyclische Methylhexanon condensirt sich bei Anwesenheit von Salzsäure so leicht zu dem eingangs erwähnten Chlorid der bimolekularen Verbindung, daß die Einführung anderer Verbindungsreste in das Keton bei Gegenwart trockener Salzsäure sich als recht schwierig, wenn auch nicht als ganz unmöglich erwiesen hat. Dagegen läßt sich mit Hülfe alkalischer Condensationsmittel leicht eine ganze Reihe neuer interessanter Verbindungen erzielen. Unter diesen verdienen u. a. die durch Wechselwirkung von Amylnitrit und von Amylformiat bei Gegenwart von Natriumaethylat gewonnenen Producte Erwähnung, namentlich aber die Condensationsproducte mit Aldehyden und Ketonen.

Ein Gemisch gleicher Moleküle Methylhexanon und Benzaldehyd erleidet beim Hinzugeben einer concentrirten Auflösung von Natriumaethylat augenblicklich Condensation. Das Reactionsproduct wird durch Wasser ölig gefällt. Destillirt man es im Vacuum, so geht es als eine dicke, bei 13 mm zwischen 190—200° siedende Flüssigkeit über, die bald krystallinisch erstarrt. Die sehr löslichen Krystalle sind nach dem Umkrystallisiren aus Aether fast farblos und schmelzen bei 59°.

Analyse: Ber. für $C_7H_{10}O:C_7H_6$
Procente: C 84.00 H 8.00
Gef. „ „ 83.97 „ 8.16.

Mit Hydroxylamin behandelt liefert die Benzyliden-Verbindung leicht ein Oxim, das aus verdünntem Alkohol in farblosen, bei 109—110° schmelzenden, durchsichtigen Prismen heraus kommt.

Analyse: Ber. für $C_{14}H_{16}NOH$
Procente: N 6.53
Gef. „ „ 6.59.

Dibenzyliden-Methylhexanon, $C_6H_5CH:C_7H_8O:CHC_6H_5$.

Die Verbindung bildet sich ebenso leicht und unter denselben Bedingungen wie die vorige, wenn man 2 Mol. Benzaldehyd auf 1 Mol. Keton in Anwendung bringt. Sie ist intensiv gelb gefärbt und schwer löslich in Alkohol, aus dem sie in kleinen, bei 127—128° schmelzenden Nadeln krystallisirt.

Analyse: Ber. für $C_{21}H_{20}O$
Procente: C 87.48 H 6.96
Gef. „ „ 87.42 „ 7.07.

Ebenso gut wie mit Benzaldehyd kann der Methylhexanon auch mit Nitrobenzaldehyd, mit Zimmtaldehyd u. s. w. condensirt werden. Viel größeres Interesse bietet die Thatsache, daß auch ein Condensationsproduct des Ketons mit Aceton beobachtet werden konnte. Der Vorgang vollzieht sich aber langsam und nach mehrwöchentlicher Berührung zwischen Methylhexanon und Aceton in alkoholisch-alkalischer Lösung fand sich immer noch ein beträchtlicher Theil des ersteren unverändert vor. Daneben war aber ein ähnlich wie Pulegon riechender und siedender Körper entstanden. Ob diese Verbindung mit Pulegon identisch oder damit isomer ist, war noch nicht mit Sicherheit festzustellen und soll das Nähere hierüber einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Die Bildung der vorstehend beschriebenen Verbindungen beweist, daß das Cyclo-Methylhexanon sich in Hinsicht auf seine Condensationsfähigkeit genau so verhält, wie Aceton. Die Mono- und Di-benzyliden-Verbindung ähneln beiläufig auch in ihren äußeren Eigenschaften ganz ungemein dem Benzyliden- und Dibenzyliden-Aceton. Die Aehnlichkeit des Verhaltens der cyclischen Verbindung mit dem Aceton wird unzweifelhaft bedingt durch die Beweglichkeit der Wasserstoffatome in den dem Carbonyl benachbart stehenden Methylengruppen[1]), wie das Claisen für die kettenförmigen Ketone in so vielen Fällen nachgewiesen hat.

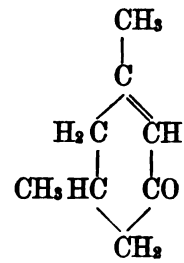
Nach den bei dem Methylhexanon gemachten Erfahrungen kann es keinem Zweifel unterliegen, daß alle gesättigten cyclischen

1) Auf das eigenthümliche Verhalten des Methylhexanon gegen metallisches Natrium, mit dem er eine feste Verbindung liefert, soll bei anderer Gelegenheit eingegangen werden.

Hexanone, in welchen die dem Carbonyl benachbarten Methylene nicht substituirt sind, sich analog wie jenes verhalten müssen. So läßt sich z. B. mit Sicherheit voraus sagen, daß sich aus dem von Wislicenus und Mager[1]) aus Pimelinsäure gewonnenen Hexanon $C_6H_{10}O$ entsprechende Verbindungen, wie die erst beschriebenen, werden darstellen lassen. Man wird von ihm ausgehend auf dem nun vorgezeichneten Wege z. B. zu vollkommen hydrirten Derivaten des Diphenyls, zu einem niederen Homologen des Pulegon und Menthol gelangen können u. s. f.

Wie werden sich aber gegen Aldehyde und Ketone die cyclischen Hexanone verhalten, welche dem Carbonyl benachbart nur eine Methylengruppe tragen und wie, im Vergleich mit den vollkommen hydrirten, die ungesättigten Ringketone?

In der Litteratur habe ich diesbezüglich schon zwei vereinzelte Angaben gefunden. Haller[2]) hat durch den Natriumcampher hindurch Benzylidencampher und einige analoge Verbindungen hergestellt. Knövenagel[3]) hat das auch durch Hagemann's[4]) Untersuchungen bekannt gewordene Cyclodimethyl (1.5) hexenon



mit Benzaldehyd condensiren können. Der interessantere Versuch, das Keton mit Aceton zu condensiren ist noch nicht gemacht worden.

Die folgenden Versuche lehren, daß manche Ketone der Terpenreihe sich so leicht z. B. mit Benzaldehyd in Umsetzung bringen lassen, daß die Reaction für Entscheidung von Constitutionsfragen weit bequemer herangezogen werden kann, als die Darstellung der Oxymethylenverbindungen. Die Bedingungen unter denen die Condensationen sich vollziehen sind aber auffallend verschieden. Z. B. condensirt sich Menthon bei Anwendung von Natriumaethylat nicht oder wenigstens nur langsam und unvollständig, Pulegon sofort.

1) Annal. d. Chem. 275, 361.
2) Ber. d. chem. Ges. 24, R. 732.
3) Ebend. 26, 876.
4) Annal. d. Chem. 281, 117.

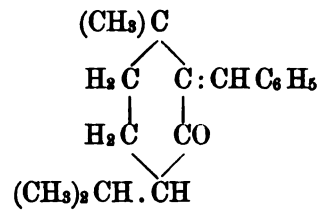
Benzyliden-Menthon.

Das Menthon condensirt sich mit einigen aromatischen Aldehyden mit überraschender Leichtigkeit, aber die Condensationsbedingungen sind ganz andere, wie beim Methylhexanon.

Leitet man in ein Gemisch gleicher Moleküle, Menthon und Benzaldehyd trockenes Salzsäuregas ein; so erstarrt die Masse sehr bald zu einem Krystallbrei, der aus dem Salzsäure-Additionsproduct des Benzyliden-Menthons besteht. Man überläßt das Product zweckmäßig vierundzwanzig Stunden sich selbst, wäscht es dann mit Natronlauge durch, saugt es auf Thon ab und krystallisirt aus heißem Alkokol um. Man erhält so blendend weiße Krystallnadeln vom Schmelzpunkt 140° und der Zusammensetzung $(C_{10}H_{16}O . C_7H_6) . HCl$.

Analyse: Ber. für $C_{17}H_{23}OCl$
Procente: Cl 12.73
Gef. „ „ 12.25.

Kocht man die chlorhaltige Substanz mit Natriumaethylat, so wird sehr leicht Salzsäure abgespalten und man erhält das freie Benzyliden-Menthon, dem man die Structurformel



geben darf.

Die Verbindung stellt ein dickes, bei 12 mm zwischen 188–189° siedendes Oel vor. Salzsäure verbindet sich damit wieder zu dem eben erwähnten Chlorid, beim Schütteln des Oels mit Eisessig-Bromwasserstoff entsteht sofort das entsprechende, gut krystallisirte, bei 115—116° unter Aufschäumen schmelzende Bromid.

Hydroxylamin verwandelt das Keton leicht in das Benzyliden-Menthonoxim; $C_{10}H_{16}NOH : C_7H_6$.

Dasselbe ist verhältnißmäßig schwer löslich in Aether und Alkohol und krystallisirt aus diesen Lösungsmitteln in wolligen, bei 160—161° schmelzenden Nadeln.

Die Reductionsproducte dieser Verbindungen sollen später beschrieben werden.

Ueber das Verhalten ungesättigter Ringketone der Terpenreihe mag vorläufig Folgendes mitgetheilt werden.

Benzyliden-Pulegon.

Wie sich erwarten ließ ist Pulegon unter denselben Bedingungen wie Methylhexanon mit 1 Mol. Benzaldehyd condensirbar. Die neue Verbindung ist ein bei 12 mm zwischen 202—203° siedendes, dickes Oel.

Besonders leicht sind die Verbindungen $C_{10}H_{14}O$ aus der Terpenreihe der Condensation zugänglich. Fügt man zu einem Gemisch von 1 Mol. Carvon und 1 Mol. Benzaldehyd Natriumaethylat, so erwärmt sich das Gemisch und wird dunkel. Nach etwa 24 Stunden ist von dem Geruch der Ausgangsmaterialien fast nichts mehr wahrzunehmen und auf Zusatz von Wasser zu der dicken Masse fällt ein allmählich fest werdender Harzkuchen. Diese Substanz ist noch nicht näher untersucht.

Eucarvon[1]) condensirt sich bei Gegenwart von Benzaldehyd und Natriumaethylat sehr schnell. Als Reactionsproducte wurden zwei Verbindungen isolirt. Die eine ist in Alkohol sehr schwerlöslich und wird am besten aus einem Gemisch von Chloroform und Alkohol umkrystallisirt. Die so erhaltenen, schneeweißen Blätter schmelzen bei 193—194°. Die zweite Verbindung krystallisirt in meßbaren, bei 112—113° schmelzenden Krystallen und hat die Zusammensetzung $C_{10}H_{12}O : CHC_6H_5$.

In allen bisher besprochenen Fällen waren es Derivate cyclischer Hexanone, welche zur Condensation gebracht wurden. Ich habe meine Aufmerksamkeit aber auch auf einige Ketone anderer Ringsysteme gerichtet und mich in der Erwartung nicht getäuscht, daß sie ein ganz entsprechendes Verhalten zeigen würden.

Dibenzyliden-Suberon $C_6H_5CH : (C_7H_8O) : CHC_6H_5$.

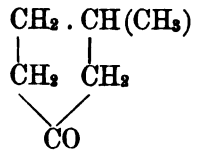
Als cyclisches Heptanon wird jetzt bekanntlich das Suberon aufgefaßt. Eine sehr kleine Menge, welche mir von einem Präparat noch zu Gebote stand, das ich der Freundlichkeit des Herrn Markowinkoff verdanke, genügte vollkommen, um die große Condensationsneigung des Suberon nachzuweisen. Mit zwei Mol. Benzaldehyd und etwas Natriumaethylat vermischt, condensirt es sich sofort. Die entstandene Verbindung bildete nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol fast farblose Krystalle vom Schmelzpunkt 107—108°.

Analyse: Ber. für $C_7H_8O(C_7H_6)_2$
Procente: C 87.48 H 6.96
Gef. „ „ 87.43 „ 6.96.

1) Ueber die Condensation des Eucarvon bei der Reduction mit Zink- und Natronlauge s. Nachr. d. K. G. d. W. 1895, S. 182.

Dibenzyliden-Methylpentanon $C_6H_5CH:C_6H_6O:CHC_6H_5$.

Als Repräsentanten eines cyclischen Pentanons bin ich in Gemeinschaft mit Herrn Ruete in Begriff das leicht zugängliche Methylpentanon



nach der in Betracht kommenden Richtung zu prüfen. Die Ausgangsverbindung ist zuerst von Semmler[1]) aus β-Methyladipinsäure erhalten und als ein β-Methylketopentamethylen characterisirt worden.

Das Methylpentanon verhält sich ganz ähnlich wie Methylhexanon und wie Suberon. Man kann es mit einem oder mit 2 Mol. Benzaldehyd condensiren.

Die letztere Verbindung bildet gelbe, in Alkohol ziemlich schwer lösliche Krystalle vom Schmelzpunkt 149—151°.

Analyse:	Ber. für $C_{20}H_{18}O$			
	Procente:	C 87.59	H	6.57
Gef.	„	„ 87.07	„	6.99.

Ebenso wie das Methylhexanon läßt sich auch das Methylpentanon mit Aceton und Alkali condensiren. Aber auch hier braucht die Condensation längere Zeit und verläuft weniger glatt. Man sollte auf diesem Wege zu einem Phoron gelangen können und in der That haben wir unter den Condensationsproducten eine vom Acetophoron verschiedene, aber ähnlich wie dieses riechende und siedende Verbindung gefunden, die ein bei 85—87° schmelzendes Phoronoxim lieferte.

Analyse:	Ber. für $C_9H_{14}:NOH$			
	Procente:	C 70.58	H	9.80
Gef.	„	„ 70.74	„	10.42.

Der weitere Ausbau der eben mitgetheilten Versuche, bei denen mich Herr Dr. R. Guericke bestens unterstützt hat, bleibt vorbehalten.

1) Ber. chem. Ges. 25, 3517.

Ueber
die Principien von Hamilton und Maupertuis.

Von

O. Hölder in Tübingen.

(Vorgelegt von F. Klein).

In der Einleitung zu seiner Mechanik hat Heinrich Hertz gesagt [1]), daß das Hamiltonsche Princip manchmal physikalisch falsche Resultate ergebe. Zum Beleg führt er einen Fall an, in dem man, wie er selbst bemerkt, durch bloße Betrachtung ohne Rechnung sowohl die Bewegungen, die ausgeführt werden können, als auch diejenigen, welche dem Hamilton'schen Princip entsprechen würden, übersieht. Hertz fügt noch hinzu, daß das Ergebniß sich nicht ändert, wenn man statt des Princips von Hamilton das Maupertuis'sche Princip der kleinsten Wirkung benutzt. Betrachten wir sein Beispiel. Es besteht in einer Kugel, die allein ihrer Trägheit folgend auf einer festen horizontalen Ebene ohne Gleitung rollt [2]). Die Bewegungen, die dem Hamilton'schen Princip entsprechen, sind hier nach Hertz solche, die bei gegebener constanter lebendiger Kraft gegebene Ziele in kürzester Zeit erreichen, woraus sich ergiebt, daß aus jeder Anfangslage in jede Endlage ohne Einwirkung einer Kraft ein Uebergang möglich sein müßte. Dieser Schluß, der sich besser dem Princip der kleinsten Wirkung, als dem von Hamilton anschließt, wird ungefähr so ausgeführt. Wählt man die Anfangslage und die Endlage der Kugel beliebig aus, so giebt es stets rein rollende Uebergänge [3]) von der einen zur anderen. Unter diesen Uebergängen, deren jeder bei constanter lebendiger Kraft,

1) Gesammelte Werke 1894, Bd. III p. 23.

2) Die Kugel braucht nicht homogen zu sein. Ist sie homogen, so wird eine gleichförmige Bewegung des Kugelmittelpunkts combinirt mit einer gleichförmigen Drehung der Kugel um eine in ihr feste, durch den Mittelpunkt gehende Axe eintreten.

3) Hinsichtlich der Existenz dieser Uebergänge vgl. man die letzte Anm. von § 12. Daß auch die Uebergänge, die hier zum Beweis herbeigezogen werden,

und die alle mit derselben constanten lebendigen Kraft erfolgen sollen, wird ein bestimmter am wenigsten Zeit beanspruchen [1]). Dieser entspricht nach Hertz' Ansicht dem Hamilton'schen Princip und dem Princip der kleinsten Wirkung. Diesem Resultat stellt nun Hertz entgegen, daß in Wahrheit, trotz der in den Anfangsgeschwindigkeiten noch steckenden Willkür, kein natürlicher Uebergang aus jeder Lage in jede andere ohne Mitwirkung von Kräften möglich ist.

Die eben ausgesprochene, für Hertz selbstverständliche Wahrheit ergiebt sich in der That durch bloße Betrachtung. Wir brauchen zu diesem Zweck nur zu bedenken, daß die Bewegung durch den Anfangszustand der Kugel bestimmt sein muß. Außer der Anfangslage gehört zur Bestimmung des Anfangszustands noch die momentane Umdrehungsaxe, die wir durch den Mittelpunkt annehmen, die zugehörige Drehgeschwindigkeit und eine Verschiebungsgeschwindigkeit. Die Axe kann durch den Mittelpunkt beliebig und ebenso die Drehgeschwindigkeit beliebig angenommen werden; die Verschiebungsgeschwindigkeit bestimmt sich aber dann nach Größe und Richtung, weil ein Rollen ohne Gleiten auf der horizontalen Ebene stattfinden soll. Auf die Größe der anfänglichen Drehgeschwindigkeit kommt hier nichts an. Da aber die anfängliche Drehaxe auf zweifach unendlich viele Arten gewählt werden kann und jede Wahl der Axe auf eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lagen der Kugel führt, so kann man von einer gegebenen Lage aus nur dreifach unendlich viele Lagen erreichen. Die Gesammtheit aller Lagen der Kugel bilden dagegen eine fünffache Mannigfaltigkeit, weil der Mittelpunkt hier auf zweifach unendlich viele Weisen und die Kugel um ihren Mittelpunkt noch auf dreifach unendlich viele Weisen gelegt werden kann. So ergiebt sich die Unmöglichkeit, von einer gegebenen Lage aus jede andere ohne Einwirkung von Kräften zu erreichen.

Der Versuch, den erhaltenen Widerspruch daraus zu erklären, daß strenge genommen in der Natur kein Rollen vorkommt, das nicht wenigstens mit einem geringen Gleiten verbunden wäre, befriedigt Hertz selbst nicht. Es geht auch aus dem Vorhergehenden zur Genüge hervor, daß es sich hier nicht so sehr um

ohne Gleitung rollende sein sollen, ist bei Hertz an dieser Stelle nicht ausdrücklich gesagt; ohne diese Bestimmung würde jedoch der Schluß nicht zum Resultat gelangen. Daß ich Hertz' Meinung durch Hinzufügung der Bestimmung richtig wiedergebe, geht aus den Nummern 347, 358, 112, 111 hervor.

1) Dies mag hier zugegeben werden, obgleich es vom streng mathematischen Standpunkt aus noch angefochten werden könnte.

einen Widerspruch handelt, in den die gewöhnliche Mechanik mit der Erfahrung gerathen ist, als vielmehr um widersprechende Folgerungen aus verschiedenen Ueberlegungen. Der Widerspruch muß also aus der Theorie heraus gelöst werden.

Eine solche Lösung enthalten die ausführlichen Entwicklungen des Hertz'schen Buches. Um sie zu verstehen, muß man die Bedingungsgleichungen ins Auge fassen, denen gemäß sich zu bewegen, ein materielles System gezwungen sein kann. Hertz läßt nur Bedingungsgleichungen zu, welche die Zeit nicht enthalten; es dürfen aber die Coordinaten der Punkte des Systems auch in Form von Differentialen auftreten. Genauer werden die Bedingungsgleichungen in der Form

$$(1) \qquad \sum_{(\nu)} (\varphi_{i\nu}\, dx_\nu + \psi_{i\nu}\, dy_\nu + \chi_{i\nu}\, dz_\nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

angenommen[1]), wo die mit den Buchstaben φ, ψ, χ bezeichneten Größen Functionen der Coordinaten

$$x_1, y_1, z_1 \quad x_2, y_2, z_2 \quad x_3, y_3, z_3 \ldots$$

der materiellen Punkte sind. Es liegt nun ein besonderer Fall vor, wenn die Bedingungen (1) in ihrer Gesammtheit einem Complex von Bedingungen der Form

$$(2) \qquad d\Phi_1 = 0, \quad d\Phi_2 = 0, \ldots$$

gleichwerthig, d. h. also „unbeschränkt integrabel" sind. In diesem Fall nennt Hertz das materielle System holonom[2]). Seine Lösung des früheren Widerspruchs ist nun diese: Das von ihm aufgestellte Grundgesetz der Mechanik gilt allgemein für holonome und nichtholonome Systeme, aus ihm ergiebt sich aber das Hamilton'sche Princip und das Princip der kleinsten Wirkung nur nach Hinzufügung der Beschränkung auf holonome Systeme. Die Kugel, die auf der Ebene rollt, stellt unter dem Zwang, der das Gleiten verhindert, ein nichtholonomes System vor.

Diese Lösung würde nun befriedigen, stünde ihr nicht die allgemeine Ueberzeugung entgegen, daß das Hamilton'sche Princip bloß eine Umformung des d'Alembert'schen ist, und daß dieses allgemein gilt. Die Abweichung von der gewöhnlichen Anschauung zu der Hertz' Theorie führt, läßt sich auch nicht daraus erklären, daß er ein neues Gesetz zu Grund gelegt hat, denn sein Grundgesetz ist in den Fällen, die er betrachtet, mit

1) Vgl. No. 124. Solche Bedingungen hat schon früher Voß behandelt, vgl. Math. Anm. Bd. 25, p. 258 ff.

2) Vgl. No. 128, 132, 133.

dem d'Alembert'schen Princip gleichwerthig [1]). Somit drängt sich die im Grund rein mathematische Frage auf: Erfordert die übliche Herleitung des Hamilton'schen Princips aus dem d'Alembert'schen eine einschränkende Bedingung? Der Beantwortung dieser Frage dient die vorliegende Arbeit. Als Antwort wird sich ergeben, daß, wenn das d'Alembert'sche Princip allgemein gilt, auch das Hamilton'sche in seiner vollkommensten Fassung allgemeingiltig sein muß. Wählt man aber die von Hertz angenommene Fassung, so tritt in der That die von ihm bezeichnete Beschränkung ein. Ich werde in dieser Arbeit noch einige andere Punkte genauer, als dies bis jetzt geschehen ist, erläutern: einmal den Begriff der Variation einer Bewegung selbst, dann die Formen des Princips der kleinsten Wirkung und das Verhältniß dieses Princips zu dem von Hamilton, welche beiden Principien durch ein allgemeineres Integralprincip umfaßt werden können. Es wird zugleich gezeigt werden, daß auch das

---

1) Man vergleiche Hertz No. 394. Was sein Grundgesetz betrifft, das er unnöthiger Weise auf freie Systeme (No. 309, 122, 117) beschränkt, so enthält es zwei Aussagen. Die eine Aussage bestimmt die Constanz des nach der Zeit genommenen Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$; die Größe s ist dabei durch die Gleichung

$$ds^2 \sum_{(\nu)} m_\nu = \sum_{(\nu)} m_\nu (dx_\nu^2 + dy_\nu^2 + ds_\nu^2)$$

definirt, in der $m_1, m_2 \ldots$ die Massen der Systempunkte bedeuten. Offenbar ist dieser Theil des Grundgesetzes nichts Anderes als der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Der andere Theil kommt darauf hinaus, daß bei der Bewegung die Größe

$$\sum_{(\nu)} m_\nu \left\{ \left(\frac{d^2x_\nu}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y_\nu}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z_\nu}{ds^2}\right)^2 \right\}$$

beständig ein Minimum ist. Setzt man in der letzten Summe $s = \text{const.}\ t$, so erhält man im Wesentlichen denselben Ausdruck, der in dem Gauss'schen Princip des kleinsten Zwangs ein Minimum werden soll, wobei aber die Kräfte, die Hertz in den Grundlagen ausschließt, gleich Null gesetzt sind. Man vergleiche zu dieser meiner Darstellung seines Grundgesetzes Hertz No. 309, 266, 263, 55, 100, 106, 151, 152, 153; statt seiner Bezeichnung der Coordinaten habe ich wieder die gewöhnliche Bezeichnung rechtwinkliger Coordinaten eingesetzt.

Die Bedeutung des Hertz'schen Buches beruht nach meiner Meinung nicht in der Form des Grundgesetzes, sondern darin, daß aus einem die Kräfte nicht enthaltenden Grundgesetz, gleichviel, wie nun dieses gerade formulirt ist, die Kräfte mathematisch construirt werden. Auf diese Construction, die erst in den späteren Partien auftritt und dem Zweck meiner Arbeit fern liegt, gehe ich nicht weiter ein.

Princip der kleinsten Wirkung so formulirt werden kann, daß es giltig bleibt, wenn die Zeit in die Bedingungsgleichungen eingeht.

Worauf es bei beiden Principien vor Allem ankommt, will ich gleich hier wenigstens andeuten, indem ich nochmals die Bewegungen der Kugel betrachte. Die Kugel nimmt bei ihrer wirklichen Bewegung, die eine rein rollende ist, eine continuirliche Folge von Lagen an. Die Anwendung der genannten Principien erfordert nun eine kleine Abänderung der Bewegung. Um diese zu bewerkstelligen, werden wir zunächst jede der ursprünglich durchlaufenen Lagen der Kugel ein wenig verrücken, so daß eine zweite continuirliche Folge von Lagen entsteht; es sind zugleich die Lagen dieser neuen Folge auf die Lagen der ersten Folge bezogen. Damit ist die zweite Bewegung noch nicht völlig bestimmt, denn es ist nicht gesagt, daß bei den beiden Bewegungen entsprechende Lagen gleichzeitig durchschritten werden; beim Hamilton'schen Princip wird dies gefordert, während das Princip der kleinsten Wirkung etwas Anderes bestimmt. Beide Principien sind aber hier so anzuwenden, daß die erwähnten kleinen Verrückungen der Kugel durch bloßes Rollen erfolgen, während Hertz im Gegensatz dazu die Bedingung verwendet hat, daß auch die zweite, d. h. die variirte Bewegung selbst ein Rollen ohne Gleiten vorstellt. Führt man die Variationen auf die richtige Weise aus, so ergibt sich die rollende Bewegung der Kugel genau so, wie es Hertz als den Thatsachen entsprechend bezeichnet hat. Man erkennt jetzt, daß die wirkliche Bewegung im Allgemeinen mit den variirten Bewegungen ungleichartig ist. Sie ist also, auch wenn sie in der That weniger Zeit erfordert, nicht unter den Bewegungen ihrer Art ausgezeichnet. Wir haben uns aber aus anderen Gründen längst gewöhnt, das Princip der kleinsten Wirkung und das Hamilton'sche Princip lediglich so aufzufassen, daß die Variation eines Integrals oder daß ein Variationen enthaltendes Integral gleich Null gesetzt wird. Der Name des Princips der kleinsten Wirkung paßt dabei freilich nicht mehr zum Inhalt.

§ 1.

Variation einer Bewegung.

Um uns den Begriff der Bewegungsvariation deutlicher zu machen, wollen wir zuerst einen freien materiellen Punkt betrachten. Seine Bewegung soll so variirt werden, daß die Anfangslage A und die Endlage B ungeändert bleibt. Die ursprüngliche Bewegung ist diejenige, die wirklich stattfindet, die neue,

variirte, ist nur eine mathematische Hilfsvorstellung. Man kann nun die Bahn der neuen Bewegung von A nach B so, daß sie von der alten Bahn wenig verschieden ist und ihr näherungsweise parallel läuft[1]), und im Uebrigen beliebig wählen. Die Bewegung auf der neuen Bahn kann man nachher immer noch auf verschiedene Arten mit der Zeit ablaufen lassen. Denken wir uns beide Bewegungen gleichzeitig in A beginnend; sie brauchen nicht gleichzeitig in B anzukommen, was z. B. eben dann nicht der Fall ist, wenn die wirkliche Bewegung in kürzerer Zeit stattfindet wie die variirte. Um nun eine genaue Vorstellung von der Variation zu haben, muß man jede Lage, die bei der variirten Bewegung angenommen wird, auf eine bei der ursprünglichen Bewegung eingenommene Lage beziehen[2]). Ohne eine solche Beziehung würde z. B. wohl die Variation des Integrals

$$\int T dt,$$

in dem T die lebendige Kraft, t die Zeit vorstellt, eine Bedeutung besitzen, aber es würde die Gleichung

$$\delta \int T dt = \int \delta (T dt)$$

keinen Sinn haben. Man ordnet nun die identischen Anfangslagen einander zu und ebenso die Endlagen. Dadurch ist ersichtlich, daß, falls die Bewegungen nicht gleichzeitig in B ankommen, die Beziehung nicht so hergestellt werden kann, daß entsprechende Lagen beider Bewegungen gleichzeitig durchschritten werden. Man wird also eine punktweise Beziehung zwischen beiden Bahnen willkürlich herstellen und dabei darauf achten, daß entsprechende Lagen wenig von einander abstehen[3]). Es mag hier verwundern, daß diese punktweise Zuordnung der Bahnen ohne physikalische Bedeutung ist, es ist eben diese Zuordnung, wie die Variation der Bewegung überhaupt, nur eine mathematische Hilfsconstruction. Betrachten wir der einfacheren Ausdrucksweise wegen für den Augenblick den Zeitpunkt, in dem beide Bewegungen bei A beginnen, als Anfang der Zeit. Sind nun C und C' zwei zugeordnete Lagen der Bewegungen, so wird man folgerichtig die bei der ur-

1) Vgl. die erste Anmerkung von § 2.

2) Dieser wichtige Umstand ist natürlich schon bei den geometrischen Problemen der Variationsrechnung zu beachten; Weierstrass hat ihn in seinen Vorlesungen stets hervorgehoben.

3) Genauer müssen noch zwei entsprechende unendlich kleine Bögen beider Bahnen für jede Stelle ein bestimmtes Verhältniß haben und dieses Verhältniß überall wenig von Eins verschieden sein. Vgl. hiezu die erste Anm. von § 2.

sprünglichen Bewegung von A bis C verflossene Zeit mit τ, die bei der variirten Bewegung von A bis C' verflossene Zeit mit $\tau + \delta\tau$ bezeichnen. Es ist also die Variation $\delta\tau$ der Zeit nichts Anderes als der Unterschied der Zeiten, zu denen entsprechende Lagen durchschritten werden. Die Variation des Zeitdifferentials ist der algebraische Ueberschuß der während eines kleinen Theils der neuen Bewegung verfließenden Zeit über die Zeit, die von dem zugeordneten Theil der alten Bewegung verbraucht wird [1]). Vergleicht man noch für diese kleinen Theile beider Bewegungen die Anfangs- und Endzeiten, so ersieht man leicht, daß die Variation des Zeitdifferentials gleich dem Differential der Zeitvariation ist; dies entspricht dem bekannten allgemeinen Satz von der Vertauschbarkeit der Symbole d und δ.

Die Variation der Bewegung unseres Punkts wird nun am Besten so ausgeführt. Man giebt zuerst jedem Punkt der ursprünglichen Bahn eine Verrückung, so daß eine neue Bahn entsteht, die auf die alte punktweise bezogen ist. Nachher bestimmt man für jeden Punkt der neuen Bahn die Geschwindigkeit. Diese muß wenig von der Geschwindigkeit an der entsprechenden Stelle der alten Bahn verschieden sein, könnte aber sonst noch willkürlich genommen werden. Wir scheiden aber jetzt zwei besondere Arten dieser Bestimmung aus.

Die erste Variationsart entsteht durch die Bedingung, daß entsprechende Stellen beider Bahnen gleichzeitig durchschritten werden; es müssen dann beide Bewegungen zur gleichen Zeit in B ankommen.

Die zweite Variationsart hat Bezug auf die Kräfte unter deren Einwirkung die ursprüngliche Bewegung vor sich geht. Denken wir uns hier die Kräfte so, daß von einer „potentiellen Energie“ gesprochen werden kann, so können wir diese Variationsart folgendermaßen definiren. Für entsprechende Zustände der verglichenen Bewegungen soll die gesammte Energie dieselbe sein. Diese Variationsbedingung wird später anders formulirt werden, so daß sie auch auf die übrigen Fälle paßt. Die gesammte Energie setzt sich aus der lebendigen Kraft und der potentiellen Energie zusammen. Da nun die ursprüngliche Bewegung als gegeben gedacht wird, so ist für eine Stelle C ihrer Bahn die lebendige Kraft und die potentielle

---

1) Der schärfere Gebrauch der reinen Mathematik, der zwischen Differential und Aenderung und zwischen Variation und Aenderung noch unterscheidet, würde hier unzweckmäßig sein.

Energie gegeben. Für die entsprechende Stelle C' der variirten Bahn ist zunächst nur die von der Lage allein abhängige potentielle Energie bekannt. Aus der hier geforderten Variationsbedingung ergiebt sich nun für die Stelle C' noch die lebendige Kraft und damit die Geschwindigkeit.

Nachdem also die neue Bahn und ihre punktweise Beziehung auf die alte Bahn festgesetzt ist, wird die variirte Bewegung sowohl durch die erste, als auch durch die zweite Variationsbedingung, jedesmal in anderer Weise, völlig bestimmt. Bei der zweiten Variationsart wird die Zeit variirt, bei der ersten nicht.

Analog sind die Verhältnisse bei der Bewegung eines materiellen Systems. Nehmen wir mit Hertz in den Begriff der „Lage eines Systems" die Gesammtheit der Lagen der Punkte des Systems auf, so besteht die Bewegung in einer continuirlichen Folge von Systemlagen, die in bestimmter Weise mit der Zeit durchlaufen werden. Um diese ursprüngliche Bewegung zu variiren, wird man zunächst jeder Systemlage eine kleine Verrückung ertheilen, so daß eine neue continuirliche Folge von Systemlagen entsteht. Wenn die ursprüngliche Folge eine Lage zweimal darbietet, so hat man zwei sich deckende Lagen, die natürlich auf verschiedene Weise verrückt werden können. Nun sind die neuen Bahnen der Systempunkte und die Zuordnung zwischen den Stellen dieser Bahnen festgesetzt; man kann deshalb bei der allgemeinsten Variationsart noch für einen Systempunkt in allen Stellen seiner neuen Bahn die Geschwindigkeit wählen. Setzt man aber entweder fest, daß die neuen Lagen gleichzeitig mit den zugeordneten alten Lagen durchschritten werden sollen, oder daß für zwei zugeordnete Zustände beider Bewegungen die gesammte Energie dieselbe sein soll, so bestimmt man damit völlig, wie die neue Folge von Systemlagen zu durchlaufen ist.

Wir haben im Vorigen auf Bedingungsgleichungen nicht Rücksicht genommen. Ist eine Bewegung Bedingungen unterworfen, so ist dadurch nicht ausgeschlossen, daß wir sie mit einer diesen Bedingungen nicht genügenden variirten Bewegung vergleichen.

§ 2.

Herleitung der Integralprincipien.

Ich betrachte jetzt, im Sinne der gewöhnlichen Mechanik, ein materielles System, das unter der Einwirkung von Kräften und unter dem gleichzeitigen Zwang von Bedingungsgleichungen sich

bewegt. In den Bedingungsgleichungen darf auch die Zeit wieder vorkommen. Es genügt, die Coordinaten als rechtwinklige anzunehmen. Indem ich nun die Bewegung variire, kümmere ich mich vorläufig um die Bedingungsgleichungen gar nicht. Sind $m_1, m_2, \ldots$ die Massen der materiellen Punkte, so ergiebt sich für die Variation der lebendigen Kraft

$$(3) \qquad \delta T = \sum_{(\nu)} m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{dt}\, \delta \frac{dx_\nu}{dt} + \frac{dy_\nu}{dt}\, \delta \frac{dy_\nu}{dt} + \frac{dz_\nu}{dt}\, \delta \frac{dz_\nu}{dt} \right).$$

Nun hat man z. B.

$$\delta \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{\delta dx_\nu \cdot dt - \delta dt \cdot dx_\nu}{dt^2} = \frac{d\delta x_\nu \cdot dt - d\delta t \cdot dx_\nu}{dt^2}\ ^{1}).$$

Formt man mit Hilfe dieser Gleichung und der ihr analogen Gleichungen die rechte Seite von (3) um, so findet man

$$\delta T = \sum_{(\nu)} m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{dt} \frac{d\delta x_\nu}{dt} + \frac{dy_\nu}{dt} \frac{d\delta y_\nu}{dt} + \frac{dz_\nu}{dt} \frac{d\delta z_\nu}{dt} \right) - 2T \frac{d\delta t}{dt}.$$

---

1) Diese Formel der Variationsrechnung muß hier gebraucht werden, weil die der Differentiation zu Grunde liegende Größe variirt wird. Will man dies vermeiden, so muß man, wie es z. B. v. Helmholtz gethan hat, noch eine Variable ϑ einführen. Man bezieht dann die Lagen der ursprünglichen Bewegung auf die Werthe des Parameters ϑ und ordnet den entsprechenden Lagen in der variirten Bewegung dieselben Werthe von ϑ zu. So wird ϑ nicht variirt, wohl aber die Zeit t. Besonders anschaulich ist folgende Auffassung. Es sei τ die von der Anfangslage A des Systems bis zur Lage C bei der ursprünglichen Bewegung verflossene Zeit und $\tau + \delta\tau$ die Zeit, die in der variirten Bewegung von der Anfangslage bis zur entsprechenden Lage C' vergeht. Alle Größen, mit Einschluß von $\delta\tau$, können als Functionen von τ angesehen werden. Nun ist $\delta \frac{dx_\nu}{dt}$ der Unterschied zwischen den nach der x-Axe genommenen Geschwindigkeitscomponenten der Masse m_ν für die variirte und die unvariirte Bewegung. Offenbar ist also

$$\delta \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{d(x_\nu + \delta x_\nu)}{d(\tau + \delta\tau)} - \frac{dx_\nu}{d\tau} = \frac{\frac{d}{d\tau}(x_\nu + \delta x_\nu)}{\frac{d}{d\tau}(\tau + \delta\tau)} - \frac{dx_\nu}{d\tau}$$

$$= \left(\frac{dx_\nu}{d\tau} + \frac{d\delta x_\nu}{d\tau} \right) \left(1 + \frac{d\delta\tau}{d\tau} \right)^{-1} - \frac{dx_\nu}{d\tau}.$$

Wenn man jetzt entwickelt und die Glieder vernachlässigt, die in den Ableitungen der Variationen von höherer Ordnung sind, so ergiebt sich

$$\frac{d\delta x_\nu}{d\tau} - \frac{dx_\nu}{d\tau} \frac{d\delta\tau}{d\tau},$$

d. h. die Formel des Textes. Man erkennt zugleich, daß nicht bloß die Variationen, sondern auch deren Ableitungen klein angenommen werden müssen.

Diese Gleichung soll mit dt multiplicirt und über den Zeitraum $t_0 \cdots t_1$, in dem die ursprüngliche Bewegung verläuft, integrirt werden. Man erhält nach einer partiellen Integration

$$(4)\quad \int_{t_0}^{t_1} \delta T \cdot dt = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{(\nu)} m_\nu \left(\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \delta x_\nu + \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} \delta y_\nu + \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} \delta z_\nu \right) dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} T d\delta t \text{ [1]};$$

für t_0 und t_1 ist die Lage des Systems unvariirt gedacht, wodurch die Glieder verschwunden sind, die bei der partiellen Integration vor das Integral treten würden.

Sind jetzt X_ν, Y_ν, Z_ν die Componenten der auf die Masse m_ν wirkenden Kraft, so soll das Zeichen $\delta' U$ durch die Formel

$$(5)\quad \delta' U = \sum_{(\nu)} (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu)$$

definirt werden. Die Gleichung (5) wird wieder mit dt multiplicirt und integrirt und dann zu (4) addirt, wodurch sich

$$(6)\quad \int_{t_0}^{t_1} \{ 2T d\delta t + (\delta T + \delta' U) dt \}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{(\nu)} \left\{ \left(X_\nu - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \right) \delta x_\nu + \left(Y_\nu - m_\nu \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} \right) \delta y_\nu + \left(Z_\nu - m_\nu \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} \right) \delta z_\nu \right\}$$

ergiebt. Führt man zugleich die Variation der Bewegung so aus, daß die Größen δx_ν, δy_ν, δz_ν eine virtuelle Verrückung des Systems darstellen, so ist die rechte Seite der letzten Gleichung nach dem d'Alembert'schen Princip gleich Null. Man hat also den Satz:

Vergleicht man die wirkliche Bewegung eines materiellen Systems mit einer wenig von ihr abweichenden Bewegung, wobei Anfangs- und Endlage des Systems unvariirt bleiben, und die Verrückungen aus jeder Lage der wirklichen Bewegung in die entsprechende Lage der variirten Bewegung virtuelle Verrückungen sein sollen, so ist

$$(7)\quad \int \{ 2T d\delta t + (\delta T + \delta' U) dt \} = 0 \text{ [2]}.$$

In dieser Gleichung bedeutet T die lebendige

1) Im Grund steht diese Formel schon bei Serret, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, Bd. LXXII (1871), p. 700, No. (7).

2) Eigentlich wird das Integral nur unendlich klein von höherer Ordnung, wenn die bis jetzt als klein bezeichneten Größen von erster Ordnung unendlich klein werden.

Kraft und $\delta' U$ die Arbeit, welche die wirkenden Kräfte bei einer der eben genannten, lediglich gedachten Verrückungen leisten würden.

Hier kann man die Variationen noch specialisiren, indem man die erste oder die zweite der in § 1 aufgestellten besonderen Variationsarten einführt.

1) Wir verlangen, daß entsprechende Lagen in der wirklichen und in der variirten Bewegung gleichzeitig durchschritten werden, d. h. wir setzen $\delta t = 0$ und erhalten

$$\int (\delta T + \delta' U)\, dt = 0.$$

Dies ist Hamilton's Princip.

2) Wir setzen, indem wir die frühere zweite Variationsart verallgemeinern,

$$\delta T = \delta' U. \tag{8}$$

Wir fordern damit, daß der Unterschied der lebendigen Kraft für entsprechende Zustände beider Bewegungen gleich sein soll der Arbeit, welche die wirkenden Kräfte für eine die entsprechenden Lagen verbindende Verrückung leisten würden. Dadurch wird bestimmt, wie die continuirliche Folge von variirten Lagen durchlaufen werden soll. Man kann also in (7) die Größe $\delta' U$ durch δT ersetzen und erhält dann für diese besonderen Variationen

$$0 = \int \{ T\, d\delta t + \delta T\, dt \} = \int \{ T\, \delta dt + \delta T \cdot dt \} = \int \delta (T dt),$$

d. h. also

$$0 = \delta \int T dt \,^{1}).$$

Dies ist das Princip der kleinsten Wirkung in seiner weiteren Form[2]).

Die andere Form dieses Princips wird in § 4 besprochen werden.

---

1) Die Richtigkeit der Formel $\int \delta (T dt) = \delta \int T dt$ wird dadurch nicht beeinträchtigt, daß das Zeitintervall sich bei der Variation ändert. Um dies einzusehen, zerlege man $\int T dt$ in seine Elemente und ziehe von jedem dieser Elemente die ihm in der variirten Bewegung entsprechende Größe ab.

2) Diese Form des Princips hat v. Helmholtz in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1887 (Helmholtz' ges. Abhandlungen 1895, Bd. III, p. 249) eingehend erörtert. Die von ihm als „potentielle Energie" bezeichnete Größe F wäre wohl besser als negative Kräftefunction definirt worden. Da nämlich F

§ 3. Virtuelle Verrückungen. Gleichwerthigkeit der Principien.

Der Begriff der virtuellen Verrückung ist hier genau so zu verstehen wie bei der analytischen Formulirung des d'Alembert'schen Princips. Nach diesem Princip sind jederzeit mit Rücksicht auf die im Augenblick bestehenden Verbindungen der materiellen Punkte die verlorenen Kräfte im Gleichgewicht. Sind z. B. die materiellen Punkte gezwungen, sich den Bedingungen

$$\omega_i(x_1, y_1, z_1, \cdots x_r, y_r, z_r; t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

gemäß zu bewegen, so hat man für t den augenblicklichen Werth einzuführen. Es gestatten nun die augenblicklichen Verbindungen die den Gleichungen

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \omega_i}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial \omega_i}{\partial z_1}\delta z_1 + \cdots + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_r}\delta x_r + \frac{\partial \omega_i}{\partial y_r}\delta y_r + \frac{\partial \omega_i}{\partial z_r}\delta z_r = 0 \tag{10}$$

genügenden Verrückungen. Diese Verrückungen sind die virtuellen und sie sind in die Gleichgewichtsbedingung der verlorenen Kräfte, d. h. in

$$\sum_{(r)}\left\{\left(X_r - m_r\frac{d^2x_r}{dt^2}\right)\delta x_r + \left(Y_r - m_r\frac{d^2y_r}{dt^2}\right)\delta y_r + \left(Z_r - m_r\frac{d^2z_r}{dt^2}\right)\delta z_r\right\} = 0$$

einzuführen. Der Umstand, daß in der Gleichung (10) ein Glied $\frac{\partial \omega_i}{\partial t}\delta t$ nicht vorkommt, wird auch durch die Bemerkung umschrieben, daß bei der Anwendung des d'Alembert'schen Princips die Zeit nicht variirt werden darf. Dieser Vorschrift genügen wir,

---

außer den Coordinaten noch die Zeit enthalten soll, so fällt die Gleichung, welche das Wort „potentielle Energie" motivirt. Man kann noch etwas gegen Helmholtz' Darstellung einwenden. Vergleicht man auf S. 259 die mit 1, und mit 1, bezeichneten Gleichungen, so zeigt sich, daß in der Entwicklung der Variation δF das Glied $\frac{\partial F}{\partial t}\delta t$ fortgelassen, und daß nur dadurch die Bewegungsgleichungen richtig erhalten worden sind. Helmholtz begründet sein Verfahren durch die Bemerkung, daß F auch als Function der Coordinaten und, statt von t, von ϑ (vergl. meine erste Anm. zu diesem Paragraphen) angesehen werden könne. Nun wird ϑ nicht variirt; es ist aber ausdrücklich angegeben, daß die Zeit variirt werden soll. Es ist also t bei der ursprünglichen Bewegung eine andere Function von ϑ als bei der variirten Bewegung. Deßhalb ist dies Verfahren nicht statthaft. Die ganze Darstellung wird aber sofort richtig, wenn man die Größe, die von Helmholtz mit δF bezeichnet hat, als Arbeit auffaßt. Entsprechend ist dann auch die Variationsbedingung anders zu formuliren.

wenn auch in anderer Weise eine Variation der Zeit vorkommt. Mit Rücksicht auf das, was wir hier folgerichtig mit $\delta\omega_i$ bezeichnen müssen, lauten also die Gleichungen, welche die virtuellen Verrückungen bestimmen,

$$\delta\omega_i - \frac{\partial\omega_i}{\partial t}\delta t = 0. \tag{11}$$

Ist die Bewegung des Systems Bedingungsgleichungen von der Form (1)

$$\sum_{(\nu)}(\varphi_{i\nu}dx_\nu + \psi_{i\nu}dy_\nu + \chi_{i\nu}dz_\nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

unterworfen, wo die Functionen φ, ψ, χ nur von den Coordinaten abhängen, so genügen die virtuellen Verrückungen den Relationen

$$\sum_{(\nu)}(\varphi_{i\nu}\delta x_\nu + \psi_{i\nu}\delta y_\nu + \chi_{i\nu}\delta z_\nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)^{1}).$$

Es ist noch zu bemerken, daß in allen Fällen die Verrückungen der einzelnen Lagen des Systems von einander unabhängig sind. Man kann deßhalb auch die Verrückungen nur für einen unendlich kleinen Theil der Bewegung von Null verschieden annehmen. Verbindet man diese Vorstellung mit der Gleichung (6), so ergiebt eine bekannte Schlußweise der Variationsrechnung, daß das beständige Verschwinden der linken Seite von (6) auch das Verschwinden jedes einzelnen Elements des auf der rechten Seite befindlichen Integrals mit sich bringt. Die Forderung, daß das Integral (7) für alle unsere Variationen verschwinden soll, zieht also die Erfüllung des d'Alembert'schen Princips wieder nach sich. Betrachten wir die rechte Seite von (6) noch genauer. Wir denken uns die Kräfte und die wirkliche Bewegung des materiellen Systems als gegeben; also bestimmt sich die genannte rechte Seite lediglich noch durch die Verrückungen der Systemlagen. Sie hängt davon nicht ab, wie die durch die Verrückungen entstandene neue

---

1) Die Analogie führt zu dem von Voß a. a. O. p. 286 gemachten Vorschlag, die Bedingungen der Bewegung in der Form

$$\sum_{(\nu)}(\varphi_{i\nu}dx_\nu + \psi_{i\nu}dy_\nu + \chi_{i\nu}dz_\nu) + \omega_i dt = 0 \qquad (i = 1, 2..)$$

anzunehmen, wo die Functionen $\varphi, \psi, \chi, \omega$ die Coordinaten und die Zeit enthalten. Die Gleichungen der virtuellen Verrückungen ergeben sich dann hieraus, wenn man dt durch 0 und dx_ν, dy_ν, dz_ν durch $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ ersetzt. Ein Beispiel, welches hierzu passt, wäre das einer Kugel, die auf einer Ebene ohne Gleitung rollt, während die Ebene sich in vorgeschriebener Weise mit der Zeit fortbewegen muss.

Folge von Lagen mit der Zeit durchlaufen wird. Es kommt deßhalb nicht darauf an, ob wir die Variation der Bewegung, abgesehen von den unerläßlichen Bedingungen, allgemein lassen oder uns auf die erste oder auf die zweite der besonderen Variationsarten beschränken.

Aus diesem und dem vorigen Paragraphen ergiebt sich somit, daß sowohl das Hamilton'sche Princip, als auch das Princip der kleinsten Wirkung in der obigen Form mit dem Princip von d'Alembert gleichwerthig ist[1]).

§. 4.

Modificationen der Principien.

Ist eine Kräftefunction U vorhanden, so nimmt die Gleichung (5) die Gestalt

$$\delta' U = \sum_{(\nu)} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right)$$

an. Wenn nun auch U die Zeit t, neben den Coordinaten, enthält, so ist doch, falls die Zeit nicht variirt wird,

$$\delta' U = \delta U, \tag{12}$$

und man kann das Hamilton'sche Princip durch die Gleichung

---

1) Hiermit ist auch die Herleitung der Differentialgleichungen der Bewegung aus dem Hamilton'schen Princip und aus dem Princip der kleinsten Wirkung gegeben, wobei zugleich neue Coordinaten eingeführt werden können. Die Herleitung der Differentialgleichungen aus Hamilton's Princip bedarf keiner weiteren Erläuterung; sie ist von Voß a. a. O. p. 263 in symbolischer Form gegeben worden, während unsere Auffassung der Variation einer Bewegung stets eine eigentliche Anwendung des Princips erlaubt. Die Herleitung der Gleichungen aus dem Princip der kleinsten Wirkung hat zu verschiedenen Erörterungen geführt (vgl. Rodrigues, Correspondance sur l'école impériale polytechnique publ. par Hachette, vol. III, p. 159 und A. Mayer, Ber. d. K. Sächs. Ges. d. W. math.-phys. Cl. 1886, p. 343). Am einfachsten geht man unseren obigen Weg rückwärts. Man entwickelt für beliebige Coordinaten $\delta \int T dt = \int (\delta T . dt + T . \delta dt)$ und ersetzt dann die Größe δdt, die hier explicit und implicit vorkommt, mit Hilfe der Gleichung (8) durch einen mit dt multiplicirten Ausdruck, der Lagenvariationen und deren Ableitungen enthält. Diese Ableitungen schafft man durch partielle Integration fort. So entsteht ein Integral, das der rechten Seite von (6) analog ist. Dieses Integral gleich Null gesetzt, unter Beachtung der Unabhängigkeit der virtuellen Verrückungen der einzelnen Systemlagen, ergiebt die Differentialgleichungen der Bewegung.

$$\delta\int(T+U)\,dt = 0$$

ausdrücken.

Handelt es sich um die Variationen, die das Princip der kleinsten Wirkung erfordert, so muß eine von der Zeit freie Kräftefunction U vorhanden sein, wenn die Gleichung (12) bestehen soll. Die Variationsbedingung (8) kann dann so ausgedrückt werden, daß die Größe $T-U$ für zwei entsprechende Zustände der wirklichen und der variirten Bewegung denselben Werth haben soll. Kommt nun außerdem die Zeit nicht in den Bedingungsgleichungen vor, mögen diese im Uebrigen Differentialgleichungen von der Form (1) oder gewöhnliche Gleichungen sein, so ist bei der wirklichen Bewegung $T-U$ constant[1]). Man nennt dann $-U$ die potentielle Energie, $T-U$ die gesammte Energie, und es ist ersichtlich, daß die gesammte Energie sich überhaupt nicht, weder während der Bewegung, noch bei der Variation, ändert. Man erhält auf diese Weise die engere Form des Princips der kleinsten Wirkung. Diese Form des Princips setzt als bekannt voraus, daß die wirkliche Bewegung dem Satz von der Constanz der Energie gehorcht, und bestimmt diese Bewegung genauer dahin, daß sie, verglichen mit einer wenig von ihr abweichenden, mit derselben constanten Energie verlaufenden Bewegung die Bedingung

$$\delta\int T\,dt = 0$$

erfüllt; dabei sollen die Lagenvariationen virtuelle Verrückungen sein und Anfangs- und Endlage unvariirt bleiben. Diese engere Form ist anwendbar, wenn eine von der Zeit unabhängige Kräftefunction existirt, und die Zeit auch in den Bedingungsgleichungen nicht auftritt[2]).

---

1) Vrgl. § 5. Vrgl. auch Voß a. a. O. p. 266.

2) Inwieweit man schon bei Maupertuis von einem bestimmten Princip sprechen kann, und welcher Antheil an der Idee Anderen, insbesondere Euler zukommt, will ich hier nicht untersuchen (vgl. A. Mayer, Geschichte des Princips der kleinsten Action 1877 und Helmholtz a. a. O.). Bei Lagrange findet sich in der Mécanique analytique (2. Aufl. 1811, I. Bd. p. 296 ff.) eine Herleitung des Princips der kleinsten Wirkung aus der dynamischen Grundformel. Er nimmt dabei an, daß die Gleichung, welche den Satz von der Erhaltung der Energie ausdrückt, bei der Variation — ohne Aenderung der in ihr vorkommenden Constanten — fortbesteht. Dadurch erhält er die der Gleichung (8) unseres Textes entsprechende Relation. Man muß aus der genannten Annahme schließen, daß Lagrange an der angeführten Stelle die engere Form des Princips im Auge hatte. Führt man aber die Gleichung (8) direct als Va-

§ 5.

Die weitere Form des Princips der kleinsten Wirkung und der Satz von der Erhaltung der Energie.

Die engere Form des Princips der kleinsten Wirkung setzt den Satz von der Constanz der Energie voraus, die weitere Form nicht. Wir können auch, indem wir eine Kräftefunction und diese und die Bedingungsgleichungen als von der Zeit frei annehmen, den Satz von der Constanz der Energie aus der weiteren Form des Princips ableiten. Nehmen wir den Satz als unbekannt an

---

riationsbedingung ein, läßt im Uebrigen Lagrange's Beweisführung vollständig ungeändert und fragt nach den geringsten Voraussetzungen, unter denen sie gilt, so wird man auf die weitere Form des Princips geführt. Diese Form findet sich auch in seiner früheren Arbeit in den Miscellanea Taurinensia t. II 1760—1761 (Oeuvres 1867, t. I p. 365 ff.) angedeutet. Dort wird nämlich in No. XIII gesagt, daß die in No. VIII aufgestellte Relation (U), die nichts Anderes als unsere Gleichung (8) ist, sich im Fall ganz beliebiger Kräfte verwenden lasse. Die meisten Nachfolger von Lagrange haben aus ihm nur die engere Form des Princips entnommen, so z. B. Hamilton in den Philosophical Transactions von 1834 p. 252. Jacobi hat dieser Form des Princips einen anderen Ausdruck verliehen, indem er unter dem Integral die Größe Tdt durch Raumelemente und durch eine Constante ausgedrückt hat, die nichts Anderes ist, als der hier constante und unvariirbare Werth von $T-U$. (Vorlesungen über Dynamik 1866, 6te Vorlesung). Erst Helmholtz hat in der angeführten Arbeit die weitere Form des Princips aus Lagrange's Werken herausgeschält. Was das Verhältniß dieser Form des Princips der kleinsten Wirkung zum Hamilton'schen Princip (Philosophical Transactions, 1835 p. 99) betrifft, so finde ich im Gegensatz zu Helmholtz, daß beide strenge auseinander zu halten sind. Da beide mit d'Alembert's Princip gleichwerthig sind, so sind sie auch Consequenzen von einander. Trotzdem kann keines der beiden Principien unmittelbar unter das andere begriffen werden, weil sie sich auf verschiedene Arten der Variation beziehen. Beide Principien ergeben sich aber durch Specialisirung des in der Gleichung (7) des Textes enthaltenen Integralprincips, in dem die Bewegungsvariationen allgemeiner sind. Das Integral (7) steht in einer nahen Beziehung zu Helmholtz' Integralformel 2b:

$$\delta \int \left[\lambda F + \left(\lambda + \frac{dt}{d\vartheta} \right) L \right] d\vartheta.$$

Führt man nämlich hier die Variation unter dem Integral aus, wobei man λ unvariirt lassen, dt variiren und (s. die letzte Anm. von § 2) δF durch eine Arbeit, d. h. durch das $-\delta' U$ des Textes ersetzen muß, so entsteht ein Integral, das für $L = T$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\vartheta = t$ mit der Hälfte unseres Integrals (7) übereinstimmt. Um nach der Variation $\vartheta = t$ setzen zu dürfen, hat man nur ϑ als die bei der wirklichen Bewegung bis zur einer gewissen Lage hin verbrauchte Zeit aufzufassen.

und denken wir uns z. B., daß die Größe $T-U$ während der wirklichen Bewegung in einem Zeitintervall $t' \cdots t''$ beständig im algebraischen Sinne wachse. Es mögen nun die für $t \leqq t'$ und die für $t \geqq t''$ angenommenen Lagen nicht verrückt werden. Jede für $t' < t < t''$ angenommene Lage C werde in eine solche C' variirt, die selbst bei der wirklichen Bewegung, aber in einem etwas späteren, gleichfalls zwischen t' und t'' gelegenen Zeitpunkt angenommen wird. Diese Verrückungen sind deshalb, weil die Zeit in den Bedingsgleichungen nicht auftritt, virtuelle Verrückungen [1]). Nach der Variationsbedingung, so wie sie jetzt, wo eine von der Zeit freie Kräftefunction vorhanden ist, ausgesprochen werden kann, muß $T-U$ für die Lage C' der variirten Bewegung denselben Werth haben wie für die Lage C der wirklichen Bewegung. Nun haben wir uns $T-U$ bei der wirklichen Bewegung von C bis C' wachsend gedacht; es muß also $T-U$ und deshalb auch die lebendige Kraft T bei C' für die variirte Bewegung kleiner sein als für die wirkliche. Wir können etwa diese beiden lebendigen Kräfte wie $\varepsilon^2 : 1$ annehmen, wo $\varepsilon < 1$. Es werden nun beim Durchgang durch die Systemlage C' alle Geschwindigkeiten der variirten Bewegung zu denen, mit welchen die wirkliche Bewegung C' passirt, im Verhältniß $\varepsilon : 1$ stehen, da die Systembahnen beider Bewegungen übereinstimmen. Man vergleiche jetzt zwei kleine Intervalle der variirten und der wirklichen Bewegung und zwar solche Intervalle, bei denen dieselben, wenig von C' verschiedenen Lagen durchlaufen werden, und die also bei der Variation nicht als zugeordnet aufzufassen sind; es werden dann die verbrauchten Zeiten sich wie $1 : \varepsilon$, die Integraltheile wie $\varepsilon : 1$ verhalten. Es wird also bei der gewählten Variation der von t' bis t'' sich erstreckende Theil des die „Action" vorstellenden Integrals $\int T dt$ verkleinert; eine genauere Betrachtung ergiebt, daß die anderen Theile des Integrals nicht variirt werden. So ergiebt sich eine Verkleinerung des ganzen Integrals, und es ließe sich zeigen, daß diese Verkleinerung im Allgemeinen mit den Variationen der Coordinaten und mit den Größen $1-\varepsilon$ von derselben Ordnung sein wird. Würden die Lagen des Systems im umgekehrten Sinn verrückt, so ergäbe sich eine Vergrößerung von $\int T dt$ durch die Variation. Man kann sich also die Größe $T-U$, wenn man mit dem Princip der

1) Vgl. G. Kirchhoffs Mechanik p. 25 und 34. Das von Hertz in No. 111 ausgesprochene Verhältniß zwischen virtuellen und wirklichen Verrückungen beruht darauf, daß er die Zeit nicht in die Bedingsgleichungen aufnimmt.

kleinsten Wirkung nicht in Widerspruch gerathen will, bei der wirklichen Bewegung nicht als wachsend denken; natürlich ebenso wenig als abnehmend. $T-U$ ist constant.

§ 6.

Ungleichartigkeit der wirklichen und der variirten Bewegung.

Ueberall haben wir die Bedingung zu beachten, daß die Lagenvariationen virtuelle Verrückungen sein müssen. Etwas anderes wäre es, wenn wir forderten, daß die variirte Bewegung denselben Bedingungsgleichungen wie die wirkliche genügen soll. Sind z. B. die Bedingungsgleichungen in der Form (9), d. h. als gewöhnliche Gleichungen

$$\omega_i(x_1, y_1, z_1, \cdots x_r, y_r, z_r, t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gegeben, so würde die letzte Forderung mit sich bringen, daß

$$\omega_i(x_1 + \delta x_1, \cdots z_r + \delta z_r, t + \delta t) = 0$$

und somit auch $\delta\omega_i = 0$ wäre. Die Anwendung der mechanischen Principien verlangt aber die Gleichungen (11):

$$\delta\omega_i - \frac{\partial\omega_i}{\partial t}\delta t = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Diese Gleichungen stimmen zwar mit $\delta\omega_i = 0$ überein, wenn

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial t} = 0$$

ist, d. h. wenn in (9) die Zeit nicht vorkommt, deßgleichen, wenn $\delta t = 0$, d. h. wenn das Hamilton'sche Princip angewendet werden soll. Beim Princip der kleinsten Wirkung ist hingegen auf den erwähnten Unterschied zu achten, wenn in den Bedingungsgleichungen (9) die Zeit vorkommt. In diesem Fall sind die wirkliche und die variirte Bewegung ungleichartig.

Diese Ungleichartigkeit tritt auch beim Hamilton'schen Princip auf[1]), wenn die Bedingungsgleichungen als Differentialgleichungen in der Form (1) gegeben sind, wobei die Zeit nicht

1) Diesen Umstand hat bereits C. Neumann bei der rollenden Bewegung hervorgehoben, worauf ich erst während des Drucks aufmerksam geworden bin. Man vergleiche Ber. d. Sächs. Ges. d. W. math.-phys. Cl. 1888, p. 34, insbesondere die Worte: „Hingegen wird die fingirte Bewegung dem Charakter des Systems im Allgemeinen nicht entsprechen".

einmal darin vorkommt. Dies wird aus dem Beispiel der nächsten Paragraphen erhellen. Hier soll nur hervorgehoben werden, daß die Ungleichartigkeit der Bewegungen wieder verschwindet, wenn Hertz' holonome materielle Systeme vorliegen. Die Bedingungen können in diesem Fall gleich in der Form (2):

$$d\Phi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

angenommen werden; sie besagen, daß $\Phi_1, \Phi_2 \cdots$ bei der Bewegung constant bleiben sollen, ohne daß diese constanten Werthe zunächst vorgeschrieben sind. Soll nun die variirte Bewegung denselben Bedingungen genügen, so könnte man an sich für diese Bewegung andere constante Werthe $\Phi_1, \Phi_2, \cdots$ wählen; dies ist aber dadurch ausgeschlossen, daß man Anfangs- und Endlage nicht variirt. Nun erkennt man, daß das Ergebniß dasselbe ist, wie wenn die Variation den Gleichungen

$$\delta\Phi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gemäß ausgeführt worden wäre. Diese letzten Gleichungen aber entstehen aus den Bewegungsbedingungen, indem man die Coordinatendifferentiale durch die Coordinatenvariationen ersetzt; diese Gleichungen entsprechen also hier der wahren Forderung, daß die Lagenvariationen virtuelle Verrückungen sein müssen. Es erklärt sich nun, warum die von Hertz gewählte Fassung der Principien von Maupertuis und Hamilton die Beschränkung auf holonome Systeme mit sich gebracht hat. Hertz nimmt nämlich die variirte Bahn als mögliche, d. h. als solche an, die denselben Bedingungen wie die wirkliche Bahn genügt [1]).

§ 7.

Besondere Bewegungsbedingung für einen Punkt.

Das Vorhergehende wird zweckmäßig durch ein Beispiel erläutert. Da hier nur die Schwierigkeiten der Variation dargelegt werden sollen, so scheint es gestattet, daß ich eine besonders einfache, wenn auch nicht wohl realisirbare Bewegung wähle; diese gehört übrigens zu den von Hertz zugelassenen [2]). Ein materieller Punkt, auf dem keine Kraft einwirkt, soll bei der Bewegung an die Bedingungsgleichung

$$\varphi(x, y, z)\,dx + \psi(x, y, z)\,dy + \chi(x, y, z)\,dz = 0 \tag{13}$$

1) Vrgl. No. 347, 358, 110, 112, 118.

2) Dieselbe ist schon von Voß (a. a. O. p. 280) behandelt.

gebunden sein. Der Punkt ist also in jeder Stelle gezwungen, sich längs eines gegebenen Flächenelements zu bewegen; die Richtungscosinusse des zur Stelle x, y, z gehörigen Flächenelements verhalten sich wie

$$\varphi(x, y, z) : \psi(x, y, z) : \chi(x, y, z).$$

Die Gleichung (13) kann nur in besonderen Fällen in der Form

$$\omega(x, y, z) = \text{const}$$

integrirt werden. Wir nennen in diesen Fällen die Gleichung (13) integrabel; es existirt dann eine Function $\Omega(x, y, z)$, mit der multiplicirt die linke Seite der Gleichung in ein totales Differential übergeht. Damit dies geschieht, muß Ω den Bedingungen

$$\frac{\partial(\Omega\cdot\varphi)}{\partial y} = \frac{\partial(\Omega\cdot\psi)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\Omega\cdot\psi)}{\partial z} = \frac{\partial(\Omega\cdot\chi)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\Omega\cdot\chi)}{\partial x} = \frac{\partial(\Omega\cdot\varphi)}{\partial z}$$

genügen, die, falls die partiellen Ableitungen nach x, y, z durch die Indices 1, 2, 3 bezeichnet werden, in die Formen

$$\begin{aligned} \Omega(\varphi_2 - \psi_1) &= \Omega_1\psi - \Omega_2\varphi \\ \Omega(\psi_3 - \chi_2) &= \Omega_2\chi - \Omega_3\psi \\ \Omega(\chi_1 - \varphi_3) &= \Omega_3\varphi - \Omega_1\chi \end{aligned}$$

gesetzt werden können. Wenn man hier mit χ, φ, ψ multiplicirt und addirt, ergiebt sich

$$\chi(\varphi_2 - \psi_1) + \varphi(\psi_3 - \chi_2) + \psi(\chi_1 - \varphi_3) = 0. \tag{14}$$

Dies ist die Integrabilitätsbedingung, die nicht immer erfüllt ist[1]). Nur wenn sie erfüllt ist, stellt der materielle Punkt unter dem Zwang der obigen Bedingung ein holomones System vor.

§ 8.

Variation der Bahn.

Bei der Variation dieser Bewegung kommt es im Grund nur auf die Bahnen an. Betrachten wir eine der Gleichung (13) gemäße Bahn. Die Anwendung der mechanischen Principien erfordert

1) Die gefundene Integrabilitätsbedingung ist auch hinreichend (vgl. A. Mayer, Math. Ann. Bd. 5, p. 450 bis 452 und Theorie der Transformationsgruppen von Lie unter Mitwirkung von F. Engel 1888, erster Abschnitt p. 90 bis 98).

Lagenvariationen, die virtuelle Verrückungen sind, d. h. der Gleichung

$$\varphi\,\delta x + \psi\,\delta y + \chi\,\delta z = 0 \tag{15}$$

entsprechen. Da dies für die Verrückungen aller Stellen der ursprünglichen Bahn gilt, so ist auch

$$d(\varphi\,\delta x + \psi\,\delta y + \chi\,\delta z) = 0. \tag{16}$$

Will man dagegen so variiren, daß die variirte Bahn derselben Bedingung wie die ursprüngliche genügt, so muß die Gleichung (13) für zwei kleine entsprechende Stücke beider Bahnen gelten. Durch Subtraction der beiden so erhaltenen Gleichungen ergiebt sich

$$\delta(\varphi\,dx + \psi\,dy + \chi\,dz) = 0. \tag{17}$$

Das Verhältniß der beiden hier für die Variation aufgestellten Forderungen wird deutlicher, wenn wir die Variationen aufsuchen, die beide Forderungen erfüllen. Werden die Gleichungen (16) und (17) entwickelt und dann von einander subtrahirt, so resultirt die Gleichung

$$\begin{aligned}(18)\qquad &(\varphi_2 - \psi_1)(\delta x\,dy - \delta y\,dx) + (\psi_2 - \chi_2)(\delta y\,dz - \delta z\,dy)\\ &+ (\chi_1 - \varphi_2)(\delta z\,dx - \delta x\,dz) = 0.\end{aligned}$$

Die Gleichung (15) giebt, zusammen mit der für die ursprüngliche Bahn bestehenden Relation (13), die Proportion

$$(\delta x\,dy - \delta y\,dx) : (\delta y\,dz - \delta z\,dy) : (\delta z\,dx - \delta x\,dz) = \chi : \varphi : \psi.$$

Diese Proportion ist aber mit (18) nur verträglich, wenn entweder die Integrabilitätsbedingung (14) erfüllt ist, oder

$$\delta x : \delta y : \delta z = dx : dy : dz. \tag{19}$$

In dem letzten Fall liegt eine ganz besondere Variation, eine Variation der Bahn in sich vor; eine solche Variation entspricht der in § 5 angewendeten. Die Gleichung (15) läßt aber eine allgemeinere Art der Lösung zu. Ebenso kann die Gleichung (17) d. h.[1])

---

1) Nimmt man die Variationen zunächst als endlich an, und soll die variirte Bahn derselben Bedingung (13) wie die ursprüngliche genügen, so würde dies eigentlich das Bestehen der Gleichung

$$\varphi(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)\frac{d}{d\sigma}(x+\delta x) + \psi(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)\frac{d}{d\sigma}(y+\delta y)$$
$$+ \chi(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)\frac{d}{d\sigma}(z+\delta z) = 0$$

bedeuten, in der σ irgend eine Variable ist, von der man einen auf der ursprüng-

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)dx+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z\right)dy$$
$$+\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\chi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\chi}{\partial z}\delta z\right)dz+\varphi\,d\,\delta x+\psi\,d\,\delta y+\chi\,d\,\delta z=0$$

durch Variationen befriedigt werden, die an den Enden der Bahn verschwinden und auf der Bahn der Proportion (19) nicht genügen.

Wenn also die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist, so führen die beiden Forderungen auf verschiedenartige Variationen. Man kann diese Variationen in grober Weise folgendermaßen veranschaulichen. Zu jedem Punkt der ursprünglichen Bahn gehört nach (13) ein Flächenelement, das als eben angesehen werden kann. Diese Ebenen werden von einer abwickelbaren Fläche α umhüllt. Die variirte Bahn läuft immer der ursprünglichen näherungsweise parallel, und so bilden beide zusammen ein schmales Flächenband. Bei den Variationen, die den mechanischen Principien entsprechen, liegt nun die aus den Componenten $\delta x, \delta y, \delta z$ bestehende Strecke in dem nach (13) zum Punkt x, y, z gehörenden Flächenelement, somit auch in der Fläche α; bei den anderen Variationen ist dies nicht der Fall. Man kann deßhalb im ersten Fall das Flächenband näherungsweise als aus α ausgeschnitten ansehen[1]), während es im zweiten Fall mit der abwickelbaren Fläche α längs der ursprünglichen Bahncurve im Allgemeinen endliche Winkel macht.

§ 9.

Bewegungsgleichungen. Wirkliche und geodätische Bahnen.

Bilden wir jetzt die Differentialgleichungen der Bewegung für den materiellen Punkt. Wir wollen das Princip der kleinsten Wirkung in der engeren Form anwenden. Bedeutet s die Bogenlänge der Bahncurve, so ist für die wirkliche Bewegung die Geschwindigkeit

---

lichen Bahn veränderlichen Punkt abhängig machen kann. Aus dieser Gleichung geht nach der Subtraction von

$$\varphi(x,y,z)\frac{dx}{ds}+\psi(x,y,z)\frac{dy}{ds}+\chi(x,y,z)\frac{dz}{ds}=0$$

die Gleichung des Textes erst durch gewisse Vernachlässigungen hervor. Man muß dabei die Variationen und ihre Ableitungen als kleine Größen erster Ordnung ansehen und Größen höherer Ordnung weglassen.

1) Vrgl. Voß p. 267.

$$\frac{ds}{dt} = c \tag{20}$$

nach dem Satz von der Erhaltung der Energie constant. Die variirte Bewegung hat man sich mit derselben constanten Geschwindigkeit zu denken. Das Princip ergiebt nun

$$\frac{2}{mc}\delta\int T dt = \delta\int c dt = \delta\int ds = 0.$$

Durch Entwicklung findet man

$$\delta\int ds = \int \delta ds = \int \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{ds}$$
$$= \int\left(\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z\right) = 0.$$

Im letzten Integral trennt man die drei Theile und integrirt partiell; nachher erhält man wegen der verschwindenden Anfangs- und Endvariationen

$$\int\left(-\frac{d^2x}{ds^2}\delta x - \frac{d^2y}{ds^2}\delta y - \frac{d^2z}{ds^2}\delta z\right) ds = 0. \tag{21}$$

Die Variationen bestimmen sich dadurch, daß $\delta x, \delta y, \delta z$ eine virtuelle Verrückung vorstellen, d. h. durch die Gleichung

$$\varphi\,\delta x + \psi\,\delta y + \chi\,\delta z = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist mit $\lambda \cdot ds$ zu multipliciren und dann unter dem letzten Integral zu addiren. Dadurch ergiebt sich zuerst

$$\int\left\{\left(\lambda\varphi - \frac{d^2x}{ds^2}\right)\delta x + \left(\lambda\psi - \frac{d^2y}{ds^2}\right)\delta y + \left(\lambda\chi - \frac{d^2z}{ds^2}\right)\delta z\right\} ds = 0,$$

und daraus

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= \lambda\varphi \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= \lambda\psi \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= \lambda\chi. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Da hier λ eine unbekannte Veränderliche bedeutet, so besteht der Inhalt der Gleichungen (22) nur in der Proportion

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \varphi : \psi : \chi. \tag{23}$$

Es verhalten sich aber die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ nach einem bekannten Satz wie die Richtungscosinusse der in der Schmiegungsebene liegenden Normalen der Bahncurve. Diese Normale ist also identisch mit der Normalen des dem Punkt x, y, z nach (13) zugeordneten Flächenelements. Also steht in jedem Punkt der Bahn die Schmiegungsebene senkrecht auf dem diesem Punkt zugeordneten Flächenelement[1]).

Die Gleichungen (20) und (22) entsprechen den beiden Aussagen des Hertz'schen Grundgesetzes[2]), indem die Differentialgleichungen (22), mit (13) zusammen, die von Hertz so genannten „geradesten Bahnen" bestimmen[3]).

Wir haben soeben die wirkliche Bahn mit Hilfe der Gleichung

$$\delta \int ds = 0 \tag{24}$$

bestimmt. Stellen wir jetzt dieselbe Gleichung auf, jedoch mit einer anderen Auffassung der Variation. Wir fordern jetzt nicht mehr, daß die Lagenvariationen virtuelle Verrückungen sein sollen, sondern wir verlangen, daß die variirte Bahn derselben Differentialgleichung (13) genügen soll, die wir für die zu variirende Bahn vorschreiben. Es liegt jetzt ein ganz anderes Problem der Variationsrechnung vor, aus dem im Allgemeinen nicht die wirklichen Bahnen des materiellen Punkts hervorgehen. Man hat bei diesem Problem die Variationen der Bedingung (17) d. h. der Gleichung

$$\delta\varphi \cdot dx + \delta\psi \cdot dy + \delta\chi \cdot dz + \varphi \cdot d\delta x + \psi \cdot d\delta y + \chi \cdot d\delta z = 0 \tag{25}$$

zu unterwerfen. Indem man jetzt (24) so wie früher entwickelt, ergiebt sich wieder (21). In der letzten Gleichung hat man unter dem Integral das λ-fache von (25) zu addiren[4]). Man erhält dann,

---

1) Vrgl. Voß p. 280. Behandelt man die variirte Bahn so, als verliefe sie auf der abwickelbaren Fläche α des vorigen Paragraphen, so ergiebt die Bedingung $\delta \int ds = 0$ die wirkliche Bahn als „geodätische Linie" der Fläche α im gewöhnlichen Sinn des Worts. Dadurch gelangt man aber sofort zu der geometrischen Eigenschaft, die im Text ausgesprochen ist.

2) No. 309.

3) Vrgl. Hertz, No. 155 d. Da wir diese Bahnen aus dem Princip der kleinsten Wirkung abgeleitet haben, tritt hier nicht hervor, inwiefern sie „geradeste" genannt werden können.

4) Hinsichtlich dieser Regel der Variationsrechnung vrgl. Scheeffer, Math. Ann. Bd. 25, p. 555 ff. und A. Mayer, Ber. d. math.-phys. Cl. d. Sächs. Ges. d. W. 1885, 1895 und Math. Ann. Bd. 26.

nachdem man noch einen Theil der unter dem Integral stehenden Glieder partiell integrirt hat, in der bekannten Weise:

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{dz}{ds}\right) + \frac{d}{ds}(\lambda\varphi) = 0$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{dz}{ds}\right) + \frac{d}{ds}(\lambda\psi) = 0$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} - \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) + \frac{d}{ds}(\lambda\chi) = 0.$$

Diesen Gleichungen kann man auch die Form geben:

$$(26)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + \varphi\frac{d\lambda}{ds} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\lambda\frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial\chi}{dx} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\lambda\frac{dz}{ds} = 0 \\ \frac{d^2y}{ds^2} + \psi\frac{d\lambda}{ds} - \left(\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\lambda\frac{dz}{ds} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\lambda\frac{dx}{ds} = 0 \\ \frac{d^2z}{ds^2} + \chi\frac{d\lambda}{ds} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\lambda\frac{dx}{ds} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\lambda\frac{dy}{ds} = 0; \end{cases}$$

sie bestimmen, mit (13) zusammen, die sogenannten „geodätischen Bahnen“ [1]).

Hertz hat gezeigt, daß bei seinen holonomen Systemen die geodätischen mit den geradesten, d. h. den wirklichen Bahnen übereinstimmen [2]). Wenn nämlich die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, so kann man sich die Gleichung (13) auch gleich so gegeben denken, daß $\varphi dx + \psi dy + \chi dz$ ein totales Differential ist. Es bestehen dann die Relationen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\chi}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\chi}{\partial y},$$

und es bedeuten mit Rücksicht darauf die Gleichungen (26) nichts Anderes als das Bestehen der Proportion (23).

§ 10.

Mannigfaltigkeit der wirklichen und der geodätischen Bahnen.

Die wirkliche Bahn des materiellen Punkts ist völlig bestimmt, wenn Anfangsstelle und Anfangsrichtung gegeben sind. Dies folgt aus mechanischen Gründen, ließe sich aber auch aus der gefun-

1) Hertz, No. 181a. Voß p. 282.
2) No. 190.

denen geometrischen Eigenschaft der wirklichen Bahnen nachweisen. Ist nur die Anfangsstelle A gegeben, so kann man die Anfangsrichtung in dem dem Punkt A zugeordneten Flächenelement noch beliebig wählen. Es gehen also von einer bestimmten Stelle einfach unendlich viele wirkliche Bahnen aus.

Anders verhalten sich, wenn die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist, die geodätischen Bahnen. Diese bestimmen sich durch die Gleichungen (26), zu denen noch (13) hinzukommt. (13) giebt differentiirt:

$$(27)\quad \varphi\frac{d^2x}{ds^2}+\psi\frac{d^2y}{ds^2}+\chi\frac{d^2z}{ds^2}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{ds}$$
$$+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy}{ds}+\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{ds}=0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der Gleichungen (26) kann man $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$, $\frac{d\lambda}{ds}$ in x, y, z, λ, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ ausdrücken. Es lassen sich also mit Hilfe der genannten Gleichungen die Größen x, y, z, λ als Functionen von s bestimmen, wenn für einen Anfangswerth von s die zugehörigen Anfangswerthe von x, y, z, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, λ vorgegeben sind. Führt man andererseits die Integration von (26) und (27) mit irgend welchen Anfangswerthen aus, so ergeben sich Functionen, die, wegen der Gleichung (27), der Bedingung

$$\varphi\frac{dx}{ds}+\psi\frac{dy}{ds}+\chi\frac{dz}{ds}=C_1$$

genügen, wo C_1 eine Constante bedeutet. Da ferner die Gleichungen (26), mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und addirt, die Relation

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dy}{ds}+\frac{d^2z}{ds^2}\frac{dz}{ds}+\left(\varphi\frac{dx}{ds}+\psi\frac{dy}{ds}+\chi\frac{dz}{ds}\right)\frac{d\lambda}{ds}=0$$

im Gefolge haben, so müssen die erhaltenen Functionen auch die Bedingung

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2+2C_1\lambda=C_2$$

erfüllen. Hier ist C_2 constant. Die Anfangswerthe müssen nun so gewählt werden, daß $C_1=0$ und $C_2=1$ ist. Dadurch ist ersichtlich, daß man, sobald die Anfangsstelle x, y, z gegeben ist,

nur noch den Anfangswerth von s, den von λ und etwa den von $\frac{dx}{ds} : \frac{dy}{ds}$ willkürlich wählen kann. Auf den Anfangswerth von s kommt nichts an, und es gehen somit 2 Constante in die zu bestimmende geodätische Bahn noch ein. Es zeigt sich jedoch, daß der Anfangswerth von λ die Bahn nur dann beeinflußt, wenn die Integrabilitätsbedingung (14) nicht erfüllt ist [1]). Wenn also für eine Stelle die Größe

$$(28) \qquad \varphi(\psi_3 - \chi_2) + \psi(\chi_1 - \varphi_3) + \chi(\varphi_2 - \psi_1)$$

nicht gleich Null ist, so gehen von der Stelle zweifach unendlich viele geodätische Bahnen und nur einfach unendlich viele wirkliche Bahnen aus.

Dieses Ergebniß ist dem bei der Kugel gefundenen analog. Bei der Kugel bilden die von einer gegebenen Lage ausgehenden Bewegungen, die dem Minimalproblem der Einleitung genügen, eine höhere Mannigfaltigkeit als diejenigen Bewegungen, welche die Kugel von einer gegebenen Lage aus ohne Einwirkung von Kräften ausführen kann.

§ 11.

Rollende Bewegung der Kugel. Bedingungsgleichungen.

Wir wollen jetzt die Differentialgleichungen für die rollende Bewegung der Kugel aufstellen. Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten in Beziehung auf ein im Raum festes rechtwinkliges Coordinaten-

---

1) Die Gleichungen (26) ergeben mit Rücksicht auf (13) und mit Rücksicht darauf, daß s die Bogenlänge bedeutet, die Beziehung

$$\left(\psi \frac{d^2x}{ds^2} - \varphi \frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{dz}{ds} + \left(\chi \frac{d^2y}{ds^2} - \psi \frac{d^2z}{ds^2}\right)\frac{dx}{ds} + \left(\varphi \frac{d^2z}{ds^2} - \chi \frac{d^2x}{ds^2}\right)\frac{dy}{ds}$$
$$= [(\varphi_2 - \psi_1)\chi + (\psi_3 - \chi_2)\varphi + (\chi_1 - \varphi_3)\psi]\lambda.$$

Wenn also der Ausdruck (28) nicht etwa für die ganze Bahn verschwindet, so ist auf einer gegebenen geodätischen Bahn λ eine gegebene Function des Orts. Zwei von derselben Stelle ausgehende geodätische Bahnen, zu denen verschiedene Anfangswerthe von λ gehören, werden also sicher verschieden sein, wenn für die Anfangsstelle und deßhalb auch für deren Umgebung der Ausdruck (28) von Null verschieden ist. Verschwindet aber (28) für alle Werthe x, y, z, so ist die am Schluß des letzten Paragraphen gemachte Bemerkung zu bedenken.

system. Auf der festen $\xi\eta$-Ebene rolle die Kugel, ohne zu gleiten. x, y und z seien Coordinaten, die sich auf ein mit der Kugel unveränderlich verbundenes rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen; dieses System soll seinen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Kugel haben. Nun bestehen, wenn ξ, η, ζ und x, y, z Coordinaten desselben Raumpunkts sind, die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1(\xi-\alpha) + \beta_1(\eta-\beta) + \gamma_1(\zeta-\gamma) \\ y &= \alpha_2(\xi-\alpha) + \beta_2(\eta-\beta) + \gamma_2(\zeta-\gamma) \\ z &= \alpha_3(\xi-\alpha) + \beta_3(\eta-\beta) + \gamma_3(\zeta-\gamma). \end{aligned} \tag{29}$$

Im ersten Coordinatensystem sind $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$ die Coordinaten des Kugelmittelpunkts und $\alpha, \beta, 0$ die Coordinaten desjenigen Punkts, in dem die Kugel die $\xi\eta$-Ebene berührt; γ ist constant und gleich dem Radius a der Kugel. Das Kugeltheilchen, welches sich gerade an der Berührungsstelle befindet, muß in diesem Augenblick die Geschwindigkeit 0 haben, weil sonst ein Gleiten stattfinden würde. Somit gelten für das Theilchen im Moment der Berührung die Relationen

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

d. h.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha_1}{dt} x + \frac{d\alpha_2}{dt} y + \frac{d\alpha_3}{dt} z &= 0 \\ \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt} x + \frac{d\beta_2}{dt} y + \frac{d\beta_3}{dt} z &= 0 \\ \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma_1}{dt} x + \frac{d\gamma_2}{dt} y + \frac{d\gamma_3}{dt} z &= 0. \end{aligned} \right. \tag{30}$$

Hier bedeuten x, y, z diejenigen Werthe, die sich aus (29) mit $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = 0$ ergeben. Man hat also in (30)

$$\begin{aligned} x &= -\gamma\gamma_1 = -a\gamma_1 \\ y &= -\gamma\gamma_2 = -a\gamma_2 \\ z &= -\gamma\gamma_3 = -a\gamma_3 \end{aligned}$$

einzusetzen. Man erhält dadurch

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = a\left(\gamma_1 \dfrac{d\alpha_1}{dt} + \gamma_2 \dfrac{d\alpha_2}{dt} + \gamma_3 \dfrac{d\alpha_3}{dt}\right) \\ \dfrac{d\beta}{dt} = a\left(\gamma_1 \dfrac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \dfrac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \dfrac{d\beta_3}{dt}\right) \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = a\left(\gamma_1 \dfrac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \dfrac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \dfrac{d\gamma_3}{dt}\right). \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen ist die letzte von selbst erfüllt, weil γ constant ist, und die rechte Seite vermöge der Relationen der orthogonalen Coordinatentransformation verschwindet. Die beiden ersten von den Gleichungen (31) sind also, zusammen mit $\gamma = a$, die Bedingungen des reinen Rollens [1]).

§ 12.

Charakter der Bedingungsgleichungen.

Um den Charakter der Bedingungen kennen zu lernen, drücken wir die Coefficienten der Coordinatentransformation durch die Euler'schen [2]) Formeln

$$(32)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = -\cos\varphi\cos f\cos\vartheta - \sin\varphi\sin f \\ \beta_1 = -\sin\varphi\cos f\cos\vartheta + \cos\varphi\sin f \\ \gamma_1 = \cos f\sin\vartheta \\ \alpha_2 = -\cos\varphi\sin f\cos\vartheta + \sin\varphi\cos f \\ \beta_2 = -\sin\varphi\sin f\cos\vartheta - \cos\varphi\cos f \\ \gamma_2 = \sin f\sin\vartheta \\ \alpha_3 = \cos\varphi\sin\vartheta \\ \beta_3 = \sin\varphi\sin\vartheta \\ \gamma_3 = \cos\vartheta \end{cases}$$

aus. Werden diese Werthe in die Gleichungen (31) eingeführt, so ergiebt sich

$$(33)\qquad \begin{cases} d\alpha = -a\sin\varphi\sin\vartheta\, df + a\cos\varphi\, d\vartheta \\ d\beta = a\cos\varphi\sin\vartheta\, df + a\sin\varphi\, d\vartheta. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind nicht unbeschränkt integrabel, ja überhaupt

---

1) Vrgl. Neumann, Sächs. Ber. 1888, p. 358.

2) Novi Commentarii Acad. Petrop. T. XV (1770), p. 75. Hinsichtlich der geom. Bedeutung der Winkel φ, f, ϑ vrgl. z. B. Kirchhoff's Mechanik 1877, p. 43 und 44.

nicht integrabel[1]). Die Kugel, welche auf der Ebene rollen aber nicht gleiten kann, stellt also ein nichtholonomes materielles System vor.

§ 13.

Neue Form der Bedingungen.

Der momentane Bewegungszustand der Kugel werde jetzt als combinirt angesehen aus einer Drehung um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe und einer Verschiebung. p, q, r seien die

1) D. h. es giebt auch nicht eine Function $\omega(\alpha, \beta, \varphi, f, \vartheta)$, deren Differential vermöge der Gleichungen (33) verschwände. Eine solche Function müßte nämlich (vgl. A. Mayer, Math. Ann. Bd. 5, p. 449 und Lie, Theorie der Transformationsgruppen Abschnitt 1, p. 91 und 92) den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial f} - a \sin\varphi \sin\vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + a \cos\varphi \sin\vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} + a \cos\varphi \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + a \sin\varphi \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0$$

genügen. Diese Gleichungen, die kein vollständiges System (vrgl. Clebsch, Journal für die reine und angewandte Math., Bd. 65, p. 258) bilden, sind zu einem solchen zu ergänzen und zeigen dann sofort, was man auch direct nachweisen kann, daß sie nur durch eine Constante befriedigt werden.

Die Nichtexistenz einer Function ω von der genannten Eigenschaft ergiebt sich auch daraus, daß eine solche Function vermöge der Differentialgleichungen (33) einen constanten Werth behalten müßte; man kann aber von jedem Werthsystem $\alpha_1, \beta_1, \varphi_1, f_1, \vartheta_1$ zu jedem anderen $\alpha_2, \beta_2, \varphi_2, f_2, \vartheta_2$ übergehen, ohne beim Uebergang die Gleichungen (33) zu verletzen, indem die Kugel durch Rollen ohne Gleiten von jeder Lage zu jeder anderen gelangen kann. Da diese Thatsache auch von Hertz benutzt wird, soll sie noch etwas erläutert werden. Bedeutet w einen, in Bogenmaß ausgedrückten, constanten Winkel und wird auch ϑ constant angenommen, so sind die Gleichungen (33) durch

$$\alpha = w \frac{a \sin\vartheta}{2\pi} \cos\varphi, \quad \beta = w \frac{a \sin\vartheta}{2\pi} \sin\varphi, \quad f = \frac{w}{2\pi} \varphi$$

befriedigt. Hier kann φ noch irgend eine Function der Zeit bedeuten, und es liegt eine bekannte Bewegung vor. Durchläuft φ das Intervall von 0 bis 2π, so haben schließlich α, β und (vrgl. (32)) auch $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ wieder denselben Werth wie am Anfang. Man erhält so durch reines Rollen dieselbe Endlage, als ob man nur um die z-Axe gedreht hätte. Da f dabei um w zugenommen hat, so ist w der Betrag dieser Drehung. Die z-Axe hat keine besondere Richtung; man kann also jede Drehung um den Mittelpunkt hinsichtlich ihres Endresultats durch eine nur rollende Bewegung ersetzen. Durch Zusammensetzung ist jetzt ersichtlich, daß man von jeder Anfangslage zu jeder Endlage einen rein rollenden Uebergang

Componenten der Drehgeschwindigkeit, u, v, w die der Verschiebungsgeschwindigkeit, beides nach den Axen x, y, z. Diese Componenten sind durch die Gleichungen[1])

$$p = \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{dt}$$
$$q = \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt}$$
$$r = \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt}$$

und

$$(34) \quad \begin{cases} u = \alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt} \\ v = \alpha_2 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt} \\ w = \alpha_3 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma}{dt} \end{cases}$$

gegeben. Es bestehen ferner die Relationen[2])

$$(35) \quad \begin{array}{lll} \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q & \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r & \frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p \\ \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q & \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r & \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 p \\ \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q & \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r & \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{array}$$

Wenn man jetzt in (34) die Größe $\frac{d\gamma}{dt}$ durch 0 und $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}$ durch die rechten Seiten von (31), nachher aber die Größen

$$\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt}, \quad \frac{d\beta_1}{dt}, \frac{d\beta_2}{dt}, \frac{d\beta_3}{dt}$$

durch die rechten Seiten von (35) ersetzt, so erhält man, nachdem man noch die Relationen der orthogonalen Coordinatentransformation benutzt hat,

$$(36) \quad \begin{aligned} u &= a(\gamma_3 q - \gamma_2 r) \\ v &= a(\gamma_1 r - \gamma_3 p) \\ w &= a(\gamma_2 p - \gamma_1 q). \end{aligned}$$

---

finden kann. Weil diese Bewegung aus Stücken zusammengesetzt ist, so würden bei ihr noch Unstetigkeiten in den Geschwindigkeiten vorkommen, die aber durch eine kleine Aenderung beseitigt werden können.

1) Vrgl. z. B. Kirchhoff's Mechanik p. 50.

2) Ebendaselbst.

Diese Gleichungen stellen den Zusammenhang dar, der, wenn Rollen ohne Gleiten stattfindet, zwischen Drehung und Verschiebung besteht[1]). Die Componenten p, q, r der Drehgeschwindigkeit können willkürlich angenommen werden.

§ 14.

Bewegungsgleichungen.

Nach diesen Vorbereitungen können die Differentialgleichungen der Bewegung[2]) aufgestellt werden. Ich benutze das Hamilton'sche Princip. Da keine Kräfte wirken, ist

$$\int \delta T \cdot dt = 0$$

zu setzen, wobei die Variationsart zu beachten ist. Da das System der Coordinaten x, y, z mit der Kugel fest verbunden gedacht wird, ist die lebendige Kraft T eine ein für allemal gegebene Function von p, q, r, u, v, w, und man erhält

$$(37) \quad \int \left(\frac{\partial T}{\partial p} \delta p + \frac{\partial T}{\partial q} \delta q + \frac{\partial T}{\partial r} \delta r + \frac{\partial T}{\partial u} \delta u + \frac{\partial T}{\partial v} \delta v + \frac{\partial T}{\partial w} \delta w \right) dt = 0.$$

Die hier vorkommenden Variationen der Geschwindigkeitscomponenten sind auszudrücken. Die Variation der Bewegung werde wieder so vorgenommen, daß zunächst jede der ursprünglich durchlaufenen Lagen der Kugel eine kleine Verrückung erhält. Die Verrückung wird in eine um den Mittelpunkt erfolgende Drehung und eine Parallelverschiebung zerlegt. Drehung und Verschiebung geben nach den Axen x, y, z die Componenten p', q', r' und u', v', w'. Die Variationen der Geschwindigkeitscomponenten sind nun durch die Formeln[3])

$$(38) \quad \begin{aligned} \delta p &= \frac{dp'}{dt} + qr' - q'r \\ \delta q &= \frac{dq'}{dt} + rp' - r'p \\ \delta r &= \frac{dr'}{dt} + pq' - p'q \end{aligned}$$

und

---

1) Es ist nicht schwer, diese Gleichungen geometrisch abzuleiten.

2) Wir könnten auch die allgemeinen Neumann'schen Gleichungen für die rollende Bewegung benutzen, Ber. d. Sächs. Ges. 1888, p. 36 und p. 39.

3) Kirchhoff, S. 58 und 59.

$$
\begin{aligned}
\delta u &= \frac{du'}{dt} + vr' - v'r + w'q - wq' \\
\delta v &= \frac{dv'}{dt} + wp' - w'p + u'r - ur' \\
\delta w &= \frac{dw'}{dt} + uq' - u'q + v'p - vp'
\end{aligned}
\tag{39}
$$

dargestellt. Die Herleitung dieser Formeln beruht[1]) auf einer Vertauschung der Symbole $\frac{d}{dt}$ und δ. Eine solche Vertauschung ist erlaubt, wenn die Zeit t nicht variirt wird; dies ist aber die für das Hamilton'sche Princip erforderliche Variationsart.

Jetzt führt man in (37) für $\delta p, \delta q, \delta r, \delta u, \delta v, \delta w$ die rechten Seiten von (38) und (39) ein. Mit Rücksicht darauf, daß die Variationen für Anfang und Ende des betrachteten Intervalls verschwinden sollen, erhält man nach gewissen partiellen Integrationen

$$
\begin{aligned}
\int \Big\{ &\Big(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w}\Big)p' \\
&+\Big(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u}\Big)q' \\
&+\Big(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v}\Big)r' \\
&+\Big(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} + r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w}\Big)u' \\
&+\Big(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} + p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u}\Big)v' \\
&+\Big(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} + q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v}\Big)w' \Big\} dt = 0.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Bis hierher ist in diesem Paragraphen die der Bewegung aufgezwungene Bedingung nicht zur Verwendung gekommen. Da die Kugel ohne Gleitung rollen soll, müssen auch die den Variationen entsprechenden Verrückungen, die virtuelle Verrückungen sind, in einem bloßen Rollen bestehen. Jede dieser kleinen Verrückungen ist in Drehung und Verschiebung zerlegt, und es müssen die Componenten einer solchen Drehung und einer solchen Verschiebung durch Relationen verknüpft sein. Diese Relationen sind mit (36) analog; es sind die folgenden:

---

1) Kirchhoff, S. 58.

$$\begin{aligned} u' &= a(\gamma_3 q' - \gamma_2 r') \\ v' &= a(\gamma_1 r' - \gamma_3 p') \\ w' &= a(\gamma_2 p' - \gamma_1 q'). \end{aligned}$$

Führt man diese Werthe von u', v', w' in (40) ein, so erhält man, da die Componenten p', q', r' der Drehung willkürlich sind,

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p} - a\gamma_3 \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial v} + a\gamma_2 \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial w} - r\dfrac{\partial T}{\partial q} + q\dfrac{\partial T}{\partial r} \\ -a(\gamma_3 r + \gamma_2 q)\dfrac{\partial T}{\partial u} + (-w + a\gamma_3 p)\dfrac{\partial T}{\partial v} + (v + a\gamma_2 p)\dfrac{\partial T}{\partial w} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q} - a\gamma_1 \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial w} + a\gamma_3 \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial u} - p\dfrac{\partial T}{\partial r} + r\dfrac{\partial T}{\partial p} \\ -a(\gamma_1 p + \gamma_3 r)\dfrac{\partial T}{\partial v} + (-u + a\gamma_3 q)\dfrac{\partial T}{\partial w} + (w + a\gamma_1 q)\dfrac{\partial T}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r} - a\gamma_2 \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial u} + a\gamma_1 \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial v} - q\dfrac{\partial T}{\partial p} + p\dfrac{\partial T}{\partial q} \\ -a(\gamma_2 q + \gamma_1 p)\dfrac{\partial T}{\partial w} + (-v + a\gamma_1 r)\dfrac{\partial T}{\partial u} + (u + a\gamma_2 r)\dfrac{\partial T}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Dies sind die gesuchten Differentialgleichungen, durch die im Verein mit der Bedingung (36) die Bewegung sich bestimmt[1]).

§ 15.

Specialfall.

Nehmen wir noch an, daß die Kugel, ohne gerade homogen zu sein, ihren Schwerpunkt im Mittelpunkt hat. Das System der Coordinaten x, y, z soll von den im Schwerpunkt construirten

1) In diesen Gleichungen sind die Ableitungen $\dfrac{\partial T}{\partial p}$ u. s. f. durch partielle Differentiation einer Function zu bilden, welche die lebendige Kraft für eine rollende und gleitende Bewegung der Kugel darstellt. Es sind nämlich diese Ableitungen aus der Berechnung von δT hervorgegangen, und die lebendige Kraft $T + \delta T$ der variirten Bewegung darf nicht aus einem bloß für rein rollende Bewegungen giltigen Ausdruck berechnet werden. Dieser Umstand ist bei der Entwicklung der speciellen Neumann'schen Formeln übersehen worden, die sich auf das Rollen auf einer festen Ebene beziehen. Diese Formeln (Ber. d. Sächs. Ges. math.-phys. Cl. 1888, p. 42 u. 1885, p. 368) bedürfen daher einer Correction.

Hauptaxen gebildet werden. Die lebendige Kraft ergiebt sich dann durch die Gleichung

$$2T = (u^2 + v^2 + w^2) M + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2,$$

in der M die Masse, P, Q, R die Hauptträgheitsmomente bedeuten. Die Gleichungen (41) erhalten die Gestalt

$$(42)\quad \begin{cases} P\frac{dp}{dt} - aM\left(\gamma_3 \frac{dv}{dt} - \gamma_2 \frac{dw}{dt}\right) + (R-Q)qr \\ \qquad + aM\{\gamma_3(pv-qu) + \gamma_2(pw-ru)\} = 0 \\ Q\frac{dq}{dt} - aM\left(\gamma_1 \frac{dw}{dt} - \gamma_3 \frac{du}{dt}\right) + (P-R)rp \\ \qquad + aM\{\gamma_3(qw-rv) + \gamma_1(qu-pv)\} = 0 \\ R\frac{dr}{dt} - aM\left(\gamma_2 \frac{du}{dt} - \gamma_1 \frac{dv}{dt}\right) + (Q-P)pq \\ \qquad + aM\{\gamma_1(ru-pw) + \gamma_2(rv-qw)\} = 0. \end{cases}$$

Durch Differentiation von (36) ergiebt sich

$$(43)\quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a\left(\frac{d\gamma_3}{dt} q - \frac{d\gamma_2}{dt} r + \gamma_3 \frac{dq}{dt} - \gamma_2 \frac{dr}{dt}\right) \\ \frac{dv}{dt} &= a\left(\frac{d\gamma_1}{dt} r - \frac{d\gamma_3}{dt} p + \gamma_1 \frac{dr}{dt} - \gamma_3 \frac{dp}{dt}\right) \\ \frac{dw}{dt} &= a\left(\frac{d\gamma_2}{dt} p - \frac{d\gamma_1}{dt} q + \gamma_2 \frac{dp}{dt} - \gamma_1 \frac{dq}{dt}\right). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen dienen dazu, die Größen $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ aus (42) fortzuschaffen. Nachher ersetzt man noch $\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \frac{d\gamma_3}{dt}$ durch die rechten Seiten von (35), ferner u, v, w durch die rechten Seiten von (36) und erhält schließlich

$$(44)\quad \begin{cases} (P + a^2M(\gamma_2^2 + \gamma_3^2))\frac{dp}{dt} - a^2M\gamma_1\gamma_2 \frac{dq}{dt} - a^2M\gamma_1\gamma_3 \frac{dr}{dt} = (Q-R)qr \\ (Q + a^2M(\gamma_3^2 + \gamma_1^2))\frac{dq}{dt} - a^2M\gamma_2\gamma_3 \frac{dr}{dt} - a^2M\gamma_2\gamma_1 \frac{dp}{dt} = (R-P)rp \\ (R + a^2M(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))\frac{dr}{dt} - a^2M\gamma_3\gamma_1 \frac{dp}{dt} - a^2M\gamma_3\gamma_2 \frac{dq}{dt} = (P-Q)pq. \end{cases}$$

Nun liegen Gleichungen vor, die in $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ linear sind und eine positive Determinante haben. Es ergeben sich so $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$

ausgedrückt in den Größen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r$, die, abgesehen von der Relation

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

für den Anfangszustand beliebig sind.

Der einfachste Fall ist der, in welchem

$$P = Q = R,$$

wie z. B. bei der homogenen Kugel. Es ergeben dann die Gleichungen (44)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0,$$

d. h. man hat eine in der Kugel feste Drehungsaxe und gleichförmige Drehung. Mit Hilfe der letzten Gleichungen und der Relationen (43), (35) und (36) ergiebt sich jetzt noch

$$\frac{d}{dt}(\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w) = 0.$$

Dies bedeutet, daß sich der Mittelpunkt geradlinig und gleichförmig bewegt.

Nunmehr nehmen wir die Trägheitsmomente P, Q, R wieder als verschieden, aber den Anfangszustand so an, daß $p = q = 0$. Es ist dann im Anfang die Drehaxe eine der Hauptaxen. Die Gleichungen (44) ergeben jetzt, daß $p = q = 0$ und $r = \text{const}$ bleibt, und die Bewegung verläuft in diesem Fall wie bei der homogenen Kugel. Dies konnte auch vorausgesehen werden. Denkt man sich nämlich den Anfangszustand der Bedingung gemäß, jedoch die Kugel als völlig frei und keinen Kräften unterworfen, so wird die Bewegung so, wie beschrieben, verlaufen. Entspricht dabei der Anfangszustand einem reinen Rollen auf der Ebene, so gilt dasselbe von allen Folgezuständen. Fügt man nun den Zwang hinzu, der das Gleiten verhindert, so kann dieser nichts an der Bewegung ändern.

Tübingen, Mai 1896.

Versuche zum Nachweis einer orientirten electrischen Oberflächenleitung.

Von

Ferdinand Braun.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Juni 1896 von Eduard Riecke.

Beim Wachsen eines Krystalles lagern sich die neuen Theilchen orientirt an die starren Theile an. Es ist möglich, daß die Orientirung erst im Moment des Ausscheidens entsteht, es ist aber auch denkbar, daß sie schon in der Flüssigkeit vorhanden ist. Ich habe die Frage wiederholt experimentell in Angriff genommen, ohne daß es mir gelungen wäre, eine mechanische Kraft nachzuweisen, welche etwa ein Krystall auf einen gleichen, der sich nahe dem ersten in einer gesättigten Lösung des betreffenden Stoffes befand, ausübte. Ebenso ist es mir nicht möglich gewesen, in einem engen Raume gesättigter Lösung, welche sich zwischen den großen ebenen Flächen zweier gleich orientirten Krystalle befand, auf optischem Wege eine Anisotropie der Lösung (Doppelbrechung) aufzufinden.

Dagegen schien man durch die folgende Erwägung zu einer Thatsache zu kommen, welche in dieser Frage weiter führen könnte. Von G. Wiedemann rührt der folgende Versuch: Bestäubt man die Spaltfläche eines Gypskrystalles mit Lycopodium und läßt von einer darauf gesetzten Metallspitze einen electrischen Funken überschlagen, so wird das leichte Pulver in der Weise weggeblasen, daß eine von Strahlen durchzogene Ellipse frei wird. Die Axen dieser Ellipse fand G. Wiedemann ungefähr im Verhältniß 1 : 2 bis 1 : 3 stehend. Aehnliche Erscheinungen beobachtete er, theilweise weniger gut ausgeprägt, auf den Flächen anderer nicht regulärer Krystalle. G. Wiedemann deutet diesen Versuch als einen Beweis für die Verschiedenheit der electrischen Leitfähigkeit im Krystalle nach den verschiedenen Richtungen. Gibt man diese Auffassung zu, so führt sie aber noch weiter.

Prüft man nämlich die Leitfähigkeit eines Gypssplättchens mit gut definirten Methoden, so überzeugt man sich bald, daß ein selbst in recht trockener Zimmerluft befindliches noch viel besser leitet, als wenn die Luft künstlich getrocknet wird. Daraus wäre zu schließen, daß jedenfalls die gesammte Leitung von Krystall plus Oberflächenschicht eine orientirte ist. Könnte man die Leitung des Krystalles selber vollständig vernachlässigen, so wäre damit ein electrisches Verhalten der Oberflächenschicht nachgewiesen, wie wir es sonst nur in den Krystallen kennen.

Am einfachsten würden natürlich Modificationen des Wiedemann'schen Versuches die Frage entscheiden lassen. Es zeigte sich aber bei denselben, daß die von vornherein beanstandbare Auslegung (Wiedemann selbst betont, daß die Figuren nur mit positiver Electricität gut werden) des Versuches in Wirklichkeit nicht gestattet ist. Doch konnte ich nach anderen Versuchen nicht bezweifeln, daß die Wiedemann'sche Ellipse auf irgend einer electrischen Anisotropie beruhe, und dies veranlaßte mich die Ausgangsvorstellung weiter zu verfolgen.

Meine Beobachtungen machen mir in hohem Maße wahrscheinlich, daß in der That die dünne wässerige Oberflächenhaut, welche sich aus feuchter Luft auf Gypskrystallen niederschlägt, orientirte electrische Leitung zeigt. Bei den großen Schwierigkeiten auf welche man stößt, ist mir freilich eine so sichere Entscheidung, wie ich gewünscht hätte, nicht möglich gewesen. Nachdem mich aber die zeitraubenden Versuche während zweier Winter beschäftigt haben und ich nicht weiß, ob ich auf dieselben zurückkommen werde, möchte ich doch einiges aus denselben mittheilen.

Die Beobachtungsmethode war die schon früher von mir benutzte. Eine gut isolirende Leydener-Batterie, geladen zwischen 500 und 2200 Volt, dient als Electricitätsquelle. Das Potential derselben wird direct abgelesen. Die Stärke des Stroms wird durch die Geschwindigkeit gemessen, mit welcher er ein Quadrantelectrometer bekannter Capacität (rund 40 Cm) auf ein gewisses aber kleines Potential ladet (1 Volt ca. 50″).

Die Krystallplatte lag auf Paraffin in einem inwendig mit Metall bekleideten Glascylinder. Den ziemlich dicht schließenden Metalldeckel durchsetzten außer den nöthigen Zuleitungen ein Glasrohr, durch welches ein Luftstrom, der durch Watte filtrirt war, eingeleitet wurde. Die Luft passirte vorher zwei Waschflaschen, welche Mischungen von Wasser und Schwefelsäure enthielten. Je nach der Concentration der Schwefelsäure bekam die Luft verschiedenen Feuchtigkeitsgehalt.

Die nöthigen Vorsichtsmaßregeln (Schutz vor electrostatischen Störungen, gute Isolation etc.) waren getroffen.

Als Electroden dienten in einer Reihe von Beobachtungen Stanniolkreise von 8 Mm Durchmesser, welche mit etwas Klebstoff auf der Gypsplatte so befestigt waren, daß sie derselben ganz vollkommen anlagen, daß aber doch keine Verunreinigung und keine mechanische Verletzung der frei gebliebenen Gypsfläche dabei entstand (feuchte zarte Baumwolle zerkratzt den Krystall nicht). Gewöhnlich wurden drei Electroden A, B, C aufgesetzt, welche meist bei A einen rechten Winkel einschlossen. Ihre kürzeste Entfernung war beispielsweise 20 Mm.

Der Strom floß während der ganzen Beobachtungsreihe gleichzeitig von A nach B und C; gemessen wurde abwechselnd die Stromstärke in der Richtung AB und AC.

Daß man dabei nicht ganz rein das Gewünschte beobachtet, ist klar, doch liegen darin nicht die Schwierigkeiten. —

Vergleichbare Zahlen bekommt man, wie ich gleich hier erwähnen will, nur, wenn man den Feuchtigkeitsgehalt und die electromot. Kraft des Stromes sehr lange constant hält.

Die Beobachtungen der folgenden Tabelle erstrecken sich auf einen Zeitraum von 4 Tagen, und während der ganzen Zeit war die Platte vom Strom durchflossen. Die Temperatur schwankte Tags und Nachts nur um einige Grade. Der Feuchtigkeitsgehalt ist nicht scharf in ihr definirt; ein ungefähres Maß für die Dicke der Wasserhaut ergibt sich aus der Leitfähigkeit, doch wurde auf längeres Constanthalten der Feuchtigkeit damals vielleicht noch nicht genügend geachtet. Als Maß der Leitfähigkeit (λ) ist angegeben

$$\lambda = \frac{\text{Ablenkung des Electr. in Scalentheilen}}{\text{Zugehörige Zeit} \times \text{Potl. d. Batt.}} \cdot 10^6$$

No.	Potential der Batterie	Richtung AC Electr. macht	λ_1	Richtung AB Electr. macht	λ_2
1	2300 Volt	30 Scalenth. in 58″	225	30 Scalenth. in 27″,5	474
2	2150 „	200 „ 10″	9300	200 „ 7″,4	12570
3	2220 „	„ „ 17,1	5267	„ „ 10,6	8498
4	2250 „	„ „ 19,9	4466	„ „ 11,5	7729
5	2100 „	„ „ 4,2	22680	„ „ 4,4	21640
6	2250 „	„ „ 64,3	1382	„ „ 37,3	2383
7	2350 „	„ „ 51	1668	„ „ 35	2431
8	2220 „	50 „ 45	500	50 „ 25	901
9	2200 „	„ „ 204	114	„ „ 72	326
10	2240 „	„ „ 80	279	„ „ 41	544
11	2220 „	25 „ 205	55	25 „ 65	173
12	2280 „	50 „ 100	219	50 „ 42,5	516

Die Zahlen sind angeführt in der Reihenfolge, in welcher sie

gewonnen werden. Die Beobachtungen No. 11 sind gemacht, nachdem die Platte 5 Stunden lang einem mit conc. Schwefelsäure getrockneten Luftstrom ausgesetzt war. Nimmt man sie als die wahren Leitfähigkeiten l_1 und l_2 des trockenen Krystalles, so ergibt sich für die Leitfähigkeit der Oberflächenschicht die folgende Tabelle

No.	$\lambda_1 - l_1$	$\lambda_2 - l_2$
1	170	300
2	9245	12400
3	5212	8325
4	4411	7556
5	22600	21470
6	1327	2210
7	1613	2258
8	445	728
9	59	153
10	224	371
12	164	343

Die Zahlen No. 5 sind, wie die directen Beobachtungsdaten zeigen, innerhalb der Messungsfehler als gleich zu betrachten. Die Batterie war negativ geladen. Später wurde stets positive Ladung benutzt; ich habe keinen Unterschied bemerkt.

Aehnliche Resultate wurden mit anderen Gypsplatten erhalten. Sie kommen qualitativ darin überein, daß die Oberflächenschicht in derjenigen Richtung besser leitet, in welcher auch die möglichst trockene Substanz bessere Leitung zeigt. Bei einer Leitfähigkeit von 30000 im obigen relativen Maße hörte der Unterschied auf. Eine Schwierigkeit entsteht für die Versuche dadurch, daß eine Richtung zu existiren scheint, in welcher auch der trockene Krystall so gut leitet, daß man die Leitung der aufgelagerten Wasserhaut nicht mehr sicher von ihr trennen kann, wenigstens so lange dieselbe nicht eine beträchtliche und daher nicht mehr interessirende Dicke erreicht.

Eine vorzüglich isolirende (alte) Glasplatte, ebenso geprüft, zeigte keinen merklichen Unterschied nach zwei Richtungen. Aber auch auf Flächen von Quarz (parallel der Hauptaxe geschliffen), auf Kalkspath (natürliche polirte Fläche) und auf Spaltungsflächen von Glimmer, welche in derselben Weise hergerichtet wurden, waren die Unterschiede nicht so groß, daß ich wagen möchte, aus ihnen auf eine orientirte Leitung zu schließen.

Zur Erklärung des verschiedenen Verhaltens von Gyps einerseits, den genannten Krystallen andererseits, scheinen mir drei Punkte zu beachten: 1) die Krystalle können quantitativ sich ver-

schieden verhalten; Gyps ist auch für orientirte Wärmeleitung ein besonders günstiges Material; 2) Gyps, sowohl an frischen, als auch an alten Spaltungsflächen, wird von Wasser in ganz hervorragender Weise benutzt; 3) Gyps löst sich ziemlich beträchtlich in Wasser und man wird daher wohl eine mehr oder weniger gesättigte Lösung auf der Oberfläche sich zu denken haben. Eine Orientirung wird man vorzugsweise von den gelösten Theilchen erwarten dürfen. Andererseits leitet gesättigte Gypslösung bei 22° nach den Bestimmungen von Kohlrausch und Rose ca. 2000mal besser als möglichst reines Wasser oder eine Lösung von Kieselsäure und von kohlens. Kalk.

Bei den angeführten Versuchen überstrich der Strom den Krystall nicht nur in verschiedenen Richtungen, sondern auch gleichzeitig an verschiedenen Stellen. Die daraus entstehende Unsicherheit ist sehr schwer zu eliminiren. Ich habe es in der folgenden Weise versucht. Eine besonders gute ebene dünne Gypsplatte von 0,25 Mm Dicke wurde mit abhebbaren Electroden geprüft, die folgendermaßen hergerichtet waren. Ein 2,5 Mm dicker, 22 Mm breiter Gummistreifen wird der Quere nach unter 45° gegen die Fläche scharf durchgeschnitten. Der Gummistreifen, namentlich die entstandene Schneide wird mit ächtem Goldblatt zweifach beklebt und zur Herstellung einer Electrode wird ein ca. 12 Mm langes Stück davon in ein federnd zusammengebogenes Messingblech eingeklemmt. Man drückt die ganze Schneide auf die Gypsplatte auf; damit sie sich dabei stets gut der Platte anfügt, wird sie nicht mittelst eines starren Drahtes auf die Krystallfläche aufgepreßt, sondern mittelst einer Spiralfeder, welche an die Messingklemme angelöthet ist. Diese gibt gleichzeitig ausreichend gegen Biegung nach. Das Goldblatt wird, soweit es nicht leitende Oberfläche behalten muß, mit alkoholischer Schellacklösung lackirt; dadurch wird das Abblättern von Goldblatt bei dem unvermeidlichen Durchbiegen der Gummilamelle vermieden. Diese Contacte bewährten sich in soweit, daß innerhalb ziemlich weiter Grenzen die Stärke des Andrückens die beobachtete Leitfähigkeit nicht wesentlich änderte.

Zwei solcher Electroden waren im constanten Abstand von 18 Mm und von einander isolirt in einer Metallröhre angebracht. Diese selber konnte verschoben, gedreht und festgeklemmt werden in einem Metallrohr, das im Deckel des Glascylinders eingelöthet war. Auf der lange Zeit gut getrockneten Gypsplatte wurden zwei Richtungen aufgesucht, nach denen die Leitfähigkeiten etwa im Verhältniß 1 : 2 standen. In den gleichen Richtungen wurde

die Leitfähigkeiten des in feuchter Luft befindlichen Gypses in abwechselnden Beobachtungen geprüft, auch die Stellen auf der Platte gewechselt. Die Anfangswerthe des Widerstandes sind nicht mit einander vergleichbar; die Endwerthe zeigten immer einen Unterschied, der für alle geprüften Plattenpartieen und für verschiedene Stromdichten (Potentiale der Batterie zwischen 500 und 1100 V. gelegen) qualitativ der gleiche war; z. B.

640 Volt

Richtung I		Richtung II	
gleich nach Schluß	100″ = 5″		
18′ „ „	= 6″		
		gleich nach Schluß 100″ =	13″
		9′ „ „ =	15,2
gleich nach Schluß	100″ = 9″,2		
9′ „ „	= 9,4		
Getrocknet	100″ = 260″		

Dieselbe Platte wurde im letzten Winter, nachdem sie lange Zeit in einem Strome fließenden Wassers gewaschen und dann mit destillirtem Wasser wiederholt abgespült war, nochmals in der gleichen Weise untersucht. Die Beobachtungsreihe erstreckte sich über einen Zeitraum von 6 Tagen; Potential und Feuchtigkeitsgehalt wurden immer Stundenlang constant erhalten; die angegebenen Zahlen sind die merklich constanten Endwerthe.

Luft geleitet durch Schwefelsäure von	Das Electrometer gibt 100″ in der Zeit		Verhältniß der Leitfähigkeiten
	Strom in Richtung a	Strom in Richtung b	
1,6 spec. Gewicht	120″	—	
	—	360″	
	250″	—	2,5
		500″	
1,5 „ „	—	290″	
	80″	—	3,2
		270″	
1,4 „ „	54	—	
	—	88	1,8
	44	—	
1,3 „ „	11	10,7	1,0
1,84 und $P_2 O_5$	130″	560″ nach 3 Stunden	
		360″ „ 15 „	
		ca. 1300″ „ 20 „	
	400″	1000″ „ 27 „	

Die Richtungen a und b schlossen einen Winkel von etwa 70° mit einander ein. Auch gegen diese Versuche wird man einwenden können, daß eine Controle für das stets gleichmäßig gute Anliegen

der Contacte fehlt. Hält man aber doch nach dem ganzen Verlauf der Erscheinungen es für berechtigt, auf eine orientirte Oberflächenleitung zu schließen, so fragt es sich, wie man dieselbe zu deuten hat. Die Schwierigkeiten, welche ich anfänglich in dieser Hinsicht sah, verschwinden, wenn man sich an Folgendes erinnert: 1) zeigt sich die innere Leitung von Stoffen, wie Gyps, die wohl unzweifelhaft electrolytisch leiten, gleichfalls orientirt. Man muß also auch da den Jonen eine je nach der Richtung im Krystall verschiedene Beweglichkeit beilegen; 2) hat Lehmann gezeigt, daß auch flüssige Körper sich optisch wie Krystalle verhalten können; 3) fragt man endlich nach der Dicke der leitenden Oberflächenschicht, so ergibt sich, daß eine auf Gyps niedergeschlagene, welche schon zu den bestleitenden von mir überhaupt geprüften gehört (100^{cc} in 3″ zurückgelegt; Potential 760 V.; Abstand der Schneiden 18 Mm, Breite derselben = 22 Mm) eine Dicke von $1{,}6 \cdot 10^{-10}$ Mm hat. Dabei ist gleichmäßige Dicke vorausgesetzt und angenommen, es habe sich eine Schicht gesättigter Gypslösung gebildet, der man nach den Kohlrausch-Rose'schen Zahlen eine Leitfähigkeit von 2000 (Hg = 10^{10}) beilegt. Setzt man eine Belegung mit Wasser von der Leitfähigkeit = 1 voraus, so würde die Schicht 2000 mal dicker, aber sie würde immer noch die enorm geringe Dicke von $3{,}2 \cdot 10^{-7}$ Mm erhalten.

Da man mit Bestimmtheit noch Oberflächenschichten von 50mal größerem Widerstand nachweist, so ergeben sich damit Werthe von höchstens $6 \cdot 10^{-9}$ Mm. Auf ähnliche Schichtdicken führen unter den gleichen Annahmen die Oberflächenleitungen anderer Krystalle. Einige Beispiele mögen es erläutern. Die Electroden waren aufgeklebte Stanniolkreise. Ich gebe direct die Beobachtungsdaten, weil sie zeigen, wie weit man in dem Nachweis noch dünnerer Schichten ohne Schwierigkeit gelangen kann.

	Kalkspath	Glimmer		Quarz
Potential der Flasche	2000 V.	2000 V.	2000 V.	2100 V.
Electr. macht 100^{cc} in	20″	4″,5	100″	120″
Dicke der Schicht	$0{,}56 \cdot 10^{-7}$ Mm	$2{,}5 \cdot 10^{-7}$	$0{,}11 \cdot 10^{-7}$	$0{,}09 \cdot 10^{-7}$

Die Leitfähigkeit der Flüssigkeitshaut ist dabei gleich 10^{-10} (Hg = 1) gesetzt (Kohlrausch[1]) gibt $0{,}6 \cdot 10^{-10}$ an als „das ungefähre Leitvermögen, welches, in Berührung mit Luft, das Wasser mindestens annimmt“). Da man noch continuirliche Lei-

1) Kohlrausch u. Heydweiller, Sitzb. d. Kgl. Akad. Berl. 1894, p. 298.

tungsabnahme bei Verkleinerung der Feuchtigkeit des umgebenden Raumes findet, so führen solche Zahlen zu der Frage, ob man die Molecüldurchmesser kleiner anzunehmen hat, als seither; oder ob man der Oberflächenhaut die spec. Leitfähigkeit einer Schicht von endlicher Dicke beilegen darf oder ob nicht die dünne Wasserhaut gewissermaßen schon zur Unterlage gehört.

Ob man überhaupt noch von einer Wasserhaut reden darf, könnte fraglich erscheinen gegenüber der Erwägung, daß diese höchstens sehr schwache Salzlösung im Dampfspannungsgleichgewicht mit relativ concentrirter Schwefelsäure steht. Doch ist dies in vollkommener Uebereinstimmung mit den von Cantor[1]) theoretisch abgeleiteten und experimentell bestätigten Schlüssen, daß Wasserdampf an Flächen, auf welchen sich flüssiges Wasser ausbreitet, eine Condensation erfahren muß schon in Räumen, die vom Sättigungspunkt noch entfernt sind. Dies gilt für Gyps. — Umgekehrt beschlagen sich nach Cantor Flächen, auf welchen Wasser sich nicht ausbreitet, im gesättigten Dampf noch nicht. Daraus erklärt sich die, auch hier verwendete, werthvolle Eigenschaft des Paraffins noch in gesättigtem Wasserdampf ein guter Isolator zu bleiben.

Ich habe auch versucht an Metallschichten (Ag, Au und in AgJ verwandeltes Ag), die ich auf Krystallen sich chemisch niederschlagen ließ, auf optischem Wege eine Anisotropie nachzuweisen. Daß diese Versuche zu keinem positiven Ergebniß führten ist wenig verwunderlich schon in Anbetracht des Umstandes, daß die Grenze für eine orientirende Wirkung des Krystalles nach obigen Versuchen sich auf höchstens 4 bis $5 \cdot 10^{-7}$ Mm erstreckt.

Da auch andere Methoden, um in übersichtlicherer und einwurfsfreier Weise die supponirte orientirte Oberflächenleitung nachzuweisen bei den Schwierigkeiten, welche der Gegenstand und das Material bieten, zu keinem befriedigenden Resultate geführt haben, so begnüge ich mich mit den mitgetheilen Thatsachen.

1) Cantor, Wied. Ann. Bd. 56, p. 492, 1895.

Ueber den continuirlichen Uebergang einer electrischen Eigenschaft in der Grenzschicht von festen und flüssigen Körpern.

Von

Ferdinand Braun.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Juni 1896 von Eduard Riecke.

Die Versuche, über welche ich oben berichtete, deuteten auf eine Erscheinung hin, welche gewissermaßen einen continuirlichen Uebergang im electrischen Verhalten zwischen den dünnen, einem festen Körper aufgelagerten Flüssigkeitsschichten und der festen Unterlage selber darstellt. Sie war für mich von besonderem Interesse, weil sie mir eine willkommene und schon längst gesuchte Bestätigung bot für Anschauungen, welche ich mir über die Natur des Flüssigkeitszustandes gebildet hatte und auf welche ich demnächst zurückzukommen gedenke.

Stets beobachtete man, daß die Leitfähigkeit mit der Zeit des Stromdurchganges abnahm und erst allmählich einen constanten Grenzwerth erreichte. Diese Zeit dauerte um so länger, je geringer die Leitfähigkeit überhaupt war und wechselte nach Maßgabe dieser Größe zwischen vielen Stunden bis herab zu Minuten und Secunden.

Als ich gelegentlich einer früheren Untersuchung über die Leitfähigkeit von Steinsalz auf diese schon lange beobachtete Erscheinung stieß, faßte ich sie, weil mir dies am natürlichsten erschien, als Folge einer Rückstandsbildung auf. Mag diese Anschauung richtig sein oder nicht, (andere Beobachter deuten sie anders [1]), jedenfalls veranlaßte sie mich zu prüfen, ob sich in der dünnen wässerigen Oberflächenschicht Rückstand nachweisen lasse. Dieser Nachweis ist mir, wie ich glaube vollständig gelungen.

---

1) Vgl. Winkelmann, Handbuch III 1, p. 322.

Die Flüssigkeitshaut zeigt, um das Resultat vorauszunehmen, einen Rückstand, der an Größe mit zunehmender Dicke der Haut abnimmt und dem Werthe, wie er durch gewöhnliche electrolytische Polarisation entstehen kann, zustrebt.

Ich betrachte diese Rückstandsbildung für bewiesen, wenn man Folgendes zeigen kann: 1) es findet sich an den Electroden eine Potentialdifferenz, welche nach Unterbrechung des polarisirenden Stromes mit der Zeit zunimmt; 2) ihre Größe liegt wesentlich über dem Maximum galvanischer Polarisation, stimmt dem Sinne nach mit ihr überein und wächst mit zunehmender electromotorischer Kraft des polarisirenden Stromes; 3) der Rückstand, wie er der festen Unterlage zukommt, kann den beobachteten Rückstand nicht erklären.

Die innere Belegung einer geladenen Leydener Batterie führte zu einer der dünnen Krystallfläche aufgesetzten Electrode. Die zweite Electrode war mit der abgeleiteten äußeren Belegung verbunden. Diese Leitung konnte unterbrochen und statt ihrer die Verbindung mit dem einen Quadrantenpaar eines Electrometers hergestellt werden, dessen anderes Quadrantenpaar stets mit Gehäuse, äußerer Belegung der Batterie und Erde verbunden blieb. Während der polarisirende Strom floß, war das Electrometer nicht eingeschaltet. Zur Beobachtung des Rückstandes wurde der Regel nach die innere Belegung der Batterie dauernd zur Erde geleitet, kurz darauf die Erdleitung der zweiten Electrode unterbrochen und die Electrode an das Electrometer angelegt. Von diesem Momente ab wurden Zeiten gezählt und der Gang des Electrometers beobachtet. Die Ausschläge des Instrumentes sind in Volt umgerechnet, was natürlich, da es nicht ganz aperiodisch schwang, für die ersten Beobachtungen einer Reihe etwas Willkür einschließt.

Gypsplatte I (0,25 Mm dick). Electroden vergoldete Gummischneiden.

1. Eine halbe Stunde lang mit trockenem Luftstrom (SH_2O_4 u. P_2O_5) behandelt. 8 Minuten lang Strom von 550 V. hindurch. Die Leitfähigkeit ist gefallen während dieses Stromdurchganges von 100 Scalenth. in 20″ auf 100 Scalenth. in 110″ [1]).

1) Wegen dieses Maßes der Leitfähigkeit vgl. den vorstehenden Aufsatz.

15″	nach	Unterbrechung	des	Stromes	zeigt	Electr.	250^{cc} =	5,5 Volt
30″	„	„	„	„	„	„	330 =	7,3 „
45	„	„	„	„	„	„	375 =	8,2 „
1′ —	„	„	„	„	„	„	405 =	8,9 „
15	„	„	„	„	„	„	430 =	9,4 „
30	„	„	„	„	„	„	445 =	9,8 „
45	„	„	„	„	„	„	457 =	10,0 „
2 —	„	„	„	„	„	„	469 =	10,3 „
15	„	„	„	„	„	„	480 =	10,6 „
30	„	„	„	„	„	„	493 =	10,8 „

Beobachtung abgebrochen.

2. 6′ lang Luft, die durch Schwefelsäure von 1,4 spec. Gewicht hindurch gegangen war, über die Platte geleitet. Strom von 550 Volt 2′ lang. Leitfähigkeit 100^{cc} = 42″.

Rückstand nach		
15″	280^{cc} =	6,2 Volt
30	375 =	8,2 „
45″	425 =	9,4 „
1′ —	460 =	10,1 „
30″	510 =	11,2 „
2 —	545 =	13 „

Der Vergleich der zwei Tabellen lehrt, daß der Rückstand, welcher zu einer gewissen Zeit zur Beobachtung kommt, höhere Werthe erreicht durch die aufgelagerte, übrigens, nach ihrer Leitfähigkeit beurtheilt, noch sehr dünne Flüssigkeitshaut (obschon im letzten Fall die Zeit der Durchströmung kleiner gewählt war).

Je dicker die Haut wird, desto rascher tritt dies ein; z. B.

Luft 14′ durch Schwefelsäure von 1,3. Leitf. 100^{cc} = 8″. Rückstand:	Luft 23′ durch Schwefels. von 1,3. Leitf. 100^{cc} = 5″. Rückstand:	Luft 5′ durch Schwefels. von 1,1. Leitf. 100^{cc} = 1″. Rückstand:
nach 10″ 510 = 10,2 V.	nach 7″ über die Scala,	Spiegel sofort
„ 15″ über die Scala.	d. h. > 13,6 V.	über die Scala.

Die Versuche geben natürlich nur ein Maß für die untere Grenze des Rückstandpotentiales; sie zeigen auch nicht etwa, daß dies in der Flüssigkeitshaut größer wäre, als in der festen Unterlage; sie beweisen aber, daß die Rückstandsbildung, welche während der kurzen Beobachtungszeit in der Unterlage auftritt, die beobachteten Rückstände nicht erklären kann und somit letztere wesentlich der Flüssigkeitshaut zugeschrieben werden müssen.

Es sollte nun geprüft werden, ob die Rückstände mit wachsendem Potential des polarisirenden Stromes noch zunahmen, und deshalb wurde zum Electrometer eine Leydener Flasche geschaltet, wodurch die Capacität, welche durch den Rückstand zu laden war, auf das 22fache erhöht wurde.

Es ergab sich folgende Tabelle:

Luft 14′ durch Schwefels. von 1,1
Leitfähigkeit [1]) $100^{M} = 0'',1$

Ladung von Electrometer und Flasche durch den Rückstand

	Polarisirt mit 550 V.	Polarisirt mit 1600 V.
nach 10′	$70^{M} = 1{,}54$ V.	$180^{M} = 3{,}96$ V.
„ 30′	105 = 2,30 „	215 = 4,73 „
„ 45	130 = 2,86 „	225 = 4,95 „ (Max.)
„ 60	150 = 3,30 „	220 = 4,82 „
„ 90	190 = 4,18 „	206 = 4,53 „

Der Electrometerausschlag nimmt also auch mit wachsender electromotorischer Kraft des zersetzenden Stromes zu; es findet sich also auch in dieser Beziehung die Eigenschaft des Rückstandes gegenüber den Eigenschaften wie sie electrolytische Polarisation an zwei Electroden zeigen würde. In der zweiten Reihe erreicht die Rückstandsladung schon ihren Maximalwerth und fällt dann. Die Potentiale liegen jedenfalls noch recht hoch.

Daß sie mit zunehmender Dicke der Flüssigkeitsschicht wieder fallen und endlich in den Werth der electrolytische Polarisation übergehen müssen, ist selbstverständlich. Fraglich kann nur sein, ob ein Belag, der noch nicht die Form einer tropfbaren Flüssigkeit besitzt, schon diesen Uebergang anzeigt.

In der That tritt dies ein, aber erst, wenn die Leitung so gut wird, daß die zur Stromerzeugung benutzte Leydener Batterie (9 Flaschen von insgesammt etwa 1200 Cm Capacität) anfängt ihre Ladung schon in sehr merklicher Weise zu verlieren. Man beurtheilt die Leitung am bequemsten nach diesem Abfall des Potentiales. Ich habe so beobachtet (die Luft wurde durch Schwefelsäure von 1,02 geleitet; Anfangsladung war 500 V.).

1) Beobachtet, indem zum Electrometer gleichfalls eine Leydener Flasche geschaltet war und daraus umgerechnet in das frühere Mass.

Batterie verliert 50 V. in	Widerstand der Flüssigkeitshaut	Rückstand Erster Ausschlag des Electrometers	Rückstand etwa gleich
45″	$31{,}5 \cdot 10^{11}$ Ω	370	6,3 V.
16″	$11{,}2 \cdot$ „	240	4,1 „
12	$8{,}4 \cdot$ „	140	2,4 „
11	$7{,}7 \cdot$ „	90	1,5 „
10	$7{,}0 \cdot$ „	90	1,5 „
6	$4{,}2 \cdot$ „	90	1,5 „

Auch in der bestleitenden Schicht scheint noch etwas Rückstand enthalten zu sein, da nach Polarisirung mit 1000 Volt der Electrometerausschlag auf 125″ = 2,1 Volt stieg. Jedenfalls ist man aber der Grenze, wo nur noch eletrolytische Polarisation vorhanden ist, sehr nahe gerückt. Die Dicke der Flüssigkeitshaut wäre dabei rund $56 \cdot 10^{-10}$ Mm, wenn man ihr die Leitfähigkeit einer gesättigten Gypslösung beilegt. Wollte man sie als reines Wasser betrachten (Ltf. 10^{-10}), so käme die 2000mal größere Dicke von $11{,}2 \cdot 10^{-6}$ Mm heraus.

Auch die Wasserhaut, welche sich auf Glimmer niederschlägt, zeigt die gleichen Eigenschaften. Glimmer hat durch seine viel geringere Leitfähigkeit im trockenen Zustande und seine größere Spaltbarkeit den Vortheil, daß man den störenden Einfluß der Unterlage noch weiter zurückdrängen kann. Doch scheint der Rückstand selber geringer zu sein im Zusammenhang voraussichtlich mit der geringeren Löslichkeit der Substanz.

Was die Deutung der Beobachtungen betrifft, so ist zweierlei zu beachten: 1) Die Electrometerausschläge, welche ich als Rückstand ausgelegt habe, können nicht von der Ladung der Krystalloberfläche mit freier Electricität herrühren, welche nach Unterbrechung der Erdleitung dem Electrometer zufließt — sonst müßte das Instrument bei positiv geladener Flasche auch positive Electricität angeben, während es negative zeigt. 2) Man kann auch nicht annehmen, daß man den Rückstand der Unterlage messe, nur daß diese bei feuchter Oberfläche dem Electrometer rascher zufließe. Denn auch hier müßte das Gegentheil vom Beobachteten eintreten, nämlich die Electrometerablenkungen müßten bei feuchter Oberfläche kleiner werden, weil die andere Electrode jetzt zur Erde geleitet ist. In der That; ließ man z. B. im trockenen Gyps sich Rückstand bilden, beobachtete dessen zeitliche Entwickelung am Instrument und ließ nun, während der Spiegel langsam von der Ruhelage wegwanderte, plötzlich feuchte Luft über die Oberfläche strömen, so trat ein, was zu erwarten war: der Spiegel setzte Anfangs seine Wanderung noch im Sinne frei werdenden Rückstan-

des weiter fort, kehrte aber, sobald die Feuchtigkeit anfing sich niederzuschlagen, rasch zur Ruhelage zurück. War dabei die andere Electrode nicht zur Erde geleitet, sondern nur von der Batterie getrennt aber isolirt, so ging der Spiegel über die Nullstellung des Instrumentes hinaus, indem nun die freie Ladung der Oberfläche dem Electrometer zufloß und dasselbe Electricität vom Vorzeichen der Batterieladung angab.

Die Versuche sind daher wohl nicht anders zu deuten, als durch die Annahme, daß in dünnen, einem festen Köper aufgelagerten electrolytisch leitenden Flüssigkeitshäuten electrischer Rückstand entsteht, d. h. daß ihnen electrische Eigenschaften zukommen, welche wir sonst nur an festen Körpern kennen.

Ueber die Leitung electrisirter Luft.

Von

Ferdinand Braun.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Juni 1896 von Eduard Riecke.)

1. Die Frage, ob Gase electrisirt werden können, ist, wenigstens von deutschen Forschern, meistens verneint worden. Alle Erscheinungen, welche dafür sprechen, wurden aus Staubtheilchen erklärt, mögen sie von vornherein im Gase enthalten gewesen sein oder erst durch den Act der Electrisirung (Zerstäuben der Electrode) demselben zugeführt werden. Die Versuche von W. Thomson[1]), welche an die oft aufgeworfene Frage: was gibts mit der Electricität auf einem verdampfenden Wassertröpfchen? wieder anschließen und welche die Möglichkeit einer electrischen Ladung von Gasen mindestens in hohem Maße wahrscheinlich machen, veranlaßten mich zu einigen Beobachtungen über die electrische Leitung von Luft. Ich stellte die Frage: ist „electrisirte" Luft, da sie doch schon einen Strom überträgt, ein Leiter für Electricität in dem Sinn etwa wie eine Lösung?

Die Luft wurde „electrisirt" durch continuirliche Büschel- oder Glimmentladung, die von einer mit dem einen Pol einer kräftigen Influenzmaschine verbundenen ein- oder mehrfachen Spitze ausging, während der andere Pol für gewöhnlich „abgeleitet" war.

2. Man beobachtet dann z. B. Folgendes. Ein Goldblattelectroskop oder eins der von mir beschriebenen Electrometer werde positiv geladen, seine Kugel dann mit einer Kappe aus Metallgaze umgeben, die mit der äußeren Hülle des Electrometers verbunden ist, so daß das Instrument sich gegen äußere Influenz vollständig geschützt zeigt. Wird es, so vorbereitet in negativ geladene Luft gebracht, so fällt der Ausschlag rasch auf Null. Wird die Zimmer-

1) Proc. Roy. Soc. London 1894, p. 84, Bd. 56, Bd. 57 p. 335. 486, 1895.

luft dagegen positiv electrisirt, so ändert sich der Ausschlag auch in sehr langer Zeit nicht. Ebensowenig zeigt das Instrument eine Ladung an, wenn es vorher unelectrisch war.

Das Gleiche tritt ein, wenn die Vorzeichen der Electrometer- und der Luftladung vertauscht werden.

Es erweckt demnach den Anschein, als ob negativ electrisirte Luft positiv unipolar leitend sei und umgekehrt, während die geladenen Lufttheilchen nicht im Stande wären, einen unelectrischen Körper zu laden.

3. Es lassen sich aber alle Erscheinungen einfach so zusammenfassen: Die Luft im ganzen Zimmer wird durch die Spitzenentladung, wie es nicht anders sein kann, da ja der ganze Raum von einem Strom durchsetzt wird, leitend, aber auch gleichzeitig „electrisirt", d. h. es tritt in jedem Volumelement freie Electricität auf vom Vorzeichen der auf der Spitze befindlichen. Was der Träger dieser Electricität ist, bleibe zunächst unentschieden. Die Luft behält ihre Electricität einige Zeit bei, auch wenn sie aus dem Feld, in welchem sie sich ursprünglich befand, entfernt wird. Sie geht daher, wenn sie durch mechanische Mittel bewegt wird, electrisch durch eine aus Metallgaze gebildete geschlossene leitende Oberfläche hindurch. Sie verhält sich im Uebrigen, als ob sie geladene Theilchen in nicht leitendem unelectrischem Gase mitführte, d. h. als ob man leitende electrisirte materielle Punkte mit gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten (die auch Null sein können) in ein electrisches Feld brächte. Aus Richtung des Feldes, Ladungsart der Theilchen, Geschwindigkeit und eventuell noch Reibung bestimmt sich die Bewegung der Theilchen und damit ihre Wirkung auf geladene oder ungeladene Leiter.

4. Einige Versuche mögen das Gesagte erläutern: Die äußere Hülle des Electrometers wird isolirt aufgestellt; über die Kugel desselben kann eine mit dem Gehäuse leitend verbundene Kappe aus Metallgaze gestellt werden, an welcher ein isolirender Stiel befestigt ist.

Das Electrometer selber wird auf + 400 V. geladen; die Hülle, durch Verbindung mit dem einen Pol einer Kette, auf + 200 V. und nun das Ganze in einem negativ electrisirten Luftraum gebracht. Der Ausschlag des Electrometers fällt rasch auf Null, d. h. es nimmt das Potential des Gehäuses an. Die Luft leitete solange ein Feld da war, welches die Bewegung der eindringenden Lufttheilchen begünstigte.

b. Wir laden außen wieder constant auf + 200, während das Innere und damit der Zeiger des Instrumentes auf dem Potential

Null bleibt und bringen das Ganze wieder in die negativ geladene Luft. Der Ausschlag ändert sich nicht, weil das Feld innerhalb des Käfigs jetzt entgegengesetzten Sinn hat.

c. Wir wiederholen den letzten Versuch mit positiver Luftladung; der Ausschlag fällt jetzt auf Null, d. h. das Electrometer geht aufs Potential der Hülle, weil jetzt äußeres und inneres Feld wieder gleich gerichtet sind.

Alle diese Versuche gelingen immer in der gleichen Weise, wenn die Vorzeichen der Luft und Electrometerladung vertauscht werden. Ich habe wenigstens mit Sicherheit keinen „Artunterschied" der Electricitäten dabei beobachten können.

5. Der electrische Strom, welchen die Luft überträgt, kann leicht so stark gemacht werden, daß er schon mit einem verhältnißmäßig unempfindlichen Spiegelgalvanometer nachzuweisen ist, wenn man größere Metallgazestücke als Electroden und eine auf etwa 3000 V. geladene Flasche als Stromquelle benutzt.

6. Die electrisirte Luft läßt sich, wie nach W. Thomson's Versuchen zu erwarten ist, durch Metallgaze und Metallröhren hindurchsaugen, ohne ihre Electricität vollständig zu verlieren. Aber freilich nimmt ihre entladende Wirkung dabei doch so stark ab, daß mir der Versuch erst nach mehrfachen Abänderungen gelang, am besten in der folgenden Weise. Ein Blechtrichter ist an ein 2,5 Cm weites Messingrohr angelöthet. Die dem Trichter zugewendete Rohröffnung ist mit 4 Lagen angelötheter Drahtgaze bezogen. In das Metallrohr taucht, von ihm isolirt, eine Spitze, welche zu dem gut geschützten Electrometer führt. Im Hohlraum des Trichters steht ein Spitzenbüschel, welches die Luft electrisirt. Durch das Messingrohr wird die geladene Luft hindurchgesaugt. Es war eine deutliche entladende Wirkung beim Durchsaugen zu beobachten, aber freilich eine schwache Wirkung auch schon ohne dies da.

Saugt man die Verbrennungsgase einer Bunsenflamme ebenso durch, so entladen diese das positive oder negativ geladene Electrometer.

7. Alle diese Versuche würden sich durch die Annahme von Staubtheilchen erklären lassen. Und die folgende Thatsache scheint diese Auffassung noch zu unterstützen. Läßt man die electrisirte Luft durch einen Wattebausch gehen, so hört jede mit den oben benutzten Mitteln wahrnehmbare Leitung derselben auf. Da aber rußfreie Flammengase, in denen man nicht wohl Staubpartikelchen als die alleinigen leitenden Theilchen voraussetzen kann, sich ebenso verhalten, so liegt es näher zu denken, daß an den großen Flächen

und in den engen Räumen der Watte eine so innige Berührung mit der letzteren zu Stande kommt, daß die Electrisirung an die Watte abgegeben wird.

8. Mit den angeführten Instrumenten war nicht nachzuweisen, daß ein mit Drahtgaze geschützter unelectrischer Körper, wenn man das Ganze in electrisirte Luft brachte, eine Ladung annahm. Benutzt man ein Quadrantelectrometer, so zeigt dasselbe aber eine Electrisirung von einigen Volt an.

Die Größe der Ladung, welche man in einem gegebenen Falle und bei gleicher Ladung der Luft erhält, hängt offenbar lediglich ab von der Geschwindigkeit, mit welcher die electrisirten Lufttheilchen die Hülle durchdringen und von der Stärke und Richtung des Feldes, in welches sie gelangen.

Es ergibt sich so der naturgemäße Uebergang zu dem Verhalten, welches isolirte aber nicht durch Metallnetze geschützte Leiter in der electrisirten Luft zeigen.

8. Bei den Entladungserscheinungen ist mir kein wesentlicher Unterschied aufgefallen zwischen dem Verhalten von mehr oder weniger stark gekrümmten Flächen. Damit aber eine Ladung der Luft zu Stande kommt, liegen die Verhältnisse anders. Dazu gehören sehr starke Gefälle. Man kann mit einer gewissen Annäherung, glaube ich, so sagen: Ungeladene Luft in einen allseitig leitend geschlossenen Raum von größerem Potential gebracht, nimmt diese Ladung nicht an. Ein Versuch wird am besten erläutern, wie ich den Sinn dieses Satzes auffasse. Bringt man einen fortdauernd auf hohes Potential geladenen Spitzenkamm (der dann Glimmentladung zeigt) in ein engeres oder weiteres Glasgefäß, so hört das Glimmen und die Electrisirung der Luft sehr rasch auf. Die gegenübergelegene Wand ist dann geladen. Saugt man durch diesen Raum Luft hindurch, so setzt weder dies Leuchten des Kammes wieder ein, noch zeigt die hindurchgesaugte Luft entladende Wirkung. Denkt man sich statt dessen einen Regen von leitenden Tröpfchen durch ein electrisirtes Rohr so fallend, daß die Tröpfchen theilweise die Wand treffen, so wird die austretende Flüssigkeit natürlich Ladung besitzen. Zwischen Gasen gewöhnlicher Dichte und den eigentlich als Leitern angesprochenen Stoffen besteht also der Unterschied, daß letztere continuirliche Leitung von den kleinsten Potentialdifferenzen an zeigen, während Gase erst Electricität aufnehmen, sobald eine gewisse große Potentialdifferenz überschritten ist. Einmal geladen verhalten sie sich ähnlich discreten materiellen Theilchen, und aus der nahe gelegenen Annahme, daß nur ein relativ kleiner Theil der Gasmole-

cule Ladung erhalten hat, erklären sich die Eigenschaften electrisirter Gase ungezwungen. Die geladenen Lufttheilchen geben voraussichtlich an die sie umgebenden ungeladenen ihre Electricität nicht ab.

Wären Staubtheilchen die Träger der Ladung, so sollte ein Gas unter den gegebenen Bedingungen auch electrisch werden.

Die vorstehenden Versuche waren abgeschlossen Ende December. Als kurz darauf die Röntgen'sche Arbeit erschien, beobachtete ich auch die in der Zwischenzeit von vielen Autoren beschriebene entladende Wirkung der Röntgenstrahlen; ich fand sie unter meinen Versuchsbedingungen kleiner, aber der Größenordnung nach gleich der von electrisirter Luft. Ich versuchte dann auch, ob Glimmentladung, welche über einem Fensterchen von Blattaluminium in gewöhnlicher Luft unterhalten wird, eine entladende Wirkung auf ein hinter dem Aluminiumfenster befindliches und sonst geschütztes Electrometer ausübe, fand aber keinen Einfluß, auch dann nicht, wenn ein sehr dichter Funkenstrom direct auf das Aluminiumfenster überging. Der Versuch zeigt u. A. daß Blattaluminium, obschon es feine Löcher hatte, der electrisirten Luft keinen merklichen Durchtritt mehr gestattet.

Der Frage, ob die von einer glimmenden Spitze fortgeführte Electricität immer von festen Theilchen getragen werden muß, wollte ich experimentell noch näher kommen. In der Zwischenzeit hat die Entscheidung insofern an Interesse verloren, als Röntgen durch einen einwandfreien Versuch gezeigt hat, daß jedenfalls staubfreie Luft durch Beleuchtung mit seinen Strahlen für beide Arten von Electricität leitend werden kann. Sie verliert aber diese Eigenschaft, ebenso wie die electrisirte Luft, mit welcher ich arbeitete, beim Filtriren durch Watte.

Ein Versuch über magnetischen Strom.

Von

Ferdinand Braun.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Juni 1896 von Eduard Riecke).

Ein electrischer Strom bewegt in einem magnetisirbaren Körper den Magnetismus; umgekehrt muß bewegter Magnetismus in einem Leiter electrischen Strom, im Dielectrikum electrische Polarisation hervor bringen. Diese Folgerungen sind bereits mit theilweise sehr difficilen Anordnungen geprüft worden. Ein einfacher Versuch, der die Analogie sehr deutlich heraustreten läßt, ohne natürlich zu seiner Erklärung dieselbe nöthig zu haben, ist der folgende: Zwischen die möglichst weit auseinander gezogenen Pole eines Ruhmkorff'schen Electromagneten wird eine Spule von Eisendraht gelegt (19 Windungen 4 Mm dicken Drahtes; äußerer Durchmesser der Windungen 4 Cm, Länge der Spule 25 Cm; die Enden sind so abgefeilt, daß der Draht sich gut an den Eisenkern des Magneten anlegt). Ein Kupferdraht ist durch die Bohrung der Kerne und die Axe des Eisenspule gerade ausgespannt, seine Enden führen zu einem Wiedemann'schen Spiegelgalvanometer mit wenig Windungen.

Erregt man den Magneten, so wird die Eisenspule von einem magnetischen Strom durchflossen; dieser erregt im axialen Leiter einen electrischen Strom. Der Sinn derselben ist festgesetzt durch die Ampère'sche Regel (Nordmagnetismus und positive Electricität sollen einander vertreten), wenn in ihr das Vorzeichen gewechselt wird.

Nach Entfernen der Eisenspule gibt Erregen oder Oeffnen des Magneten keinen Inductionsstrom im Draht. Ersetzt man die Eisenspule durch eine in anderem Sinn gewickelte, so kehrt der inducirte Strom sein Zeichen um.

Ummagnetisiren des Ruhmkorff wirkt natürlich wegen des remanenten Magnetismus besonders stark.

Beispiel:

Schließen des Magneten gibt ein Feld, wie ein links gelegener Nordpol, rechts gelegener Südpol, d. h. magnetischen Strom durch die Eisenspule von links nach rechts.

Im Felde: Rechtsspule.

Schließen des Magneten gibt im axialen Drahte Strom von rechts nach links.

Erregende Kette	Schließen	Oeffnen	Ummagnet.
1 Accumulator	+ 7,5	— 7	55
2 „	+ 15	— 14	77
3 „	+ 20	— 19	85
5 „	+ 25,5	— 24	93
8 „	+ 31	— 27	96

Das fast aperiodische Galvanometer gab 60 Scalentheile ersten Ausschlag für 1 Milliampère.

Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen.

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Juli 1896.

Im Anschluß an die in diesen Nachrichten vom Jahre 1884 veröffentlichten Untersuchungen von K. Weierstraß über complexe Zahlensysteme hat R. Dedekind in diesen Nachrichten vom Jahre 1885 einen Satz aufgestellt und bewiesen, dessen wesentlicher Inhalt sich, wie folgt, aussprechen läßt:

Man denke sich $e_1, \cdots, e_n$ als n complexe Haupteinheiten eines Zahlengebietes A und es sei die lineare Verbindung

$$\alpha = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

mit beliebigen reellen oder imaginären Coefficienten $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ der allgemeinste eindeutige Ausdruck einer Zahl jenes complexen Zahlengebietes A. Das Product zweier Haupteinheiten sei durch die Formeln

$$e_i e_k = \varepsilon_1^{(ik)} e_1 + \cdots + \varepsilon_n^{(ik)} e_n \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

definirt, wo $\varepsilon_1^{(ik)}, \cdots, \varepsilon_n^{(ik)}$ gewöhnliche reelle oder imaginäre Zahlen bedeuten. Für die Zahlen α des complexen Gebietes A sollen die gewöhnlichen Gesetze der Addition und Multiplikation, nämlich das associative, das commutative und das distributive Gesetz Gültigkeit haben, woraus unmittelbar für die Constanten $\varepsilon_1^{(ik)}, \cdots, \varepsilon_n^{(ik)}$ die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_s^{(ik)} &= \varepsilon_s^{(ki)}, \\ \sum_{(\omega)} \varepsilon_t^{i\omega} \varepsilon_s^{rk} &= \sum_{(\omega)} \varepsilon_t^{k\omega} \varepsilon_s^{ri} \end{aligned}\right\} \qquad (i, k, s, t, r = 1, 2, \ldots, n)$$

folgen. Dementsprechend geschehe das Rechnen mit den Zahlen α des complexen Gebietes A so, als wären $e_1, \cdots, e_n$ unbestimmte Parameter, deren Produkte und Potenzen man vermöge der

Gleichungen (1) stets auf lineare Combinationen dieser Parameter $e_1, \cdots, e_n$ zurückzuführen habe.

Soll dann noch für das complexe Zahlengebiet A der Umstand zutreffen, daß das Quadrat einer Zahl α des complexen Gebietes nur dann verschwinden kann, wenn die Zahl α selbst verschwindet, so ist es stets möglich, an Stelle der Haupteinheiten $e_1, \cdots, e_n$ gewisse lineare Combinationen $e_1', \cdots, e_n'$ derselben mit nicht verschwindender Determinante als neue Haupteinheiten einzuführen, für welche die einfachen Multiplikationsregeln

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} e_i'^2 &= e_i', \\ e_i' e_k' &= 0 \quad (i \neq k) \end{aligned}\right\} \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

gelten und durch welche offenbar wird, daß jede Rechnung in dem complexen Zahlengebiete A auf n parallel laufende Rechnungen im Gebiete der gewöhnlichen reellen oder imaginären Zahlen hinauskommt.

Die diesem Satze von R. Dedekind zu Grunde liegende rein algebraische Thatsache ist vor Kurzem von G. Frobenius in den Berliner Sitzungsberichten auf neue und einfachere Art bewiesen und verallgemeinert worden. Die nachfolgenden Zeilen sollen zeigen, wie der Dedekind'sche Satz ohne rechnerische Hilfsmittel aus einem allgemeinen Theoreme fließt, welches ich in meinen Untersuchungen über die Theorie der algebraischen Invarianten benutzt habe und welches, wie folgt lautet:

Es seien m ganze rationale homogene Functionen $f_1, \cdots, f_m$ der n Veränderlichen $x_1, \cdots, x_n$ vorgelegt und ferner sei F eine ganze rationale Function der nämlichen Veränderlichen $x_1, \cdots, x_n$ von der Beschaffenheit, daß sie für alle diejenigen Werthsysteme dieser Veränderlichen verschwindet, für welche die vorgelegten m Functionen $f_1, \cdots, f_m$ sämmtlich zugleich verschwinden: dann ist es stets möglich, eine ganze Zahl h zu bestimmen derart, daß die $h$te Potenz der Function F dargestellt werden kann in der Gestalt

$$F^h = A_1 f_1 + \cdots + A_m f_m,$$

wo $A_1, \cdots, A_m$ geeignet gewählte ganze rationale Functionen der Veränderlichen $x_1, \cdots, x_n$ sind.

Dieses Theorem habe ich für den Fall, daß es sich um homogene Functionen handelt, in den Mathematischen Annalen Bd. 42, S. 320—325 ausgesprochen und bewiesen [1]). Im vorliegenden all-

1) Vgl. auch meine Note „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten“ in diesen Nachrichten 1891.

gemeineren Falle inhomogener Functionen braucht man nur eine $n+1$te homogen machende Veränderliche einzufügen und zugleich noch die Function F mit dieser neuen Veränderlichen zu multipliciren; wendet man dann das von mir bewiesene Theorem für homogene Functionen an, so ergiebt sich unmittelbar auch die Gültigkeit desselben für den allgemeineren Fall.

Wir beweisen zunächst die Thatsache, daß die Gleichungen (1), wenn wir darin $e_1, \cdots, e_n$ als unbekannte Größen auffassen, außer dem Lösungssystem $e_1 = 0, \cdots, e_n = 0$ noch genau n weitere Lösungssysteme

$$e_1 = e_1^{(k)}, \cdots, e_n = e_n^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

besitzen und daß die n reihige Determinante E aus den letzteren n Lösungssystemen von 0 verschieden ist.

In der That: es kann die Anzahl solcher Lösungssysteme $e_1 = e_1^*, \cdots, e_n = e_n^*$ der Gleichungen (1) nicht größer als n sein. Denn verstehen wir unter $u_1, \cdots, u_n$ Unbestimmte und setzen

$$u = u_1 e_1^* + \cdots + u_n e_n^*,$$

so wird unter Anwendung der Gleichungen (1)

$$\begin{aligned} u e_1^* &= l_{11} e_1^* + \cdots + l_{1n} e_n^*, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u e_n^* &= l_{n1} e_1^* + \cdots + l_{nn} e_n^*, \end{aligned} \tag{4}$$

wo $l_{11}, \cdots, l_{nn}$ lineare Functionen von $u_1, \cdots, u_n$ sind, deren Coefficienten in leicht anzugebender Weise sich aus $\varepsilon_1^{(k)}, \cdots, \varepsilon_n^{(k)}$ zusammensetzen. Die Elimination von $e_1^*, \cdots, e_n^*$ aus (4) liefert

$$\begin{vmatrix} l_{11} - u, \cdots, l_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ l_{n1} \quad \cdots, l_{nn} - u \end{vmatrix} = 0$$

und da dies eine Gleichung $n$ten Grades in u darstellt, so gibt es höchstens n verschiedene Ausdrücke für u.

Andererseits besitzen die Gleichungen (1) keinenfalls insgesammt weniger als n Lösungsungssysteme und auch keinenfalls nur solche n Lösungssysteme, für welche die zugehörige n-reihige Determinante E verschwindet, wobei stets von dem Lösungssystem $e_1 = 0, \cdots, e_n = 0$ abgesehen wird. Denn wäre dies der Fall, so ließe sich offenbar eine lineare homogene Function von $e_1, \cdots, e_n$ von der Gestalt

$$\alpha = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

mit reellen oder imaginären, nicht sämmtlich verschwindenden Coefficienten $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ermitteln, welche für alle gemeinsamen Nullstellen der n^2 Functionen

$$E_{ik} = e_i e_k - \varepsilon_1^{(ik)} e_1 - \cdots - \varepsilon_n^{(ik)} e_n$$

selber verschwindet und es müßte daher nach dem eben ausgesprochenen Theorem einen Exponenten h geben derart, daß für die $h$te Potenz der linearen Function α identisch in $e_1, \cdots, e_n$ eine Gleichung von der Gestalt

$$\alpha^h = A_{11} E_{11} + A_{12} E_{12} + \cdots + A_{nn} E_{nn} \tag{5}$$

gilt, wo $A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{nn}$ geignete ganze rationale Functionen von $e_1, \cdots, e_n$ sind. Fassen wir nun α als Zahl des complexen Gebietes A auf, so wird infolge der Identität (5) nothwendig $\alpha^h = 0$ und wenn etwa 2^γ eine über h hinausliegende Potenz von 2 ist, so wird offenbar auch $\alpha^{2^\gamma} = 0$ sein. Der Umstand, daß im Zahlengebiet A jede Zahl verschwinden muß, deren Quadrat verschwindet, bedingt nun der Reihe nach die Gleichungen

$$\alpha^{2^{\gamma-1}} = 0, \quad \alpha^{2^{\gamma-2}} = 0, \cdots, \quad \alpha^2 = 0, \quad \alpha = 0$$

d. h. es müsste

$$\alpha_1 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$$

sein, was der Bestimmungsweise der Coefficienten $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ widerspricht. Damit ist der Nachweis dafür erbracht, daß die Gleichungen (1) außer dem Lösungssystem $e_1 = 0, \cdots, e_n = 0$ genau n Lösungssysteme (3) besitzen und daß die Determinante E dieser n Lösungssysteme von 0 verschieden ist.

Wir setzen nunmehr

$$e_k' = \frac{E_1^{(k)} e_1 + \cdots + E_n^{(k)} e_n}{E}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $E_1^{(k)}, \cdots, E_n^{(k)}$ die Unterdeterminanten von E bezüglich für die Elemente $e_1^{(k)}, \cdots, e_n^{(k)}$ bedeuten. Dann sind $e_1', \cdots, e_n'$ solche n lineare homogene Functionen von $e_1, \cdots, e_n$ mit der Determinante $\frac{1}{E}$, welche für die n Lösungssysteme (3) bezüglich die n Werthsysteme

$$\begin{aligned} &e_1' = 1, \quad e_2' = 0, \cdots, \quad e_n' = 0, \\ &e_1' = 0, \quad e_2' = 1, \cdots, \quad e_n' = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &e_1' = 0, \quad e_2' = 0, \cdots, \quad e_n' = 1 \end{aligned} \tag{6}$$

annehmen. Setzen wir daher die Multiplikationsregeln für die neuen Haupteinheiten $e_1', \cdots, e_n'$ in der Gestalt

$$e_i' e_k' = \varepsilon_1^{\prime(ik)} e_1' + \cdots + \varepsilon_n^{\prime(ik)} e_n' \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

an, so müssen dieselben, als Gleichungen aufgefaßt, die n Lösungssysteme (6) zulassen und hieraus ergiebt sich sofort ihre Uebereinstimmung mit (2). Damit ist der Beweis des Dedekind'schen Satzes erbracht.

Um die in der genannten Abhandlung von R. Dedekind aufgestellten Behauptungen in allen Theilen zu beweisen, ist die Betrachtung der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_{11}, \cdots, \Delta_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Delta_{n1}, \cdots, \Delta_{nn} \end{vmatrix}$$

nötig, worin

$$\Delta_{ik} = \sum_{(r,s)} \varepsilon_r^{(rs)} \varepsilon_s^{(ik)}$$

gesetzt ist. Mit Benutzung der neu eingeführten Haupteinheiten $e_1', \cdots, e_n'$ kann man leicht einsehen, daß die Determinante Δ von 0 verschieden ist. Läßt man jedoch für das Zahlensystem die oben gestellte Forderung fallen, wonach das Quadrat jeder von 0 verschiedenen complexen Zahl ebenfalls von 0 verschieden ist, und führt eine solche Zahl, deren Quadrat verschwindet, zugleich mit geeignet gewählten $n-1$ weiteren Zahlen als neue Haupteinheiten ein, so erkennt man sofort, daß die Determinante Δ verschwindet. Die Forderung, daß Δ von 0 verschieden bleibt, ist daher mit der in Rede stehenden Forderung für das System der complexen Zahlen gleichbedeutend.

Wenn eine ganze rationale Function F von $e_1, \cdots, e_n$ ohne constantes Glied, als complexe Zahl aufgefaßt, verschwinden soll, so ist dazu nothwendig und hinreichend, daß die Function numerisch verschwindet, wenn man in ihr jedes der n Lösungssysteme (3) für $e_1, \cdots, e_n$ einsetzt. In der That ist diese Bedingung offenbar nothwendig; sie ist aber auch zugleich hinreichend, da ja dann nach dem oben ausgesprochenen allgemeinen Theorem jedenfalls eine Potenz von F eine Combination der Ausdrücke E_{ik} sein muß und sich hieraus wiederum ergiebt, daß F selbst, als complexe Zahl betrachtet, verschwindet.

Göttingen, den 3. Juli 1896.

Fluorescenz und kinetische Theorie.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 18. Juli 1896.

Herr L. Sohncke hat unlängst[1]) eine große Beobachtungsreihe über die polarisirte Fluorescenz krystallinischer Körper veröffentlicht, die überaus wichtige und interessante Thatsachen enthält, und er bemüht sich, dieselben für die kinetische Theorie der festen Körper zu verwerthen. In diesen theoretischen Schlüssen scheint mir eine Lücke zu sein, und ich glaube dieselbe in der folgenden Notiz befriedigend ausfüllen zu können.

Herr Sohncke sagt im Eingang seiner Arbeit: „Wenn man nun irgend welche Theilchen eines Krystalles zum Fluoresciren bringt, d. h. wenn man sie veranlaßt, Schwingungen auszusenden, so ist dies nur dadurch möglich, daß die Theilchen zuvor selber in Schwingungen versetzt sind". Gleichviel, ob man diesen Satz so verstehen will, daß, (wie die Einleitung vermuthen läßt) auch im nicht bestrahlten Krystall dauernd Schwingungen der kleinsten Theile statthaben, oder so, daß die einfallende Welle erst diese Bewegungen erregt, — in jedem Falle scheint er mir nicht völlig befriedigend; wenigstens bietet die elektromagnetische Lichttheorie die Möglichkeit, durch eine einfallende Welle elektrische Eigenschwingungen der Moleküle bei vollkommener äußerer Ruhe der letzteren zu bewirken.

Trotzdem stehe ich auf Herrn Sohncke's Standpunkt, daß die Fluorescenz Schwingungen der kleinsten Theile auch im nicht bestrahlten Körper voraussetzt, und ich sehe geradezu in ihr den zwingendsten, ja vielleicht den einzigen directen Beweis für solche. Aber ich stütze diese Folgerung auf eine specielle Eigenschaft des Fluorescenzlichtes, die soviel ich sehe, nach ihrer Tragweite noch nicht gewürdigt ist.

Lassen wir eine ebene Welle normal auf einen ebenen undurchsichtigen Schirm fallen, der eine gegen die Wellenlänge große Oeffnung trägt, so werden Punkte hinter dem Schirm, die innerhalb des sogenannten geometrischen Schattens liegen, nicht merklich beleuchtet. Wir erklären dies seit Fresnel anschaulich durch die Interferenz der Wellen, die von den verschiedenen in

1) Wied. Ann. Bd. 58, S. 417. 1896.

cohärenten Schwingungen befindlichen Theilen der Oeffnung nach solchen Punkten gelangen.

Schließen wir nun die Oeffnung durch eine Platte aus einem fluorescirenden Körper, so werden jetzt auch die im geometrischen Schatten liegenden Stellen — nach Gesetzen, über die ich demnächst Mittheilungen zu machen hoffe, — beleuchtet und auch die vor dem Schirm liegenden Stellen empfangen Flourescenzlicht.

Die von verschiedenen Stellen der Oeffnung ausgehenden Wellen interferiren somit jetzt nicht mehr, d. h. sie sind incohärent, in ihrem Schwingungszustand von einander unabhängig geworden. Diese Wandelung kann nun offenbar durch ein, gleichviel wie construirtes, aber unveränderliches System materieller Theile niemals bewirkt werden, sondern nur durch ein System unabhängig von einander zeitlich veränderlicher Theile. Somit führt uns die Abweichung des Fluorescenzlichtes von der geradlinigen Fortpflanzung mit Nothwendigkeit zu der Vorstellung einer incohärenten Bewegung in den benachbarten Theilen des fluorescirenden Körpers, die nicht wohl erst durch die Welle erregt werden kann, sondern schon zuvor bestanden haben muß. Was diese Schwingungen schließlich ausführt, können wir freilich nur vermuthen; aber sonstige Umstände legen die Vorstellung, es handele sich um eine Bewegung der ponderabeln Theile selbst, außerordentlich nahe.

Wir müßten uns sonach also die Entstehung des Fluorescenzlichtes folgendermaßen vorstellen. Die ponderabeln Theile, die ihrerseits einen sehr komplicirten Bau besitzen werden, sind in irgend welcher incohärenten Bewegung. Fällt eine ebene Welle ein, so wird keineswegs in allen Theilen einer und derselben Wellenebene derselbe Schwingungszustand erregt, denn die Theilchen dort befinden sich gleichzeitig in ganz verschiedenen Lagen und Zuständen. Ebenso sind die in folgenden Zeitmomenten in demselben Theilchen erregten Schwingungen von den früheren ganz verschieden, da das Theilchen selbst in der Zwischenzeit Lage und Zustand gewechselt hat.

Immerhin gehen die Bewegungen der ponderabeln Theilchen so langsam vor sich, daß innerhalb einer großen Zahl von Lichtschwingungen erhebliche Veränderungen nicht eintreten. Man kann sich hiervon leicht überzeugen, indem man Fluorescenzlicht zur Interferenz bringt. Die bezüglichen Erscheinungen sind bei Grenzunterschieden von einigen hundert Wellenlängen noch vollkommen deutlich.

Göttingen, 7. Juli 1896.

Ueber die Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden oder absorbirenden Mittel.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 18. Juli 1896.

Daß in einem Medium, in dem die Fortpflanzung ebener Wellen der Gleichung

$$1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

folgt, — unter a eine Konstante verstanden — alle Schwingungen mit ungeänderter Form fortschreiten ist bekannt; nicht beachtet aber scheint bisher zu sein, daß für die Optik eigenthümliche Erscheinungen daraus folgen, daß die obige Gleichung die einzige ist, die jene Eigenschaft besitzt.

In der That gilt die Gleichung 1) nur für ein von Absorption und von Dispersion freies Medium, d. h. für den leeren Raum; für alle andern Medien gelten abweichende Formeln, die sonach im Allgemeinen auch auf während des Fortschreitens veränderliche Schwingungsformen führen. Eine Ausnahme bildet die Fortpflanzung rein periodischer Schwingungen und solche werden in der theoretischen Optik ausschließlich betrachtet.

Indessen ist zu betonen, daß solche rein periodische Schwingungen in der Wirklichkeit nicht existiren. Die Eigenschaften des sogenannten natürlichen Lichtes, wie es glühende Körper direct aussenden, und ebenso die gewöhnlichen Vorstellungen über die Art seiner Entstehung, führen dazu, anzunehmen, daß alles Licht, mit welchem wir operiren, nur je sehr kurze Zeiten hindurch rein periodische Schwingungen enthält und in jeder Secunde eine ungeheure Zahl — wahrscheinlich viele Millionen — von Malen den Schwingungszustand wechselt. Bei homogenem, oder

besser bei einfarbigem Licht kann diese Veränderung nur die Schwingungsform und Schwingungsphase betreffen, bei jeder Komponente nur Phase und Amplitude, während die Periode die gleiche bleibt. In jedem Falle ist die Bewegung keine rein periodische und sie muß sonach bei der Fortpflanzung in dispergirenden und absorbirenden Medien ihre Form ändern.

Wie dies geschieht, ist aus den bezüglichen Differentialgleichungen zu folgern. Von ihnen bieten aber die meisten der ganz allgemeinen Behandlung große Schwierigkeiten. Die einfachste in Betracht kommende Formel ist die, welche für dispersionslose absorbirende Medien durch die elektromagnetische Lichttheorie geliefert wird. Sie stimmt überein mit der „Telegraphengleichung", die neuerdings von den Herren Poincaré[1]) und Picard[2]) für den Fall der Fortpflanzung eines Anfangszustandes behandelt ist. Herr Picard macht darauf aufmerksam, daß sie sich unter den genannten Umständen am einfachsten mit Hülfe eines von Riemann[3]) angegebenen Verfahrens integriren läßt, und dies Verfahren ist auch in dem Falle der Fortpflanzung einer in einer Ebene andauernd erregten Schwingung brauchbar, wenn man dabei den kleinen Kunstgriff anwendet, den ich seinerzeit bei einem analogen, aber complicirteren Problem benutzt habe[4]).

Ich gebe im Folgenden die Lösung der genannten Aufgabe als ein durchgeführtes einfaches Beispiel für die in der Ueberschrift genannten allgemeinen Vorgänge.

Die oben erwähnte Gleichung für die Fortpflanzung ebener Wellen in einem absorbirenden, aber dispersionsfreien Medium lautet

$$2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2b \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Setzt man hierin nach Herrn Poincaré

$$2') \qquad u = Ue^{-bt},$$

so ergiebt sich für U die Formel

$$3) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2 U$$

oder

1) H. Poincaré, Compt. rend. 26. Dec. 1893.

2) Em. Picard, Compt. rend. 2. Jan. 1894, Bull. de la Soc. Math. Tome XXII, 1894.

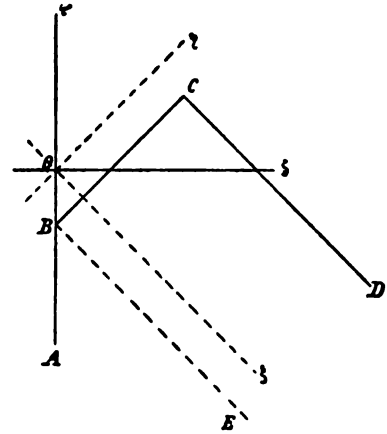
3) B. Riemann, Ges. Werke. II. Aufl. Leipzig 1892, p. 169.

4) W. Voigt, Crelle's Journ. Bd. 89, p. 288, 1880.

$$4) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2U,$$

wobei ist

$$4') \quad \frac{bt}{\sqrt{2}} = \tau, \quad \frac{bx}{a\sqrt{2}} = \xi.$$



Die Substitution

$$5) \quad \xi = \frac{\xi - \tau}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\xi + \tau}{\sqrt{2}}$$

deren geometrische Bedeutung durch die nebenstehende Figur erläutert wird, führt dann zu

$$6) \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \tau}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \tau}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und giebt der Gleichung 4) die Form

$$7) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \, \partial \eta} + U = 0.$$

Multiplicirt man diese Formel mit einer zunächst noch willkürlichen Function $\varphi(\xi, \eta)$ und mit $d\xi\, d\eta$, integrirt über das in der Figur durch die gebrochene Linie $ABCD$ begrenzte und längs ξ in's Unendliche reichende Gebiet und berücksichtigt, daß längs AB das Differential $d\xi$ mit $-d\tau/\sqrt{2}$, $d\eta$ mit $+d\tau/\sqrt{2}$ übereinstimmt und daß U für $\tau = -\infty$ verschwinden muß wie $C.e^{+b\tau}$, so erhält man

$$8) \quad (\varphi U)_c = (\varphi U)_a - \int_A^B \left(\varphi \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{2}} + \int_B^C U \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\, d\eta - \int_C^D U \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\, d\xi + \int \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \, \partial \eta} + \varphi\right) U \, d\xi \, d\eta.$$

Bestimmt man also φ so, daß überall auf dem Integrationsgebiet

$$9) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \, \partial \eta} + \varphi = 0, \\ \text{längs } BC \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \\ \text{längs } CD \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0, \\ \text{in } C \qquad \varphi = 1 \end{cases}$$

ist, — woraus auch für B der Werth $\varphi = 1$ sich ergiebt, — so erhält man

$$10) \qquad U_c = U_a - \int_A^a \left(\varphi \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{2}}.$$

Hierin beziehen sich die unter dem Integral stehenden Werthe U und $\partial U/\partial \eta$ auf $\zeta = 0$, d. h. auf $z = 0$; $\partial U/\partial \eta$ ist aber nicht direct vorgeschrieben und muß erst bestimmt werden.

Dazu rücken wir den Punkt C nach B und bezeichnen den dieser Lage entsprechenden Werth von φ mit φ_0; es gilt dann

$$0 = \int_A^a \left(\varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{2}},$$

also nach Differentiation in Bezug auf τ

$$\left(\varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_a = \left(U \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi}\right)_a,$$

wobei für B jeder Punkt der τ-Axe gewählt werden kann. Da für die Funktion φ_0 der Punkt B dieselbe Rolle spielt, wie für φ der Punkt C, so gilt in B auch $\varphi_0 = 1$, $\partial \varphi_0/\partial \xi = 0$, woraus folgt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_a = 0.$$

Somit reducirt sich 10) auf

$$11) \qquad U_c = U_a + \int_{-\infty}^{\tau_a} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} U_0 \frac{d\tau}{\sqrt{2}},$$

oder bei Berücksichtigung von 2′) und 4′) auch

$$12) \qquad u_c = u_a e^{-b(t_c - t_a)} + \tfrac{1}{2} b e^{-bt_c} \int_{-\infty}^{t_a} u_0 \frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial \xi} e^{+bt} dt.$$

Hierin bezeichnet U_0, resp. u_0, den für die Ebene $z = 0$ für U, resp. u, vorgeschriebenen Werth; $\overline{\partial \varphi}/\partial \xi$ ist für $z = 0$, aber für beliebiges t zu nehmen. Benutzt man noch die aus 4′) folgende Beziehung $t_c - t_a = z_c/a$ und führt weiterhin die auf den Punkt C bezüglichen Größen ohne Index, wählt dagegen zur Integrationsvariablen $t - t_a = -\vartheta$ statt t, so kann man auch schreiben

$$13) \qquad u = e^{-\frac{bz}{a}} \left(u_0 + \tfrac{1}{2} b \int_0^\infty u_0 \frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial \xi} e^{-b\vartheta} d\vartheta\right),$$

wobei das Argument t unter dem Integral in $\partial \varphi/\partial \xi$ und u_0 mit $t - \vartheta - z/a$, vor dem Integral in u_0 mit $t - z/a$ vertauscht zu denken ist.

Dieses Resultat läßt hervortreten, wie außer einer regelmäßig fortgepflanzten Verrückung, die durch das erste Glied gegeben ist, noch eine Nachwirkung aller vor der Zeit $t-\varepsilon/a$ in der Erregungsebene stattgefundenen Bewegungen sich an jedem Punkt des Mediums geltend macht. Zu ihrer Berechnung ist die vorherige Bestimmung der Function φ erforderlich; φ ist durch die Formeln 9) gegeben, welche mit denjenigen identisch sind, auf die Herr Picard sein Problem zurückgeführt hat, und es genügt daher in Betreff dieses Punktes auf seine oben citirte Arbeit zu verweisen.

Es ist bemerkenswerth, daß der Anfang einer Bewegung in der Ebene $\varepsilon = 0$ sich mit der Geschwindigkeit a fortpflanzt, welche von derjenigen abweicht, die man bei rein periodischen Bewegungen als Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet. In der That, setzt man

$$u_0 = A \sin \frac{2\pi t}{T},$$

so resultirt

$$u = A e^{-bt} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\varepsilon}{\omega}\right), \quad \text{wobei } \omega^2 = \frac{a^2}{1 + \frac{b^2 T^2}{2\pi^2}}.$$

Hat u_0 den Charakter eines der Schwingungsvectoren natürlichen Lichtes, d. h. verhält es sich je eine Zeitlang rein periodisch und wechselt dann plötzlich Amplitude und Phase, so stellt das Integral in Formel 13) keineswegs eine rein periodische Function dar. Es ist wahrscheinlich, daß Bewegungen von derartig complicirtem Charakter auf das Auge ebenso wirken, wie ein Gemisch von Schwingungen verschiedenster Perioden; man würde dann aus dem erhaltenen Resultat folgern müssen, daß beim Fortschreiten einfarbigen Lichtes, wie es unsere Lichtquellen liefern, in einem, wie angenommen, absorbirenden Medium alle andern Farben in sehr geringem Maaße neben der ursprünglichen auftreten. Aehnliches würde unzweifelhaft auch für Medien mit andersartiger Dispersion und Absorption stattfinden müssen.

Göttingen, im Juli 1896.

Lösung der Randwertaufgabe für eine ebene Randcurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen.

Von

Charles A. Noble.

Vorgelegt in der Sitzung vom 1. August 1896 von D. Hilbert.

Die folgenden Entwickelungen verdanken ihre Entstehung der Vorlesung über partielle Differentialgleichungen, welche Hilbert in Göttingen im Wintersemester 1895—96 gehalten hat.

Carl Neumann hat bekanntlich die Möglichkeit der Lösung der Randwertaufgabe sowohl in der Ebene wie im Raume gezeigt, falls man sich auf ein nirgends concaves Gebiet beschränkt. [Siehe die sächsischen Abhandlungen 1887—88].

Sei $f(s)$ eine stückweise stetige, aber sonst beliebige Function des Randes eines ebenen nirgends concaven Gebiets G. Ueber das Gebiet G setzen wir weiter voraus, die Randcurve sei stückweise stetig und habe in jedem Curvenstück eine stetige Tangente. Bilden wir das Integral, über die Berandung von G erstreckt:

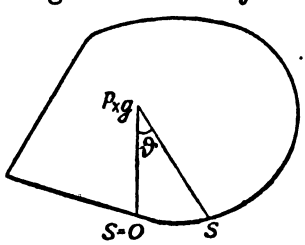


Fig. I.

$$u(p) = \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f(s)\,\frac{d\vartheta_p}{ds}\,ds.$$

Dieses ist das Potential, welches in der Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels eine Hauptrolle spielt. Hier bedeutet ϑ_p die scheinbare Größe des Randes von dem Punkte p aus gesehen und von

$s = 0$ an gerechnet. Ebenfalls wichtig ist die Function des Randes

$$f'(\mathfrak{S}) = \underset{\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}}{L} \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f(s)\frac{d\vartheta_{\mathfrak{S}'}}{ds}\,ds.$$

Diese Function, welche, falls $\mathfrak{S}$ keine Ecke ist, mit

$$u(\mathfrak{S}) = \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f(s)\frac{d\vartheta_{\mathfrak{S}}}{ds}\,ds$$

übereinstimmt, ist überall auf dem Rande stetig, während das Potential $u(\mathfrak{S})$ selber im Allgemeinen daselbst unstetig ist. Der Kernpunkt der Neumannschen Lösungsmethode ist nun Folgender: Wenn Δ' resp. Δ die größte Schwankung der Function $f'(s)$ resp. der gegebenen Randfunction $f(s)$ bedeutet, so ist

$$\Delta' \leqq c\Delta$$

wo $c < 1$ ist. c ist eine Constante, die lediglich von dem gegebenen Gebiet G abhängt, und heißt die Configurationsconstante von G.

Wenn wir hierauf successive die Functionen bilden:

$$f'(s) = \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f(s)\frac{d\vartheta_{\mathfrak{S}}}{ds}\,ds$$

$$f''(s) = \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f'(s)\frac{d\vartheta_{\mathfrak{S}}}{ds}\,ds$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(s) = \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f^{(n-1)}(s)\frac{d\vartheta_{\mathfrak{S}}}{ds}\,ds,$$

so wird es leicht mittelst obiger Vergleichung zu zeigen, daß $f^{(n)}(s)$ für unbegrenzt wachendes n sich einer Constante C nähert. Dieses bewirkt das Convergieren der Randwerte der Neumannschen Reihe

$$U = \frac{1}{\pi}\int_{(s)} [f(s)-f'(s)]\frac{d\vartheta_p}{ds}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{(s)} [f''(s)-f'''(s)]\frac{d\vartheta_p}{ds}\,ds + \cdots$$

und zwar gegen $f(s)-C$. Und nach dem Harnack'schen Satze convergiert diese Reihe ebenfalls im Inneren des Gebietes G und stellt ein Potential dar. Mit anderen Worten es löst diese Reihe die Randwertaufgabe für das nirgends concave Gebiet G.

Nun hat Hilbert vorgeschlagen, die Configurationsconstante präcise zu definiren, damit sie sich für jedes gegebene Gebiet genau berechnen und dann auch die Lösbarkeit der Randwertauf-

gabe für weitere Gebiete sich leichter nachweisen läßt. Hilbert definirt, wie folgt:

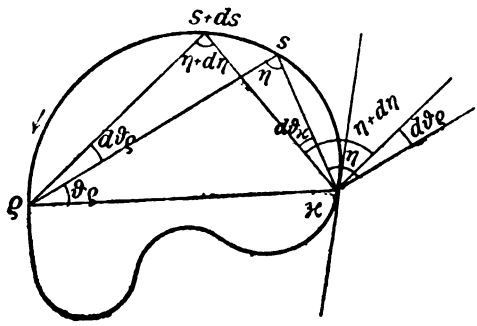


Fig. II.

Wählen wir (Fig. II) zwei beliebige Randpunkte x, ϱ, welche keine Ecken sind, und bilden die Differenz der für x, ϱ nach Neumann abgeleiteten Functionen $f'(x)$, $f'(\varrho)$. Es ist, wenn wir $\frac{d\vartheta}{ds}ds$ kurz mit $d\vartheta$ bezeichnen:

$$f'(x)-f'(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f(s)\,d\vartheta_x - \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f(s)\,d\vartheta_\varrho = \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f(s)\,[d\vartheta_x - d\vartheta_\varrho]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{(s)} f(s)\,d\eta.$$

Der bloße Anblick der Figur (Fig. II) zeigt die Richtigkeit der letzten Gleichung. Wir wollen $f(s)$ die vorläufige Beschränkung auferlegen, wie es bei Neumann ebenfalls geschieht,

$$0 \leqq f(s) \leqq 1.$$

Gesucht wird die überhaupt größte Differenz der obigen zwei Functionen. Nun ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{(s)} f(s)\,d\eta \leqq \frac{1}{\pi}\int_{(s)} d\eta = D_{x\varrho},$$

wobei der Integrationsweg des letzten Integrals dadurch gegeben ist, daß wir $f(s) = 1$ resp. $f(s) = 0$ gesetzt haben, da wo $d\eta > 0$ resp. $d\eta < 0$ ausfällt. Somit hängt $D_{x\varrho}$ von x, ϱ und von dem Gebiete G ab. Demnach sei die Configurationsconstante die kleinste obere Grenze der Differenz

$$\frac{1}{\pi}\int d\eta = D_{x\varrho},$$

wo x, ϱ keine Ecken sind, aber sonst beliebig variiren. Sie wird eine ganz bestimmte Zahl sein, welche dem vorliegenden Gebiete G zukommt.

Es ist nicht schwierig, die Configurationsconstante für eine einfach gestaltete Figur zu berechnen. Für den Kreis ist diese

Constante geradezu Null, was den Umstand erklärt, daß die Neumann'sche Reihe, welche die Randwertaufgabe für den Kreis löst, mit dem ersten Gliede abbricht. Für die Ellipse ist die Constante $c = \frac{4\arctan\frac{a}{b}}{\pi} - 1$, wo a, b die Hauptaxen sind. Für den Halbkreis ist $c = \frac{1}{2}$. Der Kreisabschnitt mit Centriwinkel φ ergiebt $c = 1 - \frac{\varphi}{2\pi}$, was auch für den Kreisausschnitt gilt, solange $\varphi \leqq \pi$ ist. Falls $\varphi > \pi$ ist, erweist sich $c = \frac{\varphi}{2\pi}$.

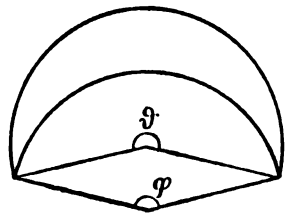


Fig. III.

Wenn wir ein sichelförmiges, aus Kreisbögen mit Centriwinkeln ϑ und φ bestehendes Gebiet (Fig. III) untersuchen, so finden wir

$$c = 1 - \frac{\vartheta - \varphi}{2\pi}.$$

In all' diesen Fällen fällt die Configurationsconstante < 1 aus. Dagegen erweist sie sich für das Dreieck gerade gleich 1, für eine Spitze $\leqq 1$, und für den Kreisring gleich 2.

Kehren wir nun zu unserem eigentlichen Problem zurück, nämlich, zu zeigen, wie die neue Definition ein weiteres Feld öffnet. Es liege ein beliebig berandetes Gebiet G vor. Nur schlie-

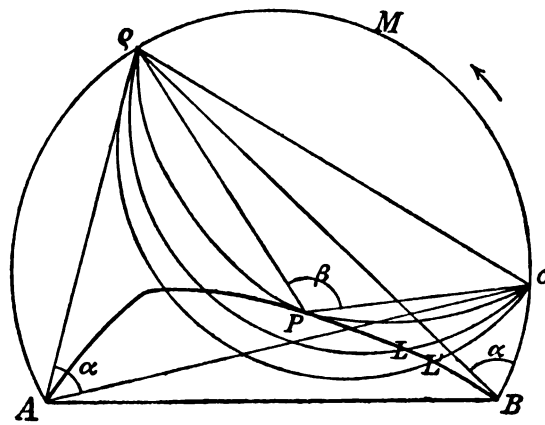


Fig. IV.

ßen wir Spitzen von dem Rande aus und machen über ihn ferner die weitere Voraussetzung, er sei stückweise stetig und jedes Stück habe eine stetige Tangente. Indem ich das von Schwarz und Neumann ersonnene alternirende Verfahren der Verschmelzung als bekannt voraussetze, behaupte ich Folgendes:

Es genügt, um die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für das obige Gebiet vollständig nachzuweisen, zu zeigen, daß die Configurationsconstante für ein gewisses sichelförmiges Gebiet < 1 ist.

Zunächst zeige ich, daß diese Constante thatsächlich < 1 ausfällt. Nehmen wir Bezug auf die Figuren (Fig. IV und V), wo die obere Randcurve, AMB, ein Kreisbogen, dagegen die untere flache Curve APB ein überall nach oben gekrümmtes stetiges Stück unseres gegebenen Randes ist. Als Grundpunkte für

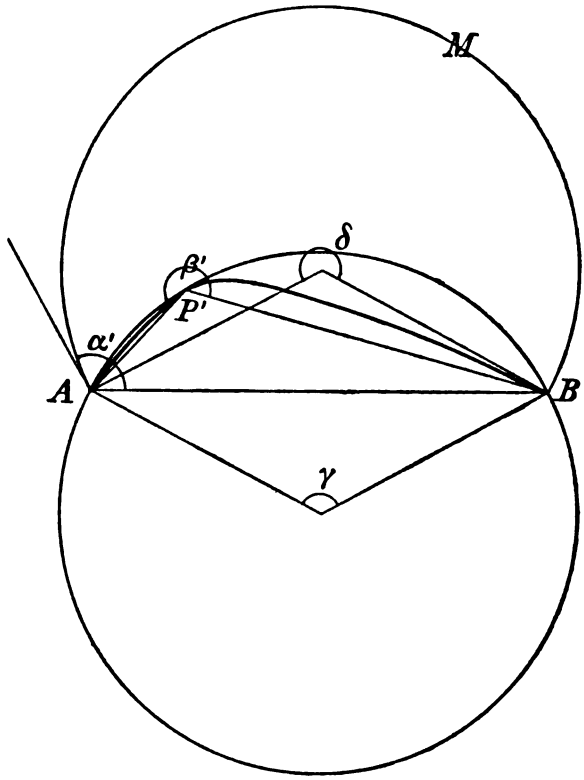


Fig. V.

die scheinbare Größe wählen wir σ, ϱ auf dem Kreisbogen, was den ungünstigsten Fall ausmacht. Wenn nun der Punkt s, der Scheitel des scheinbaren Winkels η, von B über M nach A sich bewegt, so bleibt η constant. Zwar springt η beim Durchgang durch σ um $-\pi$ und wieder beim Durchgang durch ϱ um $+\pi$, aber die Integrationsstrecke ist in beiden Fällen Null, so daß diese Aenderungen von η nicht in Betracht kommen. Von A ab wächst η von dem Werte α bis zu einem gewissen Wert β, dem größten Winkel, welcher von irgend einem Punkte der Curve APB

mit der Strecke $\varrho\sigma$ gebildet werden kann. Diese Maximalstelle wird durch den Berührungspunkt P eines Kreises angegeben, der durch die Grundpunkte σ, ϱ hindurchgeht und die Curve APB tangiert. In der That, wenn wir durch σ, ϱ zwei beliebige benachbarte Kreise ziehen, welche die Curve APB in L und L' schneiden, so wird der Winkel $\varrho L\sigma$ größer als der Winkel $\varrho L'\sigma$; und $\sphericalangle \varrho L\sigma < \sphericalangle \beta$. Dies zeigt daß η von A bis P in Zunehmen, dagegen von P bis B in Abnehmen, begriffen ist. Nun lassen wir σ, ϱ variiren, und zwar resp. nach den Ecken B, A zu. Sowohl α wie β nimmt hierdurch zu, aber β wächst schneller. Mit anderen Worten, die kleinste obere Grenze wird geliefert, wenn sich σ, ϱ den Punkten B, A als Grenzlagen nähern. Bis dahin sei α in α', β in β', und P in P' übergegangen. Dann ist P' der Berührungspunkt eines Kreises durch die Eckpunkte A, B, welcher $AP'PB$ außerhalb tangiert. Nach unserer Verabredung setzen wir $f(s) = 1$ für die Strecke AP', dagegen $f(s) = 0$ für den ganzen übrigen Teil der Berandung. Wir integrieren also $\frac{1}{\pi}\int d\eta$ von α' bis β' und erhalten $\frac{\beta'-\alpha'}{\pi}$.

Dieses ist wirklich < 1, denn aus der Figur sehen wir, da $2\pi - \beta' + \frac{\gamma}{2} = \pi$ ist,

$$\beta'-\alpha' = \left(\pi + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\delta}{2} = \pi - \frac{\delta-\gamma}{2}.$$

Aber δ ist notwendigerweise $> \gamma$, wobei δ, γ die Centriwinkel der durch A, B gehenden Kreisbögen AMB, $AP'B$ sind. Folglich ist

$$\frac{\beta'-\alpha'}{\pi} < 1.$$

Dieser Wert ist die Configurationsconstante für das betrachtete sichelförmige Gebiet. Da er < 1 ist, wissen wir, daß die Randwertaufgabe für dieses Gebiet lösbar ist.

Nun bandelt es sich darum zu zeigen, wie wir hierdurch die Lösbarkeit der Randwertaufgaben für ein beliebig gestaltetes Gebiet G erzielen können. Ich markire zunächst alle Wendepunkte der Randcurve jenes Gebiets. Dadurch werden die Einbuchtungen von den Ausbuchtungen getrennt. Nun brauchen wir uns mit den Ausbuchtungen nicht aufzuhalten, denn wie auch convexe, d. h. nach dem Inneren von G zugewendete, ganz in das Innere von G fallende Kreisbögen auf dieselben aufgesetzt werden mögen, erhalten wir allemal nirgends concave Gebiete. Betrachten wir die

Einbuchtungen. Wenn wir Kreisbögen auf diese aufsetzen, erhalten wir im Allgemeinen solche sichelförmige Gebiete die wir eben discuttirt haben. Es kann aber eintreten wie in Fig. VI zu sehen ist, daß das Randstück zwischen zwei successiven Wendepunkten W_1, W_2 zu sehr gekrümmt ist, bezw. daß gegenüberliegende Ränder l', l sich zu nahe kommen, um dieses Verfahren vollziehen zu können. In einem solchen Falle müssen wir eine kleine Aenderung eintreten lassen, indem wir mehrere Kreisbögen auf eine einzige Einbuchtung aufsetzen. Statt W_1 und W_2, nehmen wir, nämlich, W_1 und einen solchen zwischen W_1 und W_2 liegenden Randpunkt X, daß wir einen Kreis K' durch W_1, X legen können, der das Randcurvenstück $W_1 X$ berührt ohne den gegenüberliegenden Rand l' zu erreichen. Dies ist sicher stets möglich, da das Stück $W_1 X W_2$ einförmig gekrümmt ist, und da l und l' in endliche Entfernung von einander liegen. Alsdann ist es aber auch möglich einen zweiten Kreis K durch W_1, X zu legen, der mit dem Randcurvenstück W_1, X das gewünschte sichelförmige Gebiet bildet und den Rand l nicht überschreitet.

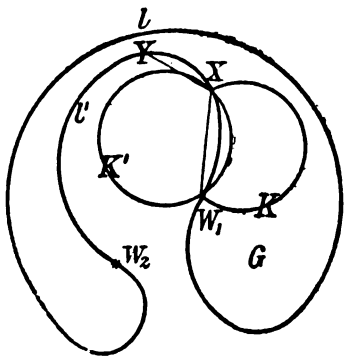


Fig. VI.

Nun aber müssen wir noch etwas berücksichtigen. Wir wollen den ganzen inneren Rand unseres vorgegebenen Gebietes G mit Kreisbögen belegen, aber immer mit der Absicht uns des alternirenden Verfahrens der Verschmelzung zu bedienen. Dies zu ermöglichen müssen die successiven aufgesetzten Kreisbögen in einander greifen, damit wir jedesmal ein gemeinsames Verschmelzungsgebiet erhalten. Also, wenn wir uns auf Fig. VI beziehen, sehen wir Folgendes. Der Kreisbogen K auf W_1, X und der analoge Kreisbogen auf dem folgenden Randcurvenstück X, Y müssen so aufgesetzt werden, d. h. die Punkte W_1, X bez. X, Y müssen genügend nahe an einander gewählt werden, daß der Winkel α' (siehe Fig. V) für den einen Kreis plus dem analogen Winkel α' für den anderen Kreis plus dem spitzen Winkel WXY größer als 2π wird. Dieses wird ersichtlich immer möglich und im Allgemeinen leicht anzutreffen. Dann greifen aber sicherlich die zwei sichelförmigen Gebiete in einander, was die Verschmelzung bewerkstelligt.

Bislang haben wir nichts über Ecken gesagt. Sowohl einwie ausbiegende Ecken können Randteile liefern, die nicht nirgends

concav sind. In allen Fällen ist es aber möglich in einandergreifende Kreisbögen so aufzusetzen, daß wir solche Gebietseinteilungen bekommen, welche sich unter schon discuttirte einordnen.

Nachdem der ganze innere Rand des vorgegebenen Gebietes mit Kreisbögen belegt ist und die so entstehenden, in einandergreifenden, sichelförmigen Gebiete sämmtlich zusammen verschmolzen sind, können wir das ganze Gebiet, nach dem Verfahren von Schwarz und Neumann, ringförmig verschmelzen. Somit ist die Randwertaufgabe für ein beliebiges ebenes Gebiet gelöst, dessen Rand aus einer endlichen Anzahl von stetigen Curvenstücken mit stetig sich ändernden Tangenten besteht und keine Spitzen aufweist.

Charles A. Noble.

San Francisco,
den 15. Juni 1896.

Ueber eine einfache Gruppe von 360 Operationen.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Vorgelegt von F. Klein.

In dem neusten Hefte der mathematischen Annalen[1]) hat Herr A. Wiman in Lund eine sehr interessante algebraische Theorie einer gewissen einfachen Gruppe von 360 ebenen Collineationen geliefert. Diese Entwicklungen stehen in engster Beziehung in gewissen arithmetisch-functionentheoretischen Untersuchungen, über welche ich eine erste Abhandlung vor einigen Jahren in den Acta mathematica[2]) habe erscheinen lassen. Die folgenden Zeilen mögen in dieser Hinsicht einige Ausführungen geben.

Die algebraische Theorie der Collineationsgruppe G_{360} zeigt in den Entwicklungen von Wiman volle Analogie zur bekannten von Klein[3]) herrührenden algebraischen Theorie der Gruppe G_{168} von 168 ebenen Collineationen. Dabei erscheint als Analogon der gegenüber der G_{168} invarianten Curve C_4:

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0 \tag{1}$$

bei der G_{360} die durch:

$$10x^3y^3 + 9z(x^5 + y^5) - 45x^2y^2z^3 - 135xyz^4 + 27z^6 = 0 \tag{2}$$

gegebene C_6 als Curve niederster Ordnung, die durch alle 360 Collineationen in sich transformiert wird.

Die G_{168} hat nun eine ausgedehnte transcendente Theorie und eben von dieser Seite aus wurde Klein zu der G_{168} und der zugehörigen C_4 geführt. Um den transcendenten Ansatz bei der G_{168} bez. der C_4 in der „functionentheoretisch einfachsten“ Weise zu wählen, hat man an die etwa durch $\zeta(2, 3, 7; J)$ zu definierende

1) Bd. 47 pg. 531 ff.

2) Bd. 17 pg. 345 ff. (1893).

3) Mathematische Annalen Bd. 14 (1878).

Dreiecksfunctionen anzuknüpfen. Auf compliciertere Art (in functionentheoretischer Hinsicht) würde man dem gleichen Zwecke durch jede Dreiecksfunction $\zeta(2\lambda, 3\mu, 7\nu; J)$ mit ganzen positiven Zahlen λ, μ, ν (∞ eingeschlossen) dienen können. Daß beim geschichtlichen Hergang die Function $\zeta(2, 3, \infty; J)$ voranstand, hat seinen Grund in dem elementaren „arithmetischen" Charakter der zugehörigen Gruppe [1]). Innerhalb der zu $\zeta(2, 3, 7; J)$ gehörenden Gruppe bilden nun alle mit 1 mod. 7 congruenten Substitutionen eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 168, und das zu dieser Untergruppe in bekanntem Sinne gehörende algebraische Gebilde ist eben das durch die C_4 gegebene.

Es entspringt nun die Frage, ob die G_{360} eine entsprechende transcendente Theorie besitzt. Es ist die Absicht der vorliegenden Notiz, hierauf folgende Antwort zu geben: Den einfachsten Ansatz zur transcendenten Theorie der G_{360} gewinnen wir von der Dreiecksfunction $\zeta(2, 4, 5; J)$ aus; die Untergruppe aller mod. 3 mit 1 congruenten Substitutionen innerhalb der zugehörigen Gruppe liefert direct das durch die C_6 dargestellte algebraische Gebilde. Dieser Ansatz ist dann zugleich auch arithmetisch der einfachste. Bei den sonstigen hier in Betracht kommenden Dreiecksfunctionen sind die arithmetischen Bildungsgesetze der Substitutionen teilweise unübersichtlicher. Wo diese Gesetze aber einfach sind, reicht man zur Definition der G_{360} nicht mit Congruenzen bezüglich fester Moduln aus.

Zum Beweise des oben ausgesprochenen Satzes ist zunächst der arithmetische Charakter der zur Function $\zeta(2, 4, 5; J)$ gehörenden Substitutionsgruppe anzugeben. Wir verstehen zu diesem Ende unter A, B, C, D ganze Zahlen des quadratischen Körpers der Basis $\left[1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$, und es sei speciell $P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Die fragliche Gruppe besteht dann aus allen Substitutionen:

$$\zeta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\zeta + (C + D\sqrt{P})}{(-C + D\sqrt{P})\zeta + (A - B\sqrt{P})} \tag{3}$$

der Determinanten 2 und 4. Man vergl. wegen des näheren Nachweises meine oben genannte Arbeit. Die Gruppe aller Substitutionen (3) heisse Γ.

Man reduciere nun Γ nach dem Modul 3, der im fraglichen

1) Uebrigens wäre, falls man die C_4 durch die zur G_{168} gehörende invariante C_6 ersetzt, nächst $\zeta(2, 3, 7; J)$ die Function $\zeta(2, 4, 7; J)$ die einfachste.

quadratischen Körper eine Primzahl darstellt. Definieren wir die Galois'sche Imaginäre j als eine Wurzel der irreducibeln Congruenz $j^2+j+2 \equiv 0 \pmod 3$, so können wir setzen:

$$P \equiv j, \quad A \equiv a_1+a_2 j, \quad \ldots, \quad D \equiv d_1+d_2 j, \pmod 3.$$

Die Determinanten der Substitutionen (3) werden $\equiv \pm 1$ nach dem Modul 3. Doch wollen wir bei der Gültigkeit des unteren Zeichens die Substitutionscoefficienten mit dem gemeinsamen Factor $j-1 \equiv \sqrt{-1}$ behaften, worauf nunmehr alle Substitutionen unimodular sind. Die Gruppe der nicht-homogenen Substitutionen (3) reduciert sich nach dem Modul 3 auf die Grupe G aller Substitutionen:

$$(4) \quad \zeta' = \frac{[(a_1+a_2 j)+(b_1+b_2 j)\sqrt{j}\,]\zeta+[(c_1+c_2 j)+(d_1+d_2 j)\sqrt{j}\,]}{[-(c_1+c_2 j)+(d_1+d_2 j)\sqrt{j}\,]\zeta+[(a_1+a_2 j)-(b_1+b_2 j)\sqrt{j}\,]}$$

der Determinante 1, wobei j die erwähnte Imaginäre ist und $a_1, a_2, \ldots, d_2$ gewöhnliche ganze Zahlen sind. Uebrigens sei es gestattet, die Zahlen $a_1+a_2 j$ zur Abkürzung durch (a_1, a_2) zu bezeichnen.

Sei nun $V \equiv \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ irgend eine Substitution von G, so wird $\alpha+\delta \equiv -A$ sein. Da ein gleichzeitiger Zeichenwechsel der Coefficienten V nicht ändert, so können wir A auf die fünf Zahlen:

$$(5) \quad A \equiv (0,0), \equiv (1,0), \equiv (1,2), \equiv (0,1), \equiv (1,1)$$

beschränken. Nun ist:

$$V^3 \equiv \begin{pmatrix} \alpha A+1, & \beta A \\ \gamma A, & \delta A+1 \end{pmatrix},$$

$$V^4 \equiv \begin{pmatrix} \alpha(A^3+A)+A^2-1, & \beta(A^3+A) \\ \gamma(A^3+A), & \delta(A^3+A)+A^2-1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergiebt sich fast unmittelbar: Für $A \equiv (0,0)$ hat V die Periode zwei, für $(1,0)$ die Periode drei (abgesehen von der sich hier einordnenden identischen Substitution), für $A \equiv (1,2)$ liegt die Periode vier vor und endlich in den beiden letzten Fällen $(0,1)$ und $(1,1)$ die Periode fünf.

Unter den neun modulo 3 incongruenten Zahlen sind fünf quadratische Reste, nämlich:

$$(0,0), (1,0) (1,2), (2,1), (2,0).$$

Man stellt daraufhin ohne Mühe fest, daß die 81 incongruenten Summen (B^2+D^2) die Zahl $(0,0)$ im ganzen 17 Male, jede der

übrigen acht Zahlen aber 8 Male darstellen. Nun genügen die Coefficienten der einzelnen Substitution V der Bedingung:

$$A^2 + C^2 - j(B^2 + D^2) \equiv 1, \pmod 3. \tag{6}$$

Nehmen wir somit $A \equiv (0,0)$, so ergeben sich zufolge des eben Gesagten für $C \equiv \pm(1,0)$ je 17 Paare B, D, für die übrigen 7 Werte C je 8. Die entspringenden $2.17 + 7.8 = 90$ Substitutionen V sind paarweise identisch, indem sie durch simultanen Zeichenwechsel der Coefficienten in einander übergehen; zu $A \equiv (0,0)$ gehören demnach 45 V. Für $A \equiv (1,0)$ liegt bei $C \equiv (0,0)$ der Ausnahmefall von 17 Lösungen B, D vor; hier haben wir somit $17 + 8.8 = 81$ Operationen, von denen eine die Identität ist. Für $A \equiv (1,2)$ stellt sich bei $C \equiv \pm(1,2)$ der Ausnahmefall ein, so daß wir hier $2.17 + 7.8 = 90$ Substitutionen gewinnen. Endlich gestattet in den beiden letzten Fällen $A \equiv (0,1)$ und $\equiv (1,1)$ die Congruenz $A^2 + C^2 \equiv 1$ keine Lösung; beide Male haben wir also $9.8 = 72$ Operationen. Wir haben somit folgendes Resultat: Die Gruppe Γ der Dreiecksfunction $\zeta(2,4,5;J)$ reduciert sich modulo 3 auf eine endliche G_{360}, welche neben der Identität 45 Substitutionen von der Periode 2, 80 Substitutionen von der Periode 3, 90 von der Periode 4 und 144 von der Periode 5 enthält. Die G_{360} wird demnach folgende cyclische Untergruppen enthalten: 40 cyclische G_3, 45 cyclische G_4 und in ihnen 45 cyclische G_2, endlich 36 cyclische G_5.

Umgekehrt ergiebt sich nun unmittelbar: Alle Substitutionen von Γ, welche der Congruenz:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1, \pmod 3$$

genügen, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe Γ_{360} des Index 360. Der Discontinuitätsbereich dieser Gruppe liefert eine geschlossene Fläche des Geschlechtes $p = 10$, welche eine regulär-symmetrische Einteilung in 2.360 Dreiecke trägt. Dabei treten drei Classen von Eckpunkten auf, die wir generell als Punkte p_2, p_4, p_5 benennen. Die Dreiecke des Netzes lagern sich zu je 4 um die 180 Punkte p_2, zu je 8 um die 90 Punkte p_4 und zu je 10 um die 72 Punkte p_5.

Ueber die Structur der G_{360} lassen sich leicht noch folgende weitere Angaben machen. Die Congruenz $\varepsilon^5 \equiv 1 \pmod 3$ hat die Wurzel:

$$\varepsilon \equiv -j - (1-j)\sqrt{j}, \pmod 3,$$

und es ist:

$$\varepsilon^4 \equiv -j + (1-j)\sqrt{j}, \pmod 3.$$

Dieserhalb ist in G_{360} die Substitution $\begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon^4 \end{pmatrix}$ der Periode 5 enthalten. Man stellt durch leichte Rechnung fest, daß diese Substitution nur durch ihre eigenen Potenzen in sich transformiert wird. Es folgt: Alle 72 Substitutionen der Periode 5 mit dem gleichen A sind gleichberechtigt. Es sind also auch die 36 cyclischen G_5 gleichberechtigt, und die einzelne hat 2 Fixpunkte p_5. Ebenso leicht ergiebt sich, daß die 45 G_4 gleichberechtigt sind, und daß die einzelne 2 Fixpunkte p_4 hat. Weiter sind auch die 45 G_2 damit als gleichberechtigt erkannt; denn sie sind in den G_4 enthalten. Die einzelne G_2 hat also 2 Fixpunkte p_4 und 4 Fixpunkte p_2.

Weiter merken wir einige Folgerungen betreffs der durch Spiegelungen erweiterten $\overline{G}_{720}$ an. Die Spiegelungen innerhalb der $\overline{G}_{720}$ sind durch $B = 0$ charakterisiert; man zählt ohne Mühe 36 Spiegelungen ab. Die Symmetrielinien der geschlossenen Fläche zerfallen in zwei Classen. Die Linien der einen Classe setzen sich nur aus Dreiecksseiten $\overline{p_2 p_4}$ zusammen; die Linien der anderen Classe bestehen aus Seiten $\overline{p_2 p_5}$ und $\overline{p_4 p_5}$. Unter Gebrauch der Erzeugenden der Gruppe Γ (cf. l. c. pg. 348) stellt man fest: eine Symmetrielinie der ersten Classe besteht aus 10 Seiten, eine solche der zweiten aus 20. Umgekehrt folgt: Zur einzelnen der 36 Spiegelungen gehört stets eine Symmetrielinie der ersten und eine der zweiten Classe. Man kann auch sagen: Die geschlossene Fläche läßt sich in 36 Weisen auf eine algebraische Curve mit zwei reellen Zügen abbilden.

Auch über die nicht-cyclischen Untergruppen ergeben sich zahlreiche Folgerungen ohne weitgehende Rechnung. Die einzelne G_2 als eine unter 45 gleichberechtigten Gruppen ist ausgezeichnet in einer G_8 vom Diedertypus enthalten. Letztere enthält 2 Vierergruppen G_4, und wir finden somit $45.2:3 = 30$ Vierergruppen. Die einzelne G_4 ist aber jedenfalls immer in drei solchen G_8 ausgezeichnet, durch deren Combination eine Oktaedergruppe entspringt. Die einzelne Vierergruppe als ausgezeichnet in einer G_{24} ist eine von $360:24 = 15$ gleichberechtigten. Wir finden zwei Systeme von je 15 gleichberechtigten Vierergruppen und damit auch zwei Systeme von 15 gleichberechtigten Oktaedergruppen innerhalb der G_{360}.

Am interessantesten sind die in der G_{360} enthaltenen Ikosaedergruppen. Brauchen wir die Zahl ε in der obigen Bedeutung:

$$\varepsilon \equiv -j-(1-j)\sqrt{j} \pmod 3,$$

so gelten die Congruenzen:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon, 0 \\ 0, \varepsilon^4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -j-(1-j)\sqrt{j}, 0 \\ 0, -j+(1-j)\sqrt{j} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}} \\ \pm\frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}, -\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\sqrt{j}, \pm j\sqrt{j} \\ \pm j\sqrt{j}, \sqrt{j} \end{pmatrix}.$$

Links stehen sowohl für das obere, wie untere Zeichen zwei Substitutionen, welche eine Ikosaedergruppe erzeugen[1]). Die beiden so entspringenden G_{60} sind überdies nicht mit einander identisch. Es folgt, daß die einzelne cyclische G_5 in zwei Gruppen G_{60} enthalten ist. Die einzelne G_{60} ist innerhalb der G_{360} eine von höchstens $360:60 = 6$ gleichberechtigten Untergruppen. Sie ist aber auch mindestens mit 6 Gruppen gleichberechtigt; denn die G_{60} enthält 6 Gruppen G_5 und wir haben innerhalb G_{360} 36 gleichberechtigte G_5. Es ergiebt sich: Die G_{360} enthält zwei Systeme von je sechs gleichberechtigten Ikosaedergruppen G_{60}. Beide Systeme werden innerhalb $\bar{G}_{720}$ gleichberechtigt.

Die zuletzt genannten G_{60} liefern die umfassendsten Gruppen innerhalb Γ, welche durch Congruenzen modulo 3 definierbar sind; es handelt sich um zwei Systeme zu je sechs gleichberechtigten Untergruppen Γ_6 des Index 6, welche innerhalb $\bar{\Gamma}$ insgesamt gleichberechtigt werden. Nun kann man durch Aneinanderreihen von 6 Doppeldreiecken der ζ-Halbebene nur auf drei Weisen brauchbare Polygone P_6 bilden. Zwei von diesen Polygonen sind einander symmetrisch und also einzeln genommen unsymmetrisch; das dritte ist sich selbst symmetrisch und gehört übrigens zu einer modulo 5 definierbaren Congruenzgruppe.

Die zum Modul 3 gehörenden Untergruppen Γ_6 (wie übrigens auch die Congruenzgruppe des Moduls 5) gehören zum Geschlechte $p = 0$. Seien $\tau(\zeta)$ zugehörige automorphe Functionen, welche auf den Polygonen P_6 der beiden Γ_6 einwertig sind. Bei zweckmäßiger Auswahl dieser Functionen τ werden dieselben, als Functionen $\tau[\zeta(2, 4, 5; J)]$ von J betrachtet, die

1) Man vergl. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, pg. 41.

Lösungen folgender Gleichungen sechsten Grades darstellen:

$$(7)\quad J : J-1 : 1 = (\tau-5)^4\left(\tau-\frac{5(11\pm 3i\sqrt{15})}{2}\right)^3$$
$$: (\tau^2-(40\pm 6i\sqrt{15})\tau+5^4)\left(\tau^2-\frac{35\pm 9i\sqrt{15}}{2}\tau-\frac{55\pm 15i\sqrt{15}}{2}\right)^2.$$
$$: \mp 2^6.3^4.5^2 i\sqrt{15}\,\tau.$$

Nun stellt man aus den Anzahlen cyclischer Untergruppen der G_{360} leicht fest, daß die G_{360} eine einfache Gruppe ist. Es ergiebt sich, daß die Monodromiegruppe der einzelnen Gleichung (7) geradezu unsere G_{360} ist. Nehmen wir die sechs Wurzeln der einen Gleichung (7) $\tau_\infty, \tau_0, \tau_1, \ldots \tau_4$, so erfahren dieselben, wie man vermöge des Polygons P_0 feststellt, gegenüber den Erzeugenden der Gruppe Γ folgende beide Permutationen:

$$(8)\quad \begin{cases} \tau'_\infty = \tau_\infty,\ \tau'_0 = \tau_1,\ \tau'_1 = \tau_2,\ \tau'_2 = \tau_3,\ \tau'_3 = \tau_4,\ \tau'_4 = \tau_0, \\ \tau'_\infty = \tau_0,\ \tau'_0 = \tau_\infty,\ \tau'_1 = \tau_3,\ \tau'_2 = \tau_2,\ \tau'_3 = \tau_1,\ \tau'_4 = \tau_4. \end{cases}$$

In der That entspringt aus diesen beiden Permutationen die Gruppe aller geraden Permutationen der sechs Wurzeln τ. Wir haben also das Ergebnis, daß unsere G_{360} mit der Gruppe aller geraden Vertauschungen von sechs Dingen isomorph ist.

Alle vorstehend entwickelten Eigenschaften unserer G_{360} sind nun auch an der Collineationsgruppe G_{360} in den Wiman'schen Entwicklungen hervorgetreten. Es liegt demnach die Vermutung nahe, daß das durch die Γ_{360} definierte algebraische Gebilde dasselbe sein möchte, wie das durch die in (2) gegebene C_6 des Geschlechtes $p = 10$ dargestellte Gebilde. Daß dies in der That der Fall ist, können wir unter Benutzung der Entwicklungen in § 6 der Wiman'schen Abhandlung folgendermaaßen zeigen.

Aus diesen Entwicklungen ergiebt sich die Existenz eine etwa gleich durch J zu bezeichnenden 360-wertigen Function auf der C_6, welche gegenüber der G_{360} invariant ist. Die C_6 läßt sich daraufhin auf eine 360-blättrige Riemann'sche Fläche über der J-Ebene beziehen, welche nur an drei Stellen, etwa bei $J = 0, 1, \infty$, verzweigt ist. Auch die Blätteranzahl der einzelnen Verzweigungspunkte ergiebt sich aus den Wiman'schen Entwicklungen sogleich. Die reellen Axen der einzelnen Blätter setzen lauter Symmetrielinien der Fläche zusammen.

Nun existirt auf der Riemann'schen Fläche eine Function η, welche die Fläche überall conform auf die η-Ebene abbildet

und bei Durchlaufung von Periodenwegen oder auch bei Ausführung von Transformationen der Fläche in sich reelle lineare Substitutionen erfährt. Das einzelne Halbblatt der Fläche wird, als durch Symmetrielinien begrenzt, auf ein Kreisbogenpolygon abgebildet, und zwar auf ein Kreisbogendreieck der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$, wie aus der Verzweigung der 360-blättrigen Riemann'schen Fläche hervorgeht. Hiermit ist der Anschluß an unsere obige Function ζ gewommen, und wir setzen demnach ζ an Stelle von η.

Nun liefert die Riemann'sche Fläche in der ζ-Ebene das Polygon einer ausgezeichneten Untergruppe Γ'_{360} des Index 360. Diese Γ'_{360} muß aber direct mit der Γ_{360} identisch sein. Es sind nämlich beide Gruppen die gemeinsamen Bestandteile von je 2 Systeme zu sechs Gruppen Γ_6; es giebt aber, wie wir oben fanden, nur ein solches Systemenpaar von Gruppen Γ_6.

Hiermit ist die obige Behauptung über den transcendenten Charakter der Collineationsgruppe G_{360} in der That bewiesen.

Braunschweig, den 5. September 1896.

Versuch zur Bestimmung des wahren specifischen electrischen Momentes eines Turmalines.

Von

W. Voigt.

Der Grundgedanke der Theorie der Pyroelectricität, soweit es sich dabei um die Herausschälung des wesentlichen Vorganges aus den störenden Nebenwirkungen handelt, ist bekanntlich von W. Thomson (Lord Kelvin) gegeben. Er findet sich — soweit ich sehe, allein — in Maxwell's Treatise ausgesprochen, wo der Schlußsatz des § 58 folgendermaßen lautet: „Nach W. Thomson hat jeder Theil dieser und ähnlicher hemiëdrischer Krystalle eine bestimmte von der Temperatur abhängige Polarität. Führt man den Krystall durch eine Flamme, so wird seine Oberfläche in allen Theilen so stark electrisirt, daß die Wirkung seiner inneren Theile nach außen gerade aufgehoben wird[1]). Der Krystall übt dann keine electrische Wirkung aus und hat auch kein Bestreben seinen electrischen Zustand zu ändern. Erwärmt man ihn dagegen oder kühlt ihn langsam ab, so ändert sich die electrische Erregung seiner inneren Theilchen, so daß sie nicht mehr durch die Ladung an der Oberfläche neutralisirt werden kann. Der Krystall beginnt dann nach außen zu wirken."

Diese Anschauung ist von allen späteren Bearbeitern der Pyroelectricität, und folgerichtig auch denjenigen der Piezoelectricität, übernommen worden; mein verehrter Freund Riecke[2]) hat durch ihre consequente theoretische Verwerthung ermöglicht, absolute Werthe für die pyroelectrische Erregung einer Anzahl

1) Das Gleiche geschieht in Folge der nie ganz fehlenden oberflächlichen Leitfähigheit auch, wenn man einen Krystall bei einer constant erhaltenen Temperatur längere Zeit sich selbst überläßt.

2) E. Riecke, Wied. Ann. **28**, 43, 1886; **31**, 889, 1887; **40**, 264, 1890.

von Turmalinen zu erhalten, und wir beiden [1]) haben auf ähnliche Weise unsere gemeinsamen Beobachtungen über die piezoelectrische Erregung von Turmalin und Quarz von dem Einfluß der oberflächlichen Leitfähigkeit dieser Krystalle befreit.

Aber alle bisherigen Beobachtungen beziehen sich nur auf die Aenderung der electrischen Polarität der Krystalle bei thermischer und mechanischer Einwirkung und liefern keine Auskunft über deren absolute Beträge. Allerdings giebt es gewisse Krystallgruppen, bei denen nach Symmetrie von vorn herein ersichtlich ist, daß bei gleichförmigem Druck oder gleichförmiger Temperatur ein electrisches Moment nicht auftreten kann, daß ihre Repräsenten also auch jedenfalls im sogenannten natürlichen Zustand keine Polarität im Thomson'schen Sinne besitzen können. Aber alle Gruppen, die durch eine ausgezeichnete polare Axe characterisirt sind, können durch gleichförmigen Druck oder gleichförmige Temperaturänderung erregt werden, sie können somit also auch im natürlichen Zustand eine Polarität besitzen.

Ueber den Werth des Momentes in letzterem Zustande existirten bisher nur Vermuthungen.

Herr Riecke neigte dazu, die absoluten Momente des Turmalines als die bei Erwärmung beobachtbaren weit übertreffend anzusehen [2]) und er giebt demgemäß auch in seiner späteren molekularen Theorie [3]) den einzelnen Molekülen der Krystalle mit einer ausgezeichneten polaren Axe dauernde absolute Momente, die sehr groß sind, gegenüber ihren durch Temperatur und Deformation bewirkten Aenderungen.

In meiner „allgemeinen Theorie der Pyro- und Piezoelectricität" [4]), welche molekulare Hypothesen gänzlich vermeidet, habe ich über die Größe jener absoluten Momente nur in sofern eine Annahme gemacht, als ich eine bestimmte hohe Größenordnung ausschloß, welche eine gewisse, bisher durch die Beobachtung nicht geforderte Complication der Theorie nöthig gemacht hätte.

Bei der Erweiterung der Riecke'schen Molekulartheorie habe ich dann später [5]) noch besonders hervorgehoben, daß es möglich und vortheilhaft ist, mit Molekülen zu operiren, die bei irgend einem erreichbaren Zustand ein Moment nicht besitzen; denn da-

1) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. 45, 523, 1892.
2) E. Riecke, Wied. Ann. 40, 306, 1890.
3) E. Riecke, Gött. Abh. 1892.
4) W. Voigt, Gött. Abh. 1890.
5) W. Voigt, Gött. Nachr. 1893, No. 16.

durch werden die absoluten Momente der Volumeneinheit von derselben Größenordnung, als ihre direct beobachtbaren Veränderungen und die Theorie wird vereinfacht, ohne anscheinend mit der Beobachtung in Widerspruch zu treten. Auch aus andern Gründen war mir die Vorstellung einer exorbitanten Größe der dauernden specifischen Momente nicht sympathisch. —

Kürzlich habe ich nun bemerkt, daß die experimentelle Bestimmung der absoluten specifischen Momente eines piezoelectrischen Krystalles mit einer ausgezeichneten polaren Axe jedenfalls im Princip durchgeführt werden kann. Ist es nämlich auch nicht möglich, die auf der Oberfläche des Krystalls gebundene Ladung, wenn sie sich einmal gebildet hat, zu beseitigen, so kann man doch durch Zerlegen des Krystalles neue Flächen herstellen, die jedenfalls zunächst noch keine solchen Ladungen tragen. An diesen Flächen werden dann die Wirkungen jener innern Momente nachweisbar sein, und aus ihnen wird man auf den Betrag der Momente selbst zurückschließen können.

Mit Ausnahme der Kostbarkeit des Materiales, das bei diesen Versuchen zu Grunde geht, stehen der Ausführung derartiger Beobachtungen Schwierigkeiten auch nicht entgegen. Ich habe mich auf die Untersuchung desselben brasilianischen Turmalines beschränkt, für welchen Riecke und ich die piezoelectrischen Konstanten bestimmt haben [1]).

Von dem damals benutzten Krystall war u. a. ein nahezu stabförmiges Fragment von ca. 6 cm Länge und ca. 20 □mm Querschnitt übrig geblieben, das erst ein Mal als Ganzes und darnach noch drei Mal in seinen Theilen [2]) zerbrochen werden konnte.

Hierzu wurde das zu benutzende Präparat mit seinen Enden in zwei messingene Stäbe longitudinal so eingekittet, daß zwischen jenen ein mittleres Stück des Krystalles frei blieb, und darnach mehrere Stunden lang sich selbst überlassen. Dicke Korke, die über die Messingstäbe geschoben waren, gestatteten die Handhabung ohne ihre Temperatur merklich zu ändern. Das freie Stück des Krystalles war lackirt, die gewünschte Bruchstelle durch einen Diamantstrich markirt.

Das Zerbrechen des Krystalles geschah unmittelbar über zwei isolirten und mit den Quadranten eines Nernst-Dolezalek'schen Electrometers verbundenen Quecksilbernäpfen; kaum 1/4 Secunde später waren die neuen Flächen in die bezüglichen Näpfchen getaucht, und die Beobachtung konnte beginnen.

1) E. Riecke und W. Voigt l. c.

2) Der Stab brach in Folge eines excentrischen Sprunges in drei Theile.

Ist das absolute electrische Moment der Volumeneinheit des Turmalines gleich μ, der Querschnitt des Krystalles an der Bruchstelle gleich q, so wird in den Näpfen die Electricitätsmenge $e' = \pm q\mu$ gebunden, $e = \mp q\mu$ also frei und wirksam.

Um das Electrometer für die Messung dieser Größe zu graduiren wurde die von Riecke und mir bestimmte piezoelectrische Erregbarkeit desselben Turmalines benutzt. Nach den von uns erhaltenen Zahlen wird durch einen longitudinalen Druck von einem Kilogramm pro Quadratcentimeter in unserm Turmalin ein specifisches Moment von der Größe $\mu_0 = 0{,}056$ (g, cm, sec) erregt und die Electricitätsmenge e_0, die auf einem leitenden Belag von der Größe des Querschnittes q_0 durch einen Gesammtdruck von p_0 kg frei wird, beträgt

$$e_0 = 0{,}056 \cdot p_0.$$

Da die Kapacitäten der Krystalle bei beiden Experimenten neben denen des Electrometers vernachlässigt werden können, so darf man die beobachteten Ausschläge a und a_0 den Ladungen e und e_0 proportional setzen, also bilden

$$e_0 : a_0 = e : a, \text{ d. h. } \mu = \frac{0{,}056 \cdot a p_0}{a_0 q}.$$

Als Ausschläge wurden in beiden Fällen die aus den ersten drei Umkehrpunkten durch Rechnung gewonnenen benutzt, ein Verfahren, das trotz der schnellen Abnahme der Ladungen in Folge unvollständiger Isolation bei der hier möglichen geringen Genauigkeit der Messungen jedenfalls zulässig ist.

Die erste vorläufige Beobachtung lieferte einen Ausschlag a von ca. 185 mm, während die Bruchfläche q sich ungefähr gleich 0,15 □cm fand; der zum Graduiren dienende Turmalin wurde mit $p_0 = 3$ gedrückt und dabei der Ausschlag von 6,7 mm beobachtet. Hieraus folgt für μ der Werth

1) $$\mu = 30{,}_7 \; (cm, g, sec).$$

Die weiteren Messungen wurden bei etwas anderer Anordnung vorgenommen; es fand sich hierbei die Werthreihe

2) $a = 180,\ q = 0{,}18_0,\ p_0 = 5,\ a_0 = 8{,}2,\ \mu = 34{,}_2,$

3) $a = 208,\ q = 0{,}18_5,\ p_0 = 5,\ a_0 = 8{,}2,\ \mu = 37{,}_5,$

4) $a = 160,\ q = 0{,}17_5,\ p_0 = 5,\ a_0 = 8{,}2,\ \mu = 31{,}_2.$

Aus diesen Beobachtungen, die besser übereinstimmen, als ich er-

wartet hatte, würde — vorausgesetzt, daß nicht bisher unberücksichtigte Umstände Einfluß haben, — als mittlerer Werth des specifischen Momentes des benutzten Turmalines bei ca. 24° C. folgen

$$\mu = 33{,}4 \ (cm, g, sec).$$

Um von der Ordnung dieser Zahl eine Vorstellung zu geben, kann man das Resultat[1]) benutzen, daß bei der Erwärmung oder Abkühlung um 1° C. μ sich ungefähr um 1,23 ändert; das specifische Gesammtmoment entspricht hiernach der Wirkung einer Temperaturänderung von ca. 27° C.

Daß diese Größenordnung die richtige ist, ließ sich direct nachweisen, indem ein erwärmtes Stück des zerbrochenen Krystalles zwischen zwei leitenden mit den Quadranten des Electrometers verbundenen Belegen der Abkühlung überlassen wurde. Die ursprüngliche Erwärmung mochte kaum 100° C. betragen haben, trotzdem ging die Nadel des Electrometers binnen wenigen Secunden aus der Scala.

Diese letztere Beobachtung gestattet nun auch den Sinn oder das Vorzeichen des in unserm Turmalin vorhandenen specifischen Momentes zu bestimmen. Es ergab sich dabei die folgende Regel:

Ist bei der Abkühlung dasselbe Ende des Krystallfragmentes mit demselben Quadranten verbunden wie zuvor nach dem Zerbrechen des Krystalles, so findet der Ausschlag beide Male in dem gleichen Sinne statt.

Hieraus folgt das zunächst wohl überraschende Resultat, daß das absolute specifische Moment μ des Turmalines bei 24° das entgegengesetzte Vorzeichen hat, als seine Aenderung mit steigender Temperatur ϑ, also hierbei, wenn man die obigen Zahlen unbedenklich benutzt, abnimmt nach dem Gesetz

$$\mu = 33{,}4 - 1{,}23\,(\vartheta - 24).$$

Die relative Aenderung von μ mit der Temperatur in der Nähe der Beobachtungstemperatur ist außerordentlich groß; demgemäß erklären sich vielleicht auch die Differenzen zwischen den verschiedenen oben erhaltenen Zahlen für μ zum größten Theil aus Temperaturdifferenzen. Dies wird wahrscheinlich durch den Umstand, daß das dritte Präparat, das nach dem Einkitten über eine Nacht hinweg sich selbst überlassen gewesen war, den absolut größten Werth von μ geliefert hat, wie ein solcher in der That der niedrigsten Temperatur entspricht.

Jenseits 50° findet für μ unter Durchgang durch Null ein Zeichenwechsel statt. Hätten also etwa, wie ich gelegentlich ver-

1) E. Riecke und W. Voigt l. c. p. 552.

muthete, die Moleküle des Turmalin in dem Zustande, bei dem der Krystall sich bildete, keine electrischen Momente gehabt, so würde dieser Zustand bei Atmosphärendruck durch eine Temperatur in der Nähe von 50° charakterisirt sein; anderen Drucken würden natürlich auch andere Temperaturen entsprechen. —

Gegen die im Vorstehenden gegebene Deutung unserer Versuche könnte man den Einwand erheben, daß sich möglicher Weise im Augenblick des Zerbrechens noch bisher nicht berücksichte electrische Vorgänge abspielen, deren Resultat in den Beobachtungen mit zum Ausdruck gelangt. Z. B. könnte man annehmen, daß einen Moment lang die zwischen den eben getrennten Krystallhälften befindliche Luftschicht in Folge einer starken Verdünnung leitend wäre; dann würde die electrische Polarität der beiden Krystallhälften in dieser Schicht eine electrische Vertheilung bewirken, deren Effect eine Oberflächenladung der Bruchflächen und somit eine scheinbare Verringerung des Momentes μ sein müßte.

Die Möglichkeit eines derartigen Vorganges ist unmittelbar zuzugeben; dagegen scheint mir die Wahrscheinlichkeit einer merklichen Wirkung desselben ziemlich gering. In der That, nähme man an, daß der wahre Werth von μ viel größer, als der beobachtete wäre, der letztere sich also als die Differenz zweier sehr großer Zahlen ergeben hätte, so würde die so gute Uebereinstimmung unserer Resultate kaum verständlich sein; denn daß der störende Vorgang beim Zerbrechen mit einer so bedeutenden Regelmäßigkeit ablaufen sollte, ohne doch zur vollständigen Entladung zu führen, ist nicht recht glaublich. Auch der sehr beträchtliche Betrag der nicht ausgeglichenen Spannung ($\mu = 33{,}4$ entspricht einer Dichte der aequivalenten Oberflächenladung, die das $5^1/_2$fache der größten von Herrn Riecke[1]) auf der Scheibe einer Influenzmaschine beobachteten ist), spricht gegen eine auch nur äußerst kurz andauernde Leitfähigkeit der Luftschicht zwischen den Krystallhälften.

Dabei fällt auch noch das Vorzeichen des beobachteten μ in's Gewicht. Selbst zugegeben, daß der erhaltene Werth von μ bei 24° C. erheblich zu klein ausgefallen sein könnte — wie denn auch jeder Verlust durch gewöhnliche Leitung in diesem Sinne wirkt, — so ergiebt das Resultat sein Verschwinden bei einer sehr mäßigen Temperatur, was nicht vereinbar ist mit einem Werth höherer Ordnung gegenüber den practisch zu bewirkenden Aenderungen desselben. Denn der Gedanke, daß in dem verdünnten Luftraum electrische Schwingungen entständen, und daß die Leit-

1) E. Riecke, Wied. Ann. 40, 306, 1890.

fähigkeit bei allen Beobachtungen genau in dem Zeitpunkt verschwände, wo die Oberflächenschicht die Wirkung der innern Momente um denselben Betrag übercompensirte, wird ernstlich kaum vertreten werden können.

Andere Fehlerquellen kommen wohl noch weniger in Betracht. Eine Electricitätserregung durch Reibung zwischen Turmalin und Quecksilber kann z. B. kaum wirksam werden, da beide Körper bei der Beobachtung mit einander in Berührung, die etwaigen Ladungen also an einander gebunden bleiben.

Nach alledem scheinen mir, so lange nicht neue Störungswirkungen bei dem Vorgang des Zerbrechens plausibel gemacht werden, die oben gezogenen Folgerungen bezüglich des Sinnes und der Größenordnung des wahren specifischen electrischen Momentes des untersuchten Turmalines ein gewisses Vertrauen zu verdienen. Durch sie würde dann auch die Vorstellung gestützt, daß es sich bei der Pyro- und Piezoelectricität des Turmalines ebenso, wie bei allen Krystallen ohne ausgezeichnete polare Axe, nicht um sehr kleine Aenderungen sehr großer Gesammtmomente, sondern um das Entstehen von Momenten handelt, die unter gewissen uns zugänglichen Umständen ganz fehlen können.

Geprüft könnten diese Resultate nach einer Richtung hin werden, wenn es gelänge, den obigen analoge Beobachtungen bei höheren Temperaturen durchzuführen. Aber diesen stehen große Schwierigkeiten entgegen, die zumeist daraus fließen, daß es nicht wohl möglich ist, die ganze Operation mit dem Turmalin in einem geschlossenen Raum, z. B. in einem Luftbad vorzunehmen. Einerseits läßt sich so die Temperatur des Krystalles nur höchst ungenau bestimmen und es liegt die Gefahr vor, daß bei seinem Eintauchen in die vielleicht wesentlich anders temperirten Quecksilbernäpfe durch Abkühlung oder Erwärmung secundäre electrische Momente entstehen. Ferner wirkt die von der Flamme direct erhitzte Luft rapid entladend, resp. ladend, und bringt somit selbst in der kleinen Zeit bis zum Eintauchen in das Quecksilber auf die Bruchflächen eine Belegung, die den Effect der innern Momente schwächt, ja vielleicht zerstört.

Deshalb vermag ich auch dem Resultat einer über einem erhitzten Blech bei ca. 60° angestellten Beobachtung, welche eine sehr schwache electrische Wirkung ergab, erhebliches Gewicht nicht beizulegen.

Göttingen, im Sept. 1896.

Ueber die Fibrinbildung an serösen und Schleimhäuten.

Von

J. Orth.

Vorgelegt in der Sitzung am 24. October 1896.

Nach der Vertheidigung, welche Marchand[1]) vor kurzem unseren gemeinsamen Anschauungen über entzündliches fibrinöses Exsudat besonders gegenüber den Angriffen von Neumann[2]) hat zu Theil werden lassen, könnte es fast überflüssig erscheinen, daß auch ich noch einmal das Wort in dieser Angelegenheit ergreife[3]); ich thue es, weil ich einmal zu den Marchand'schen Ausführungen, auf die ich im übrigen verweise, noch einige zur Klärung der Hauptfrage geeignete Mittheilungen zu machen habe, dann aber auch, weil auch zwischen Marchand und mir einige Differenzen obwalten.

Neumann tritt als Vertheidiger für die Grawitz'sche Behauptung, „daß das auf der Oberfläche seröser Häute auftretende Fibrin nicht ein Exsudat darstellt, sondern vielmehr umgewandelte fibrilläre Intercellularsubstanz ist", in die Schranken, doch steht er sowohl in der Frage der entzündlichen Fibrinbildung überhaupt, wie in derjenigen über die Bildung an den serösen Häuten im Besonderen keineswegs auf dem extremen Standpunkt von Grawitz, sondern hat der gegenseitigen Ansicht sehr große Concessionen

---

1) Virch. Arch. 145, S. 279, 1896.

2) V. A. 144, S. 201, 1896.

3) Ich habe über dieses Thema auch in der patholog. Section der Frankfurter Naturforscherversammlung gesprochen.

gemacht, wenn er auch auffälliger Weise gerade über diese Punkte kurz hinweggeht, obwohl doch eben sie einer ausführlichen Erörterung werth gewesen wären. Während Grawitz meines Wissens auch den Fibrinpfröpfen in den Alveolen der entzündeten Lunge die exsudative Natur abspricht, nennt dagegen Neumann den Alveoleninhalt unzweifelhaftes Exsudatfibrin (S. 210), ohne freilich auf die auffällige Verschiedenheit seiner Auffassung betreffs dieses Fibrins und des bei der gleichen Affektion an der Pleura vorkommenden weiter einzugehen; während weder bei Grawitz noch bei seinem Schüler Schleiffarth[1]) der fibrinoiden Degeneration der Pleura irgend eine bestimmte Grenze gezogen wird[2]), erklärt Neumann ausdrücklich (S. 213) „letzteren Vorgang" (nämlich das Weitergreifen der fibrinoiden Degeneration in die Tiefe) „findet allerdings fast immer seine Grenze an der obersten elastischen Faserlamelle"..., wodurch die Bedeutung der fibrinoiden Degeneration trotz der Berufung auf die starke Quellung der fibrinoiden Masse bei der von Neumann selbst zugestandenen Schmalheit des danach in Betracht kommenden Bindegewebssaumes von vornherein auf ein Minimum beschränkt wird; während Schleiffarth (l. c. p. 8) das entzündliche Granulationsgewebe, welches in der Pleura sich allmählich bildet, immer wieder an der Oberfläche sich umwandeln läßt, sagt Neumann jetzt (S. 217) entgegen seiner früheren Angabe, daß in vielen Fällen die Bildung der fibrinoiden Substanz mit dem Heranwachsen des jungen Gewebes cessirt; während bei Grawitz und Schleiffarth nur von Fibrinumwandlung der Intercellularsubstanz die Rede ist, gibt Neumann folgerichtig die Bildung von Exsudatfibrin zu, indem er bemerkt (S. 219), daß insbesondere für diejenigen Fälle, wo sich sehr massenhafte Fibrinformationen in der Höhle der serösen Säcke oder auf ihren Wänden zeigen, die alte Ansicht, daß sich aus einem flüssigen Exsudat Fibrinniederschläge bilden und sich später eventuell organisiren, zu Recht bestehen bleibt, wenngleich er auch für diese Fälle den Veränderungen des Gewebes die wichtige Rolle, die exsudativen Vorgänge einzuleiten, zuertheilt.

Ich stehe gewiß nicht allein mit dem Wunsche, daß etwas Genaueres über die schmale Bindegewebsschicht zwischen Epithel

---

1) Virch.-Arch. 129, S. 1, 1892.

2) Schleiffarth sagt: l. c. p. 6: „Es handelt sich dabei" (nämlich bei der Bildung dickerer Fibrinhäutchen) — „darum, daß immer neue Lagen von Bindegewebe in die zellige Umbildung einbezogen werden"...

und oberster elastischer Lamelle gesagt worden wäre, um so mehr als auch dabei der Hinweis auf Buhl ebensowenig glücklich ist, als an der anderen von Marchand (l. c. p. 284) erwähnten Stelle. Buhl sagt a. a. O. ausdrücklich „als oberste Grenze der Serosa müssen die letzten feinsten elastischen Faserzüge gelten; selbst bei Aufquellung der Membran werden dieselben von dem bindegewebigen Stroma gar nicht oder nur stellenweise überragt". Und doch soll ausschließlich dieser überragende Theil nach Neumann das Fibrin liefern! Allerdings nur im Anfang des Prozesses; aber wann ist der Zeitpunkt der Bildung des Exsudatfibrins gekommen, wie dick muß die Fibrinlage sein, um den Gedanken an Exsudatfibrin zulässig erscheinen zu lassen, woran erkennt man das Exsudatfibrin, woran, daß eine Organisation von Exsudatfibrin eingetreten ist — über keine einzige dieser doch so nahe liegenden und so wichtigen Fragen wird auch nur der mindeste Aufschluß gegeben. Höchstens kann man sich, da die Zelleneinlagerungen, wie Marchand ausgeführt hat, nicht maßgebend sein können, daran halten, daß Neumann behauptet (S. 217), niemals biete ein Faserstoffexsudat, in welches neugebildetes Gewebe hineinsprießt, eine derartige Formation glänzender, geschlängelt und in vielfachen Windungen verlaufender Bänder dar wie das aus der fibrinoiden Degeneration des Gewebes hervorgegangene Entzündungsprodukt.

Schon vor dem Erscheinen der Neumann'schen Abhandlung hatte ich einen Schüler, Dr. Gaylord, beauftragt, zu untersuchen, welche Bilder man erhält, wenn man geschlagenes Blutfibrin in die Pleurahöhle von Kaninchen bringt. Aeußere Umstände haben leider die Vollendung der Arbeit verzögert, aber ich kann doch ein Präparat vorzeigen von einem Thiere, welches 14 Tage nach dem Einbringen des zuvor mit Formol behandelten, aus Kaninchenblut gewonnenen Fibrins getödtet worden ist und bei dem keine acute Entzündung entstanden war. Das eingebrachte Fibrin ist in Organisation und man sieht so schöne glänzende homogene Bänder, wie in der Neumann'schen Fig. 5, welche als Typus einer fibrinös-productiven Pericarditis mit fibrinoider Degeneration gegeben ist.

Diese Präparate gaben noch einen weiteren interessanten Befund, nämlich ein zusammenhängendes aus großkernigen Zellen bestehendes Zellhäutchen, welches den größten Theil der Oberfläche des Fibrins überzieht. Man kann den Zellen nicht ansehen, ob sie Fibroblasten aus dem Bindegewebe oder, wie ich meine, neugebildete Epithelzellen sind, aber jedenfalls beweist der Be-

fund doch, daß epithelähnliche Zellen secundär auf einer fibrinösen Auflagerung einer serösen Haut gebildet werden können, man wird also auch gegebenen Falls beim Menschen mit einer solchen Möglichkeit zu rechnen haben, auch wenn unter dem Fibrin noch eine Lage epithelartiger Zellen vorhanden sein sollte (vgl. die von Neumann zu seinen Gunsten citirten Befunde von Sultan)[1]).

Um über das Verhalten des elastischen Gewebes bezw. der über die oberste Lamelle desselben hinausragenden Bindegewebsabschnitte zu dem Fibrin, worüber Neumann die erwähnte inhaltsschwere, wenn auch nur kurze Bemerkung gemacht hat, genaueren Aufschluß zu erhalten, habe ich einen anderen Schüler, Dr. Vassmer veranlaßt, eine größere Anzahl von Präparaten, insbesondere von der Lunge, mit Orcëin zu färben. Die Präparate haben sowohl für die Pleura wie für das Pericard ergeben, daß an der Oberfläche dieser Häute die elastischen Fasern durch dichtere netzförmige Zusammenlagerung eine Art von scharf hervortretender Schlußlamelle bilden, auf welcher aber das Epithel in der Regel nicht direkt aufsitzt, sondern über welche noch eine helle, aus sehr zarten Bindegewebsfäserchen gebildete, an Breite wechselnde Schicht hinausreicht, welche am Pericard im allgemeinen schmäler ist, als an der Pleura, aber auch an dieser unter normalen Verhältnissen nur schmal ist. In einigen Fällen (mit Entzündung) haben sich bei guter Orcëinfärbung noch vereinzelte äußerst feine elastische Fäserchen, besonders dicht unter dem Epithel in dieser Schicht wahrnehmen lassen, gewöhnlich sieht man in derselben nichts von elastischen Fasern.

Es ist nun schon lange bekannt —, und auf die hierher gehörige Angabe von Buhl bezog sich wohl das vorher kritisirte Citat Neumann's — daß auch bei vorgeschrittener fibrinöser d. h. fibrinös-productiver Entzündung der serösen Häute, die elastische Grenzlamelle noch vollkommen erhalten ist, ein Beweis, daß in der That eine etwaige fibrinoide Degeneration des Bindegewebes nicht über diese Lamelle in die Tiefe vorgedrungen sein kann. Schleiffarth hat diese leicht festzustellende Thatsache nicht beachtet, welche m. E. allein schon genügt, um seine Darstellung von der fibrinösen Umwandlung der serösen Häute, als unrichtig erscheinen zu lassen. Der Befund widerstreitet aber nicht der Angabe Neumann's, daß der Degeneration nur der oberhalb der Lamelle liegende Theil anheimfalle; über sie können

1) Virch-Arch. 140, 1895.

nur frühere Stadien, reine fibrinöse Veränderungen Aufschluß geben.

Da ist zunächst zu constatiren, daß keineswegs die Dicke dieser Serosaschicht sich umgekehrt verhält wie die Dicke der Fibrinschicht, was doch der Fall sein müßte, wenn das Fibrin aus ihr hervorgegangen wäre: trotz dicker Fibrinauflagerung kann auch diese Schicht noch sehr breit sein, viel breiter als unter normalen Verhältnissen, weil sie bei der Entzündung mehr oder weniger stark aufquillt. Am dicksten habe ich sie gesehen, wo Interlobularsepten abgehen und gerade hier ist auch die Fibrinlage oft dicker wie in der Nachbarschaft, besonders wenn an dieser Stelle eine Einbuchtung der Oberfläche vorhanden ist. Insbesondere ist an den Grenzen von Fibrinauflagerungen keineswegs regelmäßig eine Veränderung der Dicke der Serosaschicht zu bemerken, was doch ebenfalls sein müßte, wenn das Fibrin umgewandelte Serosa wäre. Die Oberfläche der Serosa gegen das Fibrin ist auch da, wo dieses fest anliegt, scharf abgesetzt, glatt, wenn auch mehr oder weniger stark gewellt. Der Unterschied tritt besonders deutlich hervor, wenn, wie es öfter der Fall zu sein scheint, der Bindegewebsstreifen blutig infiltrirt ist; an van Gieson-Präparaten ist dann das Blut durch einen rothen Bindegewebsstreifen scharf gegen das Fibrin abgegrenzt.

An guten Präparaten wird die Abgrenzung freilich noch besser durch die bekannten epithelartigen Zellen gebildet, deren Vorkommen von allen Untersuchern zugestanden wird, über deren Bedeutung nur Meinungsverschiedenheit herrscht, indem Neumann wie Schleiffarth und Grawitz behaupten, daß dies nicht die Serosaepithelien, sondern verdickte Zellen von Saftspalten der Serosa seien, welche erst nach der Fibrinbildung diese Ausbildung erreicht und die Abspaltung der degenerirten Schicht bewirkt hätten. Da muß ich nun zunächst der Behauptung von Neumann (S. 212, 214 u. f.) widersprechen, daß diese Zellen erst mit einer starken Anhäufung von zelligen Elementen im Bindegewebe der Serosa, mit einer entzündlichen Zellinfiltration erschienen, nachdem die Fibrinmasse ein Häutchen gebildet hat und dicker geworden ist, denn man kann sie schon unter den ersten Fibrinanhäufungen sehen und findet sie oft, auch wenn in der Strosa von zelliger Infiltration noch kaum eine Spur zu sehen ist. Es liegen derartige Präparate vor, darunter auch eines, bei dem man zwar schon einen zusammenhängenden Fibrinsaum, aber diesen nur von minimalster Breite an den mit einander verklebten Pleurablättern zweier Lungenlappen sieht und zu den Seiten der

verklebten Fibrinstreifen je eine Reihe von großen Zellen mit großen ovalen Komen (Epithelzellen), während die Serosa, in welcher die elastische Grenzlamelle beiderseits durch eine Bindegewebsschicht überdeckt wird, sonst keine Zellvermehrung erkennen läßt. Wären diese Zellen Auskleidungen von Spalträumen, so müßte man doch auch einmal einen solchen Spaltraum vor der Ablösung des Fibrins oder etwas weiter in der Tiefe sehen, aber ich habe nie etwas derartiges entdecken können. Wohl aber habe ich immer wieder konstatiren können, daß die großen Zellen öfter so große Flächen überziehen, daß es ganz unmöglich ist, daß es so ausgedehnte Saftspalten geben kann. An einer Serie meiner Präparate von über einem Dutzend Schnitten (der Block ist noch nicht aufgebraucht) sind die Zellen unter einer dicken Fibrinlage an beiden Seiten einer Furche der Pleura immer wieder in gleicher Weise zu sehen. Wenn ich nun noch einmal hervorhebe, daß diese Zellen auch da gefunden werden, wo die oberste Serosaschicht eine beträchtliche Dicke besitzt, wo ihr also nichts fehlen kann, so meine ich genügend zahlreiche Thatsachen beigebracht zu haben, um mit Bestimmtheit sagen zu können, diese Zellen können nichts anderes als die Epithelzellen der serösen Haut sein, das Fibrin muß also aufgelagert, muß Exsudatfibrin sein.

Freilich kann man das Epithel nicht immer und überall nachweisen. Das kann damit zusammenhängen, daß man die Präparate erst längere Zeit nach dem Tode erhält, aber auch damit, daß dasselbe degenerirt, zu Grunde gegangen, abgestoßen bezw. abgehoben ist. Sehr interessant war mir ein Präparat, das ich schon in dem Referat über die Dissertation meines Schülers Apel erwähnt habe, bei welchem anscheinend ein ganzer Fetzen des Epithelhäutchens losgelöst und ohne den Zusammenhang einzubüßen über den sitzengebliebenen Rest herübergelagert war. Es war also an dem Präparate an einer Stelle das Fibrin unmittelbar dem Bindegewebe der Serosa aufgelagert, daneben aber von demselben durch zwei, sich nicht ganz berührende Epithelschichten getrennt, welche in einem kurzen Bogen neben der ersten Stelle in einander übergingen. Dies Präparat harmonirte sehr schön mit einem anderen, welches ich schon seit Jahren besitze und meinen Zuhörern als Beweis für das gelegentliche Erhaltenbleiben von Serosa-Epithelzellen auch bei productiv-fibrinösen Entzündungen vorzuzeigen pflege. Man sieht am Pericardium, dessen beide Blätter mit jungem Granulationsgewebe bedeckt und durch dicke Fibrinmassen verklebt sind, in der Gegend der Oberfläche der alten Serosa schmale, der Oberfläche parallel laufende Spalt-

räume von verschiedener Länge, welche mit einer dicken Epithelzellenlage ausgekleidet sind, welche hie und da unregelmäßige Ausbuchtungen zeigt, so daß drüsenähnliche Bilder entstehen. Um die Spalten herum befindet sich junges Granulationsgewebe, bezw. in Organisation befindliches Fibrin. Marchand hat offenbar ein ganz ähnliches Präparat gesehen (l. c. p. 302) und ich bin mit ihm der Meinung, daß hier ein Theil des Epithels erhalten geblieben ist. Nur an den von Epithel entblößten Stellen ist das junge Gewebe hervorgesproßt, welches sich dann über den Epithelresten vereinigt hat, eine kleine spaltförmige Lücke zurücklassend, welche entweder von vornherein durch eine Abhebung und Umschlagung des Epithels, wie ich sie an dem jüngeren Präparat gesehen habe, oder nachträglich durch Wucherung des übrig gebliebenen Epithels auch an der der Serosa entgegengesetzten Seite einen epithelialen Ueberzug erhalten hat.

Soweit bin ich wohl in voller Uebereinstimmung mit Marchand. Diese ist auch noch vorhanden in Bezug auf jene, an gelockerten und etwas abgehobenen Fibrinhäuten sichtbaren, zwischen den Epithelzellen bis zur Oberfläche der Serosa reichenden Strebepfeilern ähnlichen Fibrinbalken, welche auch ich für im Leben entstandene Bildungen ansehe, die nicht wenig zur Befestigung der Fibrinhaut an der Serosa beitragen mögen. Eine kleine Meinungsverschiedenheit herrscht aber in Bezug auf jene oft nur äußerst feinen Fibrinfädchen, welche von der größeren Auflagerung zwischen den Epithelzellen hindurch in die Serosa eindringen und hier besonders in den oberen Schichten zarte Netze bilden, deren Hauptbälkchen öfter, der Grenze zweier Epithelzellen entsprechend, von der Oberfläche büschelförmig in die Tiefe einstrahlen. Ich habe die Vermuthung ausgesprochen, daß es sich hier um postmortale Gerinnselbildung handeln möge, einmal von der Ueberlegung ausgehend, daß, wenn aus den Gefäßen eine gerinnbare Flüssigkeit austritt, welche sich durch das Gewebe nach der Oberfläche bewegt, die im Momente des Todes vorhandene Flüssigkeit nach dem Tode doch wohl ebenso gerinnen muß, wie die Entzündungslymphe oft gerinnt und wie auch das Blut gerinnt. Daß hier postmortale Gerinnungen statthaben beweisen am besten die kleinen Gerinnsel, welche man in benachbarten Blutgefäßchen der Pleura antreffen kann. Zweitens sagte ich mir, daß, wenn dieses Gerinnsel schon längere Zeit in dem Gewebe vorhanden gewesen sei, doch wohl die Fädchen wenigstens zum Theil dicker sein müßten, daß Verklumpungen sich zeigen müßten, kurzum, daß

das Bild ein anderes sein müßte, und endlich war mir auffällig, daß dem Gewebe, in welchem sich die Fibrinnetze zeigen, jede Spur von verändertem Aussehen fehlen kann, was mir mit der Annahme einer seit einiger oder gar seit längerer Zeit bestehenden Gerinnselbildung nicht recht zu harmoniren scheint.

Das gilt nicht nur für die serösen Häute, sondern auch für die Schleimhäute, wo man z. B. am Zäpfchen bei Diphtherie das ganze Gewebe von einem so zierlichen Fibrinnetzwerk durchsetzt finden kann, daß es fast aussieht, wie wenn man ein Blutgerinnsel vor sich hätte. Auch hier meine ich, daß der Gedanke, diese Fibrinnetze seien erst nach dem Tode entstanden, nicht von der Hand gewiesen werden kann, um so weniger als das Bild ein ganz anderes ist, wie in den Fällen und an solchen Stellen, wo eine sicher im Leben entstandene hyalin-fibrinoide Degeneration der Gewebe vorhanden ist.

Damit komme ich zu dem Punkte, in welchem ich mit Marchand eine wesentliche Meinungsverschiedenheit habe, zu der fibrinoiden Degeneration des Bindegewebes. Besonders bei Tuberkulose, aber auch bei sarcomatösen und carcinomatösen Entzündungen habe ich Bilder gesehen, welche den Beschreibungen Neumanns entsprechen und welche ich wie er auffassen zu müssen glaube. Schmale, der Oberfläche der Serosa parallel laufende glänzende Streifen oder Bänder einer hyalinen Masse, welche sich unmittelbar dem Verlauf der Bindegewebsbündel anschließen und in sie überzugehen scheinen, in welche nicht, wie bei der Organisation aufgelagerten Fibrins, junge Granulationszellen in verschiedener Richtung, mehr oder weniger senkrecht zu der Serosaoberfläche gestellt eindringen, sondern neben welchen nur die parallel gerichteten Spindelzellen der Serosa gelagert sind, das sind die Gebilde, welche man an solchen Präparaten zu Gesicht bekommt. Bis auf weiteres bin ich der Meinung, daß diese Gebilde durch die Annahme einer degenerativen Entstehung an Ort und Stelle die befriedigendste Erklärung finden. Freilich bin ich aber auch der Ansicht, daß diese Umwandlung nicht unabhängig von einem Exsudat aus den Gefäßen vor sich geht, sondern daß unter der Ein- und Mitwirkung exsudirter Stoffe die Intercellularsubstanz eine chemische Umwandlung erfährt, bei der sie aufquillt, hyalin wird und dem Fibrin ähnliche Reactionen darbietet.

Neben dieser Degeneration nehme ich aber auch für diese Fälle noch die Bildung von Exsudatfibrin an, besonders dann, wenn eine lockere netzförmige oder zottige Fibrinschicht an der Oberfläche sich zeigt. Wenn Neumann gegen meine Gegenüber-

stellung der einfachen und specifischen Entzündungen — die er übrigens zur Zeit seiner ersten Publikation für gar nicht so unwahrscheinlich gehalten haben muß, wie er es jetzt thut, da er selbst mit einer solchen Möglichkeit rechnete — darauf hinweist, daß schon die Uebereinstimmung des makroskopischen Befundes ihm kaum die Annahme von 2 principiell verschiedenen Prozessen zu rechtfertigen scheine, so muß ich doch hervorheben, daß zwar die makroskopische Uebereinstimmung besonders bei den acuter verlaufenden specifischen fibrinösen Entzündungen eine sehr große sein kann — dann ist auch das Fibrin größtentheils Exsudatfibrin — daß aber doch auch besonders an der Pleura über tuberkulösen Lungenherden sehr abweichende Bilder vorkommen. Jene grauen derben Verdickungen der Pleura mit fast glatter aber glanzloser Oberfläche, an denen man nur mit Mühe einzelne Fetzen oder Lamellen einer fibrinartigen Substanz abziehen kann, sind doch sehr besondere und eigenthümliche Bildungen, und gerade in ihnen sind besonders schön die parallelen Degenerationsbänder zu finden.

Solche oder doch ganz ähnliche Degenerationen erkenne ich auch in der Schleimhant bei Diphtherie an, wo bekanntlich besonders die Gefäßwände hyaline Aufquellungen und fibrinoide Umwandlungen erleiden. Auch die hyalinen, glänzenden Balkennetze, welche man dabei im Gewebe findet, deren Aussehen allerdings durchaus von dem jener Bänder der Serosa abweicht, sind m. E. nicht reines Exsudat, sondern unter der Einwirkung von Exsudat umgewandeltes Gewebe. Im übrigen kann auch ich sagen, daß besonders für die Rachendiphtherie dieser hyalin-fibrinoiden Umwandlung des Gewebes, der tiefen Pseudomembranbildung, wie ich den Vorgang nenne, gegenüber den exsudativen Hautbildungen an der Oberfläche eine nur untergeordnete und nebensächliche Rolle zukommt. Die Exsudation muß das wesentliche leisten und daß wirklich eine bewegliche, flüssige Substanz abgeschieden wird, dafür bieten besonders die Tonsillen manchmal schöne Beispiele. Wenn ich auch mit Weigert darin übereinstimme, daß als Regel unter der Pseudomembran kein Epithel mehr erkennbar ist, so kann man doch gelegentlich an Durchschnitten durch Lacunen der Tonsillen und zwar nicht nur an 1 Schnitt, sondern an ganzen Serien trotz Ausfüllung des Lumens mit einem Fibrinpfropf das Epithel ringsum vollkommen erhalten sehen. Wo soll da das Fibrin herkommen, wenn es nicht als Exsudat von oben hereingelaufen ist? Doch das sind bekannte Dinge, bei denen ich nicht länger verweilen will; ich habe sie nur berührt, um zum Schluß noch ein Präparat von Rachendiphtherie zu erwähnen, welches

m. E. ganz besonders schön und in nicht gewöhnlicher Weise die Wirkung eines Exsudationsstromes im Epithel zeigt. Man sieht da die Epithellage zu einer fächerigen Blase aufgebläht, in deren Hohlräumen Exsudatkörperchen und Fibringerinnsel eingelagert sind, ein Bild, welches an dasjenige einer Pockenpustel erinnert und welches nur dadurch entstanden sein kann, daß flüssiges Exsudat in das Epithel eingedrungen ist, die einzelnen Schichten verworfen hat und dann zum Theil geronnen ist. —

Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen.

Dritter Bericht.

Von

J. Orth.

Vorgelegt in der Sitzung am 24. October 1896.

Abgesehen von den in der vorstehenden Mittheilung (Ueber Fibrinbildung an den serösen und Schleimhäuten) berücksichtigten Untersuchungen von Dr. Gaylord und Dr. Vassmer habe ich über 8 Arbeiten zu berichten.

1. Ich selbst habe in der Berliner klin. Wochenschrift mitgetheilt, in welcher Weise und zu welchen Zwecken das Formaldehyd in dem pathologischen Institute zur Verwendung gelangt. Wenn auch schon seit einigen Jahren bekannt, hat sich die Kenntniß der vortrefflichen Eigenschaften des Formaldehyd doch noch nicht so verbreitet, wie es wünschenswerth ist. Bei uns wird das Formaldehyd außer zum Desodorisiren und Desinficiren hauptsächlich auch zum Härten und Conserviren sowohl makro- wie mikroskopischer Präparate angewandt, und zwar in Verbindung mit Kaliumbichromat in der Form der allgemein bekannten Müller'schen Flüssigkeit. Eine Anzahl damit conservirter makroskopischer Präparate, besonders vom Gehirn, hat sich, theils in Glycerin-Alkohol, theils in Formolgelatine bis heute vortrefflich gehalten und die Methode wird ihrer relativen Billigkeit wegen auch in Zukunft noch weiter benutzt werden, wenn auch die Combinationen des Formaldehyd mit allerhand farblosen Salzen (Natr. sulfur., Kal. acet. etc.) bei nachheriger Einwirkung starken Alkohols bessere Resultate geben mögen. Insbesondere wird die Härtung in Formol-Müller auch weiterhin für mikroskopische

Zwecke zur Verwendung gelangen. Ergänzend zu dem in meiner Publication Gesagten will ich noch erwähnen, daß man in F. M. gehärtete nervöse Centralorgane auch nach Weigert-Pal färben kann, wenn man die Mikrotomschnitte vorher in 5% Kaliumbichromat einlegt, sowie ferner, daß dünne Formol-Müller Präparate, nachdem sie flüchtig in Wasser etwas abgewaschen wurden, sehr gut gefrieren und mit dem Gefriermikrotom sich schneiden lassen. Die Schnitte verlieren im Wasser schnell das Chromsalz und lassen sich sehr gut färben; die rothen Blutkörperchen sind in ihnen besser erhalten, als wenn Formol allein zur Härtung benutzt wird.

2. Einige seltene Fälle von Verlagerung des Herzens in die Bauchhöhle mit und ohne Erhaltung des Pericards gaben dem 1. Assistenten des Institutes, Privatdocent Dr. Aschoff Gelegenheit, die Verhältnisse der medialen Zwerchfellshernien genauer zu studiren. Da die erwähnten Fälle mit Nabelschnurbrüchen kombinirt waren, so wurde eine größere Anzahl Mißgeburten mit Nabelschnurbrüchen aus der Sammlung des Institutes auf die Zwerchfellsverhältnisse untersucht. Dabei stellte sich heraus, daß ein gewisser Tiefstand des medialen und vorderen Zwerchfelltheiles, also des Bodens der Herzbeutelhöhle öfter vorhanden war, in einigen Fällen auch Tiefstand der seitlichen Zwerchfellhälften. Da die Entwickelung der Leber mit derjenigen des Zwerchfells, besonders des medialen Theiles innig verbunden ist, so wurde auch ihre Lagerung in allen Fällen genauer untersucht. Es ergab sich, daß oft genug die Leber allein den Inhalt des Zwerchfellbruches bildete, daß dieselbe mit der Wand des Sackes innig verbunden war und daß die Nabelvene entweder links oder rechts (Erhaltung der rechten Nabelvene!) in der Sackwand verlief, um dann erst in die Leber einzutreten, ein Verhältniß, wie es sich auch in früheren Entwickelungsperioden beim Embryo findet. Ein anderes embryonales Verhältniß zeigte sich an den abführenden Venen; alle Lebervenen sammt dem Ductus Arantii vereinigen sich zu einem gemeinsamen großen Stamm, in welchen weiterhin von hinten her die Vena cava inferior mündet: Erhaltung der Vena revehens communis mit der aus ihr hervorsprossenden Vena cava inferior. Es ergab sich also, daß die Leber nicht secundär in den Bruchsack hineingerathen sein kann, sondern von Anfang an in dem Bruchsack, d. h. zu weit nach vorn angelegt sein mußte.

Damit ist aber die Theorie Ahlfeld's, welcher alle Nabelschnurbrüche auf ein durch abnorm lange Persistenz des Duct.

omph. mesar. bedingtes Liegenbleiben der Darmschlingen zurückführte, für eine große Zahl von Fällen unhaltbar geworden, da die abnorme Leberanlage (s. Embryo Rg von His) in eine Zeit fallen muß, wo der Austritt des Darmes in die Nabelschnurscheide erst beginnt, sein mangelhaftes Zurücktreten also nicht für die abnorme Lage der Leber verantwortlich gemacht werden kann.

Ist die Leberanlage abnorm, so muß es auch die Zwerchfellanlage sein. Diese hängt aber innig mit der Bildung der definitiven vorderen Brustwand zusammen. Ein Theil der Nabelschnurbrüche und Zwerchfellsmißbildungen muß daher auf sehr frühzeitige Störungen in der Entwickelung zurückgeführt werden, von denen A. die Persistenz der His'schen Rückenkrümmung als eine, vielleicht häufigere Ursache hinstellt. — Die Arbeit ist in Virchow's Archiv, Bd. 144 veröffentlicht.

3. Zur Prüfung der Annahme Pommer's, daß die Rippenbrüchigkeit der Geisteskranken, besonders der Paralytiker auf osteomalacischen Veränderungen beruhe, hat Dr. E. Meyer, damals 2. Assistent des Institutes bei 27 Geisteskranken mit oder ohne Brüchigkeit, mit oder ohne Brüche genauere Untersuchungen angestellt, indem er gleichzeitig eine größere Zahl nicht geisteskranker Individuen, von neugeborenen Kindern bis zu einer 81jährigen Greisin, zur Controlle heranzog. Was zunächst die Befunde an den Rippen geistig normaler Menschen betrifft, so konnte constatirt werden, daß die Rippen der Frauen im allgemeinen platter sind (Dicke zu Breite 1 : 3) als diejenigen der Männer (D. zu B. 1 : 2—2,5). Feine osteoide Säume, die sich nur etwas heller in Carmin zu färben pflegten als die osteomalacischen, wurden in allen Lebensaltern gefunden, von 8 Tagen bis zu 81 Jahren. Etwas breitere traten hie und da an Gefäßkanälen auf, wo vorher Resorption stattgefunden hatte, wie aus der lacunären Gestaltung der Oberfläche des festen Knochens zu schließen war. Besonders breite, geradezu osteomalacische Säume zeigte ein 3monatl. rhachitisches Kind.

Ebenso wurden in allen Fällen v. Recklinghausen'sche Gitter gefunden, außerdem neben und zwischen den Knochenhöhlchen und -kanälchen ein dunkelbraunes Netz (Grundnetz), dessen Balken aus braun erscheinenden Körnern gebildet sind, und dessen Maschen so weit sind, daß ein kleiner freier Raum um die Knochenkörperchen übrig bleibt, während sich einzelne Kanälchen oft durch sie hindurch verfolgen lassen. Die braunen Netze bleiben in den Präparaten erhalten auch wenn die Injektion der Knochenhöhlen geschwunden ist. In Kochsalz, Kal. acet. tritt

das braune Netzwerk nicht hervor, in Glycerin erscheint es allmählich, am besten ist es in Balsam sichtbar. Bei auffallendem Lichte erscheinen die Netze mattweiß, bei starker Vergrößerung sieht man nicht braune Körner, sondern granulirte Fäserchen, die sich in vielfacher Weise kreuzen und durchflechten. In völlig entkalkten Knochen fehlt das Grundnetz, bei Salzsäureeinwirkung auf frische Knochen schwindet es allmählich, es muß sich also nach M. um eine ungleichmäßige Kalkablagerung handeln.

Daneben kommen auch noch körnige krümelige Massen von braunem Aussehen vor, bei denen man auch mit starker Vergrößerung braune Körner sieht — ebenfalls eine besondere Form von Kalkablagerung. Die braunen Grundnetze sind im allgemeinen im Alter und bei schweren Krankheiten (dann auch schon in der Jugend) stärker ausgesprochen. Die Haltbarkeit der Rippen nicht geisteskranker Individuen nimmt mit dem Alter und noch mehr durch chronische zehrende Krankheiten ab.

Von Geisteskranken gelangten 11 Paralytiker zur Untersuchung, unter denen nur 4 eine gewisse Knochenbrüchigkeit darboten, keiner osteomalacische Veränderungen. Gitter waren zwar reichlich vorhanden, aber nicht zweifellos in abnormer Menge, dagegen war in mehreren Fällen auffällig das besonders starke Hervortreten brauner Grundnetze sowie das ausgedehnte Vorkommen körnigkrümeliger Massen.

Bei 1 mit tuberkulöser Phthise behafteten Melancholiker waren die Rippen sehr brüchig, ihre Rinde dünn, Spongiosa spärlich, aber die osteoiden Säume nur ganz schmal, während starke braune Grundnetze neben spärlichen Gittern hervortraten.

Nur unter den 7 Fällen von Paranoia fand sich 1 mal eine typische osteomalacische Veränderung bei einer 77jährigen Frau, sonst waren, trotzdem die Rippen 1 mal sehr, 2 mal deutlich, und 1 mal etwas brüchig sich zeigten, die osteoiden Säume schmal, Gitter vorhanden, einigemal reichlich, die Grundnetze meist stark ausgebildet.

Unter den 8 Fällen endlich von nicht paralytischer Demenz kamen 5 mal sehr brüchige, 1 mal deutlich brüchige und 2 mal etwas brüchige Rippen vor und trotzdem waren überall nur ganz schmale osteoide Säume vorhanden. Die Gitter erschienen meist vermehrt, ebenso waren oft die braunen Grundnetze stark ausgebildet.

Das Resultat war also: bei 27 Geisteskranken, zwar eine größere Anzahl mit Rippenbrüchigkeit, aber nur 1 osteomalacisches Individuum; demnach kann die Osteomalacie nicht Ursache der

Rippenbrüchigkeit sein. Dagegen fand sich überall bei Brüchigkeit auch eine Atrophie der Knochen. Die Ursache dieser kann nicht Steigerung der Resorption sein, da nur vereinzelt Resorptionslacunen gefunden wurden und Riesenzellen (Ostoklasten) nicht mehr wie in der Norm, also gilt wohl auch hier dieselbe Erklärung wie für die senile Atrophie: Die Apposition hält nicht mehr Schritt mit der Resorption. Die Vermehrung der braunen Grundnetze und der körnig-krümeligen Massen zeigt Unregelmäßigkeit der Kalkablagerung an.

Um betreffs der Menge des vorhandenen Kalkes auch chemische Anhaltspunkte zu bekommen, hat M. eine Anzahl Knochen bei Prof. Tollens im agricultur-chemischen Laboratorium untersucht. Das Resultat war, daß die brüchigen Rippen Geisteskranker viel weniger Knochenasche haben, wie die nicht brüchigen Rippen Geisteskranker sowie die Rippen entsprechender nicht geisteskranker Individuen, ferner daß die Verminderung an Knochenasche so gut wie vollständig durch Zunahme des Fettes ersetzt wird.

Daß osteomalacische Zustände für die Rippenbrüchigkeit nicht verantwortlich gemacht werden dürfen, ergab sich auch aus der Untersuchung einer Anzahl von Rippenbrüchen. Der Callus bestand, abgesehen von den vielfach vorhandenen knorpeligen Einsprengungen, nicht aus osteoidem Gewebe, sondern aus kalkhaltigen Knochen.

Was nun endlich die Ursache der Rippenatrophie betrifft, so ist bemerkenswerth, daß an dem hiesigen Material eine besondere Häufigkeit oder Stärke der Brüchigkeit bei Paralyse, entgegen der gewöhnlichen Annahme, nicht zu constatiren war. Nichts deutet darauf hin, daß es sich um eine trophische Atrophie handele, auch kann man nicht von einem senilen Marasmus sprechen, sondern es ist der Marasmus überhaupt die Ursache. Wie bei nicht am Geiste Kranken schwere Cachexie Rippenbrüchigkeit machen kann, so ist diese auch bei Geisteskranken hauptsächlich bei körperlichem Verfall, Cachexie, Marasmus zu finden, — freilich nicht nothwendig, denn es gibt auch hierbei verschiedene Resistenzfähigkeit, und Alter sowie lange Dauer müssen den Marasmus unterstützen.

Die Arbeit soll unter dem Titel „Ueber Rippenbrüchigkeit bei Geisteskranken“ in dem Archiv für Psychiatrie veröffentlicht werden. —

4. Die Untersuchungen über Schleimgewebe, über welche ich früher berichtet habe, sind von Herrn Dr. Levison

fortgeführt worden. Derselbe hat zunächst die Untersuchungen von Arndt größtentheils wiederholt und die gleichen Resultate erzielt, insbesondere auch bei einer Anzahl Geschwülste feststellen können, daß gallertiges Aussehen durchaus nicht schon auf Schleimgehalt schließen läßt und daß Schleim in der Intercellularsubstanz vorhanden sein kann, auch wenn das mikroskopische Aussehen nicht gallertig ist.

Demnächst wurde gallertig aussehendes Binde- und Fettgewebe verschiedener Herkunft untersucht. Myxödemhaut gab kein Resultat, ebensowenig das sehr gallertig aussehende Binde- und Fettgewebe aus der Umgebung eines tuberkulösen Kniegelenkes, ferner nicht das gallertig aussehende Nierenkapselfett bei Osteomyelitis mit Beckenphlegmone. Ungleiche Befunde ergab die Untersuchung sulzig-atrophischen Fettgewebes bei cachectischen Individuen: während bei einem Phthisiker mit Nephritis sowohl das Herz- wie das Mediastinal- und Knochenmarksfett überall Schleimfärbung ergab, wurde bei einem Magen- und Pankreaskrebs im Knochenmark viel, im Mediastinalfett viel weniger und im Herzfett fast keine Schleimfärbung erzielt.

Grade der letzte Fall ist schwer mit der Annahme zu vereinigen, daß etwa das Resultat abhängig sei von der Dauer der Cachexie, es muß deshalb die Untersuchung an größerem Material weiter fortgesetzt werden, um über die Ursachen und Bedingungen der schleimigen Umwandlung des Fettgewebes Klarheit zu schaffen. —

5. Als ich s. Z. die Angaben von Chiari[1]) über zapfenförmige Verlängerungen des Kleinhirns in den Wirbelkanal hinein bei congenitalem Hydrocephalus des Großhirns las, fiel mir sofort ein Fall von Conglomerattuberkel des Kleinhirns ein, bei dem ich ähnliches bemerkt hatte. Da fast gleichzeitig ein Fall von abgekapseltem Abscess im Occipito-temporallappen zur Sektion gelangte, bei welchem sehr schöne zapfenförmige Verlängerungen sichtbar waren, so beauftragte ich den jetzigen 2. Assistenten des Institutes, Herrn Dr. Ophüls, die Sammlung des Institutes bezüglich des Vorkommens solcher Mißstaltungen des Kleinhirns zu revidiren und bei künftigen Sektionen auf solche besonders zu achten. Da fanden sich denn bald noch andere Fälle (Abscesse, Tuberkel, Tumoren), bei welchen mehr oder weniger stark, symmetrisch oder asymmetrisch ähnliche Gestaltveränderungen vorhanden waren. Die Hauptkrank-

1) Denkschr. d. Wien. Akad. 63 Bd. 1895.

heit bestand hauptsächlich in Neubildungen bezw. Abscessen des Kleinhirns selbst oder doch der Nachbarschaft (Pons, Occipitotemporallappen), welche z. Th. von Hydro- oder Pyocephalus begleitet waren, z. Th. nicht. Die mikroskopische Untersuchung ergab in Uebereinstimmung mit den Angaben Chiari's keine constanten und charakteristischen Befunde. Chiari hat für seine Befunde angenommen, daß es sich nicht lediglich um eine passive Verdrängung der betreffenden Kleinhirntheile handele, sondern um ein aktives Hineinwachsen in den Wirbelkanal wegen Raummangels in der Schädelhöhle, und hat dafür angeführt, daß die zapfenförmigen Verlängerungen ausschließlich nur in Fällen von congenitalem Hydrocephalus des Großhirns getroffen wurden, also in solchen Fällen, in denen die Hydrocephalie so früh eingesetzt hatte, daß die Wachsthumsentwicklung des Kleinhirns bereits in frühen Stadien dadurch beeinträchtigt werden konnte. Für unsere Fälle trifft eine solche Erklärung nicht zu, denn es handelt sich um erwachsene Menschen, deren Leiden sicherlich in den meisten Fällen erst im späteren Verlaufe des Lebens entstanden war, so daß für unsere Beobachtungen eine rein passive Verschiebung angenommen werden muß. Die mikroskopischen Befunde sprechen nicht dagegen, denn abgesehen davon, daß Verschmälerungen der Markleisten, die als Folge mechanischer Einwirkungen angesehen werden können, bei den Mißstaltungen höheren Grades gefunden wurden, ist es ja bekannt, wie widerstandsfähig die Gehirnsubstanz gegenüber einem langsam sich entwickelnden Drucke ist.

Die Untersuchungen haben aber weiter ergeben, daß die Gestaltung der Unterfläche des kleinen Gehirns auch bei solchen Menschen, die keine Gehirnerkrankung haben, eine wechselnde ist, daß zapfenartige Verlängerung besonders der Tonsillen des Kleinhirns wenigstens andeutungsweise auch bei unverändertem Gehirn vorkommt, vielleicht in bestimmtem Zusammenhang mit besonderer Gestaltung der Schädelbasis, worüber Herr Ophüls später Weiteres berichten wird.

6. Von den 3 Inaugural Dissertationen, über welche ich nunmehr noch zu berichten habe, ist eine ebenfalls von Herrn Ophüls (Beiträge zur Kenntniß der Divertikelbildungen am Darmkanal, 1895) verfaßt. Derselbe berichtet über 3 Beobachtungen, deren erste multiple herniöse Divertikel des Dickdarms betrifft. Die Ausbuchtungen gingen hauptsächlich in die Appendices epiploicae hinein und besaßen eine ovale quergestellte Oeffnung. Von Muskulatur ist in den Ausbuchtungen die Längsmuskelschicht, wenn auch nur

sehr unvollständig erhalten; weder sie noch die Ringmuskelschicht zeigt Veränderungen, welche die Entstehung der Ausstülpungen erklären könnten, der Verf. meint daher, daß man an Besonderheiten der Bindegewebssepta zwischen den Muskelbündeln (Erschlaffung und Lockerung) denken müsse. Es ist eine eingehende Besprechung der Literatur angeschlossen. In dem zweiten Fall war bei einem 3 Monate alten Kinde wegen Prolaps des Darmes durch ein offenes Divertikel in der Frauenklinik die Laparotomie (mit tödtlichem Ausgang) gemacht und zugleich ein kleines tumorartiges Gebilde am Nabel exstirpirt worden. Dieses, von Schleimhaut überzogen, erwies sich als offenes Enteroteratom, dessen zottenlose Schleimhaut durch ihre Dicke, durch die Breite der Drüsenquerschnitte und die theilweise Verzweigung der Drüsen ausgezeichnet war, also mehr der Magenschleimhaut glich. An dem Rest des Divertikels war zwar auch die Dicke der Schleimhaut beträchtlicher, als an dem übrigen Darm, aber sie betrug doch nur $^1/_3$ von jener. Unter sorgfältiger Berücksichtigung der Litteratur kommt der Verf. zu dem Schluß, daß das magenähnliche Aussehen der Schleimhaut vieler Enteroteratome nicht nothwendig auf Entstehung aus dem Magen hinweist, sondern daß die Verschiedenheit der Befunde an jenen und Divertikeln durch die Annahme erklärt werden kann, daß die Enteroteratome aus Resten des Ductus vitello-intestinalis, die Divertikel secundär durch Zug aus dem Darmkanal hervorgehen. Ein dritter, durch eine Abbildung erläuterter Fall betrifft ein Divertikel, welches, in der Nähe des Nabels der vorderen Bauchwand adhärirend, mit weiter Oeffnung in die Bauchhöhle mündete, in der sich zwischen Peritoneum der vorderen Bauchwand und dem sehr verdickten Netz große Mengen von Meconium angehäuft hatten. Zur Erklärung des Befundes wird eine abnorme Insertion des Ductus vitello-intestinalis und Zerreißung des durch die mangelhafte Rückbildung des Ductus hervorgezerrten Darmdivertikels angenommen. —

7. H. Stamm, Ueber einen Fall von Arteriosclerose und multipler Aneurysmabildung 1896, — berichtet über den theils Operations-, theils Sektionsbefund bei einem im Anfang der 30er Jahre stehenden Manne: angeborene unvollständige Zweizipfligkeit der Aortenklappen mit chronischer Endocarditis, Hypertrophie des linken Ventrikels mit fettiger Degeneration, starke Sclerose und Atheromatose der Aorta, Verschluß der Art. crur. sin. nahe dem Durchtritt durch die Adductoren infolge einer vor langer Zeit stattgehabten Stichverletzung,

in dem oberen Theil des Gefäßes hintereinander zwei faustgroße Aneurysmen und allgemeine Erweiterung sowie starke Atheromatose der Curalis und Iliaca sinistra, geringe Arteriosclerose der Iliaca dextra im oberen Abschnitt. Der Verf. sieht in dem Falle eine Bestätigung der von Thoma herrührenden Angaben über die Beziehungen der Arteriosclerose und Aneurysmenbildung zu einander. Er hat sich denselben folgendermaßen zurechtgelegt: Der Patient litt infolge seines congenitalen Aortenklappenfehlers an einer Insufficienz der Aortenklappen und danach erfolgten Hypertrophie des linken Ventrikels. Durch diese entstand eine Steigerung des Blutdrucks im Arteriensystem, welche eine Dehnung der Tunica media zur Folge hatte, womit nach Thoma die Grundbedingung für das Auftreten der Arteriosclerose gegeben ist. Wahrscheinlich befanden sich nun schon bei dem Patienten verschiedene Theile des Arteriensystems in dem Stadium der diffusen Arteriosclerose als das Trauma — die Stichverletzung der Femoralis sinistra — erfolgte. Nach der nothwendigen Ligatur dieser Arterie blieb eine Contraction der Media, wie sie Thoma bei Amputationsstümpfen und Ligaturen von Arterien regelmäßig fand, aus infolge der hohen Steigerung des Blutdrucks im Arteriensystem und der daraus resultirenden Dehnung und herabgesetzten Leistungsfähigkeit der Media. Die Endarteriitis konnte bei ihrem langsamen Fortschreiten die Compensation nicht leisten und so kam es schließlich zur Bildung eines Aneurysmas und zwar, wie die mikroskopische Untersuchung der Wand desselben zeigte, zur Entstehung eines sackförmigen Dilatationsaneurysmas oberhalb der Verschlußstelle der Femoralis. Im Anschluß an dieses Aneurysma oder vielleicht auch gleichzeitig mit ihm hat sich dann unter den gleichen günstigen Bedingungen weiter oberhalb ein 2. Aneurysma gebildet, in welchem es schließlich nach Ausweis der ma- und mikroskopischen Untersuchung zur Zerreißung der Wand, zu einem Thoma'schen sackförmigen Rupturaneurysma kam. In der Art. iliaca sin., wo die Arteriosclerose wahrscheinlich schon in einem weiteren Stadium war, ist es dann zu einem diffusen Dilatationsaneurysma gekommen.

Zur Erläuterung und Stütze der Annahme einer Arteriosclerose durch angeborenen Aortenklappenfehler wird noch ein 2. Fall mitgetheilt. Bei einem ebenfalls im Beginn der 30er Jahre stehenden Manne war im Anschluß an eine Zweizipfligkeit der Aortenklappen mit Insufficienz eine starke Herzhypertrophie sowie eine ausgedehnte sclerotisch-atheromatöse Veränderung der Aorta entstanden. Daß im 1. Falle eine Aneurysmenbildung sich

hinzugesellte, ist auf die Complication durch das Trauma zurückzuführen.

8. Laupp hat in seiner Dissertation „Beiträge zur Pathologie des Pankreas, 1896, um die thatsächlichen Grundlagen für die erst noch genauer festzustellende Pathologie des Pankreas zu vermehren, das Beobachtungsmaterial des path. Institutes vom 1. April 1878 bis dahin 1896 gesichtet und die wichtigsten Beobachtungen zusammengestellt. Abgesehen von einigen Mißbildungen, einfachen Circulationsstörungen, der Induration bei congenitaler Syphilis und wenigen tuberkulösen Veränderungen, welche nur summarisch behandelt wurden, werden zunächst die (6) Fälle von Blutungen, Necrosen, Eiterung genauer mitgetheilt. Wie in anderen Beobachtungen, so zeigte sich auch bei den hiesigen der mittlere Theil des Pankreas als hauptsächlich bei den Necrosen, Blutungen etc. betheiligt. In Anlehnung an die Experimente von Hildebrand und Dettmer (Diss. Göttingen, 1895) untersucht der Verf. sein Material (die oben genannten Fälle und noch 6 andere) daraufhin, ob die Fettgewebsnecrosen von primären Veränderungen des Pankreas abhängig sein könnten. Die in 5 Fällen vorhandene Necrose etc. des Pankreas könnte vielleicht auch secundär entstanden sein, dagegen waren in 7 Fällen von der Fettgewebsnecrose sicherlich unabhängige Veränderungen vorhanden: 1 mal durch Perforation des Duodenum entstandener Absceß, 4 mal Krebs (dabei 3 mal Ranula pankreatica) und 2 mal fibröse Atrophie (mit Diabetes) des Pankreas, und nur in 1 Falle wurden keine gröberen Veränderungen am Pankreas bemerkt. Hier handelt es sich aber nur um kleine Fettgewebsnecrosen in und am Pankreas bei einem erst lange nach dem Tode secirten an Phthise verstorbenen Gefangenen, bei dem die Necrosen wohl agonale oder postmortale gewesen sein könnten, wofür auch spricht, daß allein bei diesem Falle keinerlei Blutungen vorhanden waren. Allerdings muß es als auffällig zugegeben werden, daß in den meisten Fällen von Krebs und Atrophie keine Fettgewebsnecrosen gefunden wurden — es scheint also hier noch ein unbekanntes Moment mitzuspielen — aber dadurch wird die Thatsache nicht umgestoßen, daß bei den Fettgewebsnecrosen der Regel nach schwere Pankreasveränderungen vorhanden sind, darunter häufig auch solche, welche nicht etwa durch die Fettgewebsnecrosen bedingt oder auch nur coordinirt mit ihnen entstanden sind. Die neben den Fettnecrosen gefundenen Blutungen waren bald nur klein, collateral um die necrotischen Heerde herum, bald größer, besonders in und neben dem Pankreas;

in 1 Falle wurde ein Ast der Arter. lienal. eröffnet gefunden, aus dem sich Blut in die Bursa omentalis entleert hatte. Wie gewöhnlich fanden sich die Pankreasnecrosen, Blutungen etc. bei kräftigen, fetten Individuen, in z. Th. noch jungen Jahren (27 Jahre), die plötzlich erkrankten und innerhalb weniger Tage oder Wochen starben. Für die hervorgetretenen Ileuserscheinungen fand sich häufig eine mechanische Erklärung nicht.

In dem nächsten Kapitel werden die Krebsfälle zusammengestellt, 19 Fälle von primärem, 13 von secundärem Krebs. Der primäre Krebs hatte 15 mal seinen Sitz im Kopf der Drüse, 1 mal war das ganze Organ ergriffen; Metastasen zeigten sich in den verschiedensten Organen, eine Neigung zur Verbreitung in die Nachbarschaft trat nicht hervor. Auffällig war das Vorkommen schon bei relativ jugendlichen Personen (von 21, 30, 41 Jahren), besonders weiblichen. Unter den 13 secundären Krebsen befanden sich nur 2 von entfernteren Organen her metastasirt (1 von Bronchialkrebs, 1 von Chorionkrebs), sonst handelte es sich um Krebse der Nachbarschaft (Magen, Duodenum, Gallenwege).

In 9 Fällen war ein Verschluß des Drüsenganges mit secundärer Stauungserweiterung des peripherischen Theiles vorhanden, wodurch 1 mal im Schwanztheil sich eine orangengroße Cyste gebildet hatte. In diesem wie in 7 anderen Fällen saß dabei der Krebs im Kopftheil. Im Anschluß an die Ausdehnung des Ganges hatte sich eine Induration und Atrophie des Drüsengewebes entwickelt, deren secundäre Natur besonders in 1 Fall hervortrat, bei dem ein Theil der Drüse, dessen Ausführungsgang nicht erweitert war, auch von Atrophie frei geblieben war. Solche Atrophie wurde auch noch in 10 Fällen ohne Krebs gesehen, welche im folgenden Kapitel mitgetheilt sind. Dreimal war auch hier eine Stauungsdilatation der Ausführungsgänge (2 mal in Folge von Steinbildung) vorhanden, in den 7 übrig bleibenden Fällen aber fehlte jede Stauung und Gangerweiterung, es handelte sich also um primäre Atrophie, bei der die Verkleinerung weniger im Längs- als im Dickendurchmesser in die Erscheinung trat. Die mikroskopischen Befunde waren aber in diesen, wie in den secundären Atrophien durch Secret-Stauung in Folge von Stein- oder Krebsbildung nicht wesentlich verschieden: Schwund der Drüsenläppchen, Vermehrung des Bindegewebes; nur 1 mal war an Stelle des Bindegewebes Fettgewebe getreten.

Bei allen primären Atrophien war Diabetes vorhanden, deshalb werden im Anschluß an sie in einem letzten Kapitel die sämmtlichen Diabetesfälle, soweit sie mit Pankreasveränderungen

verbunden waren, zusammengestellt. Es waren ihrer 12, 7 mit einfacher Atrophie, 3, darunter 1 zweifelhafter Fall, bei secundärer Atrophie durch Gangausweitung, 1 bei Lipomatosis, wobei Fett im interstitiellen Gewebe sowie, z. Th. in großen Tropfen, in den Drüsenzellen vorhanden war, und endlich 1 vermuthlich ähnlicher, bei dem das Protokoll ohne weitere Ausführung das Pankreas als fettig bezeichnet. Als Regel ergiebt sich also Atrophie, deren Grad allerdings sehr wechselnd war, als Diabetesveränderung, Atrophie theils primärer theils secundärer Natur. Auffällig ist dabei, daß bei keinem der 6 Krebsfälle mit Atrophie des Pankreas, obgleich die Befunde sich besonders von jenen mit Steinatrophie in keiner Weise unterschieden, Diabetes aufgetreten war.

Eine neue Methode zur Untersuchung der Wärmeleitung in Krystallen. I. Abhandlung.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 24. October 1896.

Die de Senarmont'sche Methode [1]) zur Bestimmung der relativen Größen der Hauptleitfähigkeiten und der Lage der Leitfähigkeitsaxen für die Wärme in Krystallen ist unübertrefflich an principieller Einfachheit und überall da ausreichend, wo es sich nur um eine ungefähre Orientirung handelt; aber sie versagt, wenn genaue Resultate abgeleitet werden sollen. Hierbei kommt zunächst die fast immer vorhandene Unmöglichkeit in Betracht, die Grundvoraussetzungen der Theorie zu erfüllen; denn die Isothermen auf einer von einem Punkte aus erwärmten Krystall-Platte stellen nur dann Ellipsen dar, deren Hauptaxen den Wurzeln aus den Hauptleitfähigkeiten proportional sind, wenn die Platte sehr — streng unendlich — groß gegen die Isotherme und diese wieder sehr — streng unendlich — groß gegen die Dicke der Platte ist. Sucht man aber diese Annahme dadurch zu erfüllen, daß man die Dicke der Platte so klein wählt, als technisch möglich, so entsteht eine neue wesentliche Fehlerquelle durch die Betheiligung der auf der Platte zum Zwecke der Darstellung der Isothermen aufgetragenen Wachsschicht an dem ganzen Vorgang; denn wenn auch die Leitfähigkeit dieser Schicht klein genug wäre, um außer Betracht bleiben zu können, so würde doch jedenfalls ihre sehr beträchtliche Schmelzwärme in's Gewicht fallen und, wie man leicht sieht, bewirken, daß die Axen der Isothermen weniger von einander differiren, als es ohne die Anwesenheit der Wachsschicht stattfinden würde [2]).

---

1) H. de Senarmont, C. R. 25, 459, 707, 1847.

2) Daß das hier und da angepriesene Verfahren, Isothermen, statt auf dünnen Platten, auf natürlichen Krystallflächen hervorzubringen, aus theoretischen

Außer diesen theoretischen stehen auch practische Schwierigkeiten der Anwendung der de Senarmont'schen Methode zu exacten Bestimmungen entgegen. Die meßbaren Radien der Isothermen sind den Wurzeln aus den Hauptleitungsconstanten proportional; hieraus folgt die relative Unsicherheit des gesuchten Quotienten dieser Constanten gleich der doppelten Summe der relativen Unsicherheiten der Messungen der Radien, und das ist ein ungünstiges Verhältniß. Die Bestimmung der Richtungen der Leitfähigkeitsaxen macht sich noch unvortheilhafter, da diese Axen mit den maximalen, resp. minimalen, Durchmessern der Isothermen identisch sind, und deren Richtung keineswegs scharf ausgeprägt ist.

Hiernach dürfte eine neue Methode zur Erreichung des von de Senarmont verfolgten Zieles, welche die genannten Uebelstände vermeidet und überdies mit weniger Material auskommt, nicht überflüssig sein. Ihre Auseinandersetzung und die Mittheilung der mit ihrer Hülfe erhaltenen Resultate bildet den Gegenstand dieser Arbeiten.

I. Theorie der Methode.

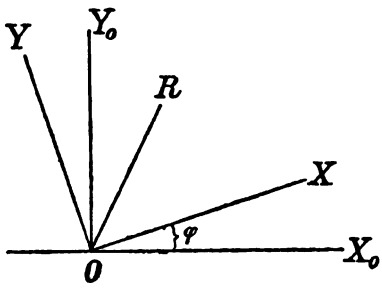


Fig. 1.

Wir führen ein Coordinatensystem X_0, Y_0, Z_0 ein, dessen Axen mit den Leitfähigkeitsaxen zusammenfallen, daneben ein System X, Y, Z, das gegen das erstere um einen Winkel φ im positiven Sinne um die gemeinsame Z-Axe gedreht ist. Wir setzen zunächst einen Krystall ohne rotatorische Qualität voraus und schreiben demgemäß für die Komponenten u_0, v_0, w_0 der Wärmeströmung nach dem ersten Axensystem

$$1) \qquad -u_0 = \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial x_0}, \quad -v_0 = \lambda_2 \frac{\partial \tau}{\partial y_0}, \quad -w_0 = \lambda_3 \frac{\partial \tau}{\partial z_0},$$

und für die u, v, w nach dem zweiten

$$2) \quad -u = \lambda_{11} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad -v = \lambda_{21} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad -w = \lambda_3 \frac{\partial \tau}{\partial z}.$$

Gründen zu nummerischen Bestimmungen durchaus ungeeignet ist, mag nur beiläufig erwähnt werden. Die von Röntgen (Pogg. Ann. 151, 603, 1874) angegebene Methode, die auf behauchte Platten gestreutes Lykopodium benutzt, gestattet wegen der beträchtlichen Größe der Lykopodiumkörner keine scharfen Messungen.

Hier ist dann τ die Temperatur und

$$3) \qquad \lambda_{11} = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi, \quad \lambda_{22} = \lambda_1 \sin^2\varphi + \lambda_2 \cos^2\varphi,$$
$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = -(\lambda_1 - \lambda_2) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Wird nun insbesondere eine Wärmeströmung (I) erzeugt, die keine Komponente nach der X-Axe giebt, so gilt für dieselbe

$$4) \qquad 0 = \lambda_{11} \frac{\partial\tau}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial\tau}{\partial y};$$

wird eine Strömung (II) erzeugt, die keine Komponente nach der Y-Axe liefert, so entspricht dieser

$$5) \qquad 0 = \lambda_{21} \frac{\partial\tau}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial\tau}{\partial y}.$$

In der XY-Ebene gehören dann der Strömung (I) Isothermen zu, deren — stets kleiner — Neigungswinkel gegen die X-Axe die Tangente α hat, gegeben durch

$$6) \qquad \alpha = \frac{\partial\tau}{\partial x} \Big/ \frac{\partial\tau}{\partial y} = -\lambda_{12}/\lambda_{11};$$

der Strömung (II) entsprechen solche, deren Neigungswinkel gegen die Y-Axe die Tangente β hat, bestimmt durch

$$7) \qquad \beta = \frac{\partial\tau}{\partial y} \Big/ \frac{\partial\tau}{\partial x} = -\lambda_{21}/\lambda_{22}.$$

Dabei sind die Tangenten, resp. die zugehörigen Winkel positiv, wenn die Richtungen der Isothermen in dem zweiten und vierten Quadranten liegen.

Setzen wir die Werthe der λ_{ik} aus (3) ein, so ergiebt sich

$$8) \qquad \alpha = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\sin 2\varphi}{(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\cos 2\varphi} = \frac{\varkappa\sigma}{1 + \varkappa\gamma},$$

$$8') \qquad \beta = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\sin 2\varphi}{(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)\cos 2\varphi} = \frac{\varkappa\sigma}{1 - \varkappa\gamma},$$

wobei

$$9) \qquad \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \varkappa, \quad \cos 2\varphi = \gamma, \quad \sin 2\varphi = \sigma$$

gesetzt ist.

Schließlich betrachten wir noch eine Strömung (III) parallel einer Richtung R, die um 45^0 gegen die $+X$- und $+Y$-Richtung geneigt ist; für die Tangente ε des Winkels, den die ihr entsprechende Isotherme gegen die zu R normale Richtung im Qua-

dranten $+X$, $-Y$ einschließt, erhält man aus (8)

$$10) \qquad \varepsilon = \frac{-(\lambda_1-\lambda_2)\cos 2\varphi}{(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)\sin 2\varphi} = \frac{-\varkappa\gamma}{1+\varkappa\sigma}.$$

Dabei ist ε in demselben Sinne zu zählen, wie α. —

Von diesen Resultaten machen wir nunmehr verschiedene Anwendungen.

Erstens sei ein Krystall vorausgesetzt, dessen thermische Leitfähigkeitsaxen X_0, Y_0, Z_0 gemäß der physikalischen Symmetrie des Krystalles ihrer Richtung nach sämmtlich bekannt sind.

Wir schneiden aus ihm eine Platte einer thermischen Symmetrieebene $X_0 Y_0$ parallel und bringen in ihr eine Wärmeströmung hervor, die keine Komponente nach der um den Winkel φ gegen die Hauptaxe X_0 geneigten X-Axe besitzt; dann liefert, wenn α und φ als meßbar vorausgesetzt werden, die Formel (8) unmittelbar die Bestimmung von $\varkappa$ laut

$$11) \qquad \varkappa = \frac{\alpha}{\sigma-\alpha\gamma}.$$

Zweitens sei ein Krystall vorausgesetzt, an dem wenigstens die eine thermische Symmetrieebene $X_0 Y_0$ nach Symmetrie angebbar ist.

Wir schneiden dann aus ihm abermals eine Platte dieser Symmetrieebene parallel und bringen die Strömungen (I) resp. (II) hervor, die keine Komponente nach der wie oben festgelegten, aber willkürlichen X-, resp. Y-Axe haben; dann folgt, wenn wir α und β als meßbar annehmen, aus (8) und (8′)

$$12') \qquad \varkappa^2 = \frac{4\alpha^2\beta^2+(\beta-\alpha)^2}{(\beta+\alpha)^2}, \quad \frac{\sigma}{\gamma} = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}.$$

Bringen wir dagegen die obigen Strömungen (I) und (III) hervor und betrachten α und ε als meßbar, so folgt aus (8) und (10)

$$12) \qquad \varkappa^2 = \frac{\varepsilon^2(1+\alpha)^2+\alpha^2(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon\alpha)^2}, \quad \frac{\sigma}{\gamma} = \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\alpha(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1+\alpha)}.$$

Es bestimmt sich somit in den letzten beiden Fällen zugleich die für das Verhältniß der Hauptleitfähigkeiten λ_1/λ_2 characteristische Größe $\varkappa$ und der Richtungswinkel φ der Hauptaxen X_0, Y_0 gegen die willkürlich gewählten X, Y. —

Um nun eine Strömung in einer gewünschten, zunächst beliebigen Richtung R' hervorzubringen und den Winkel der Isotherme gegen die dazu normale Richtung zu messen, verfahren wir folgendermaßen.

Wir geben der zur $X_0 Y_0$-Ebene parallelen Platte rechteckige Gestalt, die Kanten normal und parallel zu der bestimmten Richtung R', wir halbiren die Platte durch einen zu R' parallelen Schnitt und kitten die beiden Theile wieder zusammen, nachdem wir den einen um die Normale zu jenem Schnitt um 180^0 gedreht haben. Für die so erhaltene Zwillingsplatte (s. Figur 2) ist der Schnitt eine Symmetrieebene. Bringen wir also die eine der zu R' normalen Schmalseiten, z. B. $\overline{ad}$, in Berührung mit einem Körper von konstanter Temperatur, und tragen wir Sorge, daß auch im Uebrigen die äußern Verhältnisse zur Schnittfläche $\overline{ef}$ symmetrisch sind, so muß die Wärmeströmung in der Nähe des Schnittes diesem parallel verlaufen, also ihre in der Plattenebene gelegene Komponente normal zu R' verschwinden. Die ihr entsprechenden Isothermen auf der Platte müssen daher in der Schnittlinie unter einem Winkel ω' zusammenstoßen, der das Doppelte von dem ist, dessen Tangente oben eingeführt wurde.

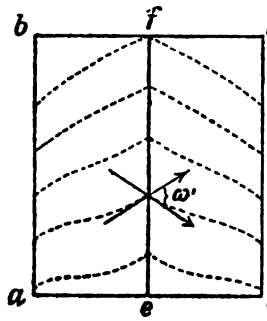


Fig. 2.

Fällt R' mit der Y-Axe zusammen, so mag dieser Winkel ψ heißen, und es gilt dann

$$13) \qquad \alpha = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\varkappa\sigma}{1+\varkappa\gamma};$$

fällt R' mit der X-Axe zusammen, so sei er mit χ bezeichnet, und es gilt

$$14') \qquad \beta = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\chi = \frac{\varkappa\sigma}{1-\varkappa\gamma};$$

fällt R' in die Mitte zwischen $+X$ und $+Y$, also in das früher sogenannte R (Fig. 1), so heiße er ω, und es gilt

$$14) \qquad \varepsilon = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega = \frac{-\varkappa\gamma}{1+\varkappa\sigma}.$$

Die Lösung der gestellten Aufgabe ist hierdurch auf die Messung der Winkel ψ, χ und ω zurückgeführt, über deren practische Ausführung weiter unten zu sprechen sein wird. —

Hier seien zunächst die theoretischen Vorzüge der entwickelten Methode hervorgehoben.

Als erster Vortheil ist geltend zu machen, daß die Voraussetzungen der Theorie mit voller Strenge durch das Experiment zu verificiren sind; es wird keine unendlich große und unendlich

dünne Platte verlangt, die Wahl der Dimensionen kann vielmehr ausschließlich nach practischen Gesichtspunkten erfolgen. Auch giebt eine etwa zur Darstellung der Isothermen auf die Oberfläche der Platte gebrachte fremde Schicht nicht Veranlassung zu Fehlern, denn die obige Entwicklung erleidet durch eine solche keine Veränderung.

Als zweiter Vortheil kommt das günstige Verhältniß in Betracht, in dem die gemessenen Größen zu den eigentlich zu bestimmenden stehen. Betrachten wir den oben als ersten genannten Fall, und lassen wir den Winkel $\frac{1}{2}\psi$ klein sein, so nimmt die Gleichung (11) die Gestalt an

15) $$\varkappa = \frac{\psi}{2\sigma - \psi\gamma}.$$

Für die Beobachtungen wählen wir aus später zu erörternden Gründen zumeist $\varphi = \pm 45^0$, also $\gamma = 0$, $\sigma = \pm 1$, erhalten somit noch einfacher

16) $$\varkappa = \pm \tfrac{1}{2}\psi,$$

und nach (9) bei Einführung der Abkürzung π

17) $$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \pi = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} = \frac{2 \mp \psi}{2 \pm \psi}.$$

Hieraus ergiebt sich aber durch logarithmisches Differentiiren

$$\frac{\delta\pi}{\pi} = \mp \frac{4\delta\psi}{4 - \psi^2},$$

und bei Vernachlässigung von ψ^2 neben 4

$$\frac{\delta\pi}{\pi} = \mp \delta\psi.$$

Die relative Unsicherheit $\delta\pi/\pi$ von π ist somit gleich der absoluten Unsicherheit $\delta\psi$ von ψ. Es bietet nun keine Schwierigkeit, ψ bis auf $\frac{1}{2}^0$ genau zu bestimmen; die Methode giebt dann für λ_2/λ_1 bereits eine kleinere Unsicherheit, als 1 % — unter günstigen Umständen kann man aber die Genauigkeit noch weiter treiben.

Bedenkt man, daß, ganz abgesehen von der Frage, ob ihre Theorie bis auf solche Größen richtig ist, bei der älteren Methode, um λ_2/λ_1 bis auf 1 % genau zu erhalten, die beiden Axen der Isotherme bis auf 1/400 genau gemessen werden müssen, so erkennt man leicht den Vorzug des neuen Verfahrens.

Ein weiterer Vortheil tritt hervor, wenn man die Orientirung der Doppelplatte, d. h. also, den Winkel φ bestimmt, bei welchem ψ möglichst groß wird; man findet für denselben nämlich

$$\gamma = \cos 2\varphi = -\varkappa.$$

Da $\varkappa$ nach seiner Bedeutung in Wirklichkeit immer eine kleine Zahl ist, so ergiebt sich für φ nahezu der Betrag $\pm 45^0$; dieser Werth ist bereits oben vorausgesetzt; jetzt erkennt man, daß er keineswegs sehr genau erreicht zu sein braucht, um dennoch die obigen Formeln anwenden zu dürfen.

Um für quadratische und hexagonale Krystalle die Verhältnisse der Hauptleitungsfähigkeiten zu bestimmen, braucht man nur eine Doppelplatte parallel einem Hauptschnitt; bei rhombischen Krystallen bedarf es deren zwei, die verschiedenen Symmetrieebenen parallel liegen. —

In dem zweiten Fall, daß nicht alle drei thermischen Symmetrieaxen, sondern nur eine Symmetrieebene an dem Krystall ausgeprägt ist, liegen die Verhältnisse natürlich ungünstiger; speciell übersieht man leicht direct, und die Discussion der Formeln (12′) bestätigt es, daß, wenn man, wie zunächstliegend, zwei der Symmetrieebene parallele und normal zueinander orientirte Doppelplatten benutzt, die Anforderungen genauer Bestimmung von $\varkappa$ und von φ sich derart widersprechen, daß sie gleichzeitig nicht erfüllbar sind.

Dagegen liefert die Anwendung zweier derartiger um 45^0 gegeneinander verdrehter Präparate eine sehr leistungsfähige Methode.

Zu ihrer Discussion nehmen wir wiederum die meßbaren Winkel ψ und ω der Isothermen als klein an und erhalten bei Vernachlässigung der Größen zweiter Ordnung aus (12)

$$18) \qquad \varkappa^2 = \frac{1}{16}(\omega^2(2+\psi)^2 + \psi^2(2-\omega)^2), \quad \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\psi(2-\omega)}{\omega(2+\psi)};$$

bei Vernachlässigung der ersten Ordnung folgt noch einfacher

$$19) \qquad \varkappa^2 = \tfrac{1}{4}(\omega^2+\psi^2), \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\psi}{\omega}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$20) \qquad \begin{aligned} \frac{\delta\varkappa}{\varkappa} &= \frac{\omega\delta\omega+\psi\delta\psi}{\omega^2+\psi^2} = \frac{\delta\omega}{\omega}\cdot\frac{\omega^2}{\omega^2+\psi^2} + \frac{\delta\psi}{\psi}\cdot\frac{\psi^2}{\omega^2+\psi^2}, \\ 2\delta\varphi &= \frac{\omega\delta\psi-\psi\delta\omega}{\omega^2+\psi^2} = \left(\frac{\delta\psi}{\psi}-\frac{\delta\omega}{\omega}\right)\frac{\omega\psi}{\omega^2+\psi^2}, \end{aligned}$$

und dies zeigt, daß die relative Unsicherheit von $\varkappa$ von der Ordnung der relativen Unsicherheiten von ψ und ω und die absolute Unsicherheit von φ halb so groß ist. Daß die letztere Größe mit gleichzeitig abnehmendem ω und ψ rapid zunimmt, liegt in der Natur der Sache; bei gleichzeitig verschwindenden ω und ψ, d. h., wenn der Krystall zu einem isotropen Körper degenerirt, wird ja die Richtung der Leitfähigkeitsaxen vollständig unbestimmt.

Im Vorstehenden ist stillschweigend angenommen, daß ψ und ω, demgemäß auch $\delta\psi/\psi$ und $\delta\omega/\omega$ von gleicher Größenordnung sind. Es ist aber bemerkenswerth, daß, wenn, was leicht eintreten kann, eine der beiden Größen, z. B. ψ, sehr klein gegen die andere, also ω, ist, während $\delta\psi$ und $\delta\omega$ von gleicher Ordnung bleiben, dadurch die Genauigkeit von $\varkappa$ und φ nicht berührt wird; denn die letzten Formeln reduciren sich dann auf

$$\frac{\delta\varkappa}{\varkappa} = \frac{\delta\omega}{\omega}, \quad 2\delta\varphi = \frac{\delta\psi}{\omega}.$$

Wegen

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \pi = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$$

erhält man übrigens auch noch aus (20) bei, wie vorausgesetzt, kleinem $\varkappa$

21) $$\frac{\delta\pi}{\pi} = -\frac{(\omega\delta\omega + \psi\delta\psi)}{\sqrt{\omega^2+\psi^2}},$$

woraus wie S. 241 die sehr günstige Bestimmung der eigentlich gesuchten Größe λ_2/λ_1 durch die Winkel ω und ψ ersichtlich wird.

Die neue Methode erfordert in dem betrachteten zweiten Falle zur bloßen Bestimmung der Verhältnisse in der Symmetrieebene zwei Platten, wo die alte mit nur einer auskam; da aber die hier verlangten Platten nur klein zu sein brauchen, und von Krystallen ungleich leichter mehrere kleinere Präparate beschafft werden können, als ein größeres, so ist das kein irgend erheblicher Nachtheil.

Sind die Größen der beiden Hauptleitfähigkeiten und die Lage der Leitfähigkeitsaxen in der Symmetrieebene gefunden, so geschieht die Bestimmung der Verhältnisse der dritten Hauptleitfähigkeit zu den beiden ersteren nach dem oben Gesagten mit Hülfe einer normal zu der Symmetrieebene durch zwei Axen gelegten Doppelplatte. —

Bisher sind Krystalle mit rotatorischen Qualitäten ausdrücklich ausgeschlossen worden; die Methode scheint aber geeignet, auch die Frage nach der Existenz solcher Eigenschaften ein Stück

zu fördern. Herr Ch. Soret[1]) konnte zwar die rotatorischen Glieder in den Wärmeleitungsgleichungen bei Apatit, Dolomit, Gyps und Erythrit mit seinen Mitteln nicht nachweisen; dieselben sind somit jedenfalls sehr klein und meist zu vernachlässigen, aber es ist nicht ausgeschlossen, daß feinere Hülfsmittel ihr Vorhandensein dennoch aufdecken. Eine solche Untersuchung hat ein hohes theoretisches Interesse; denn wenn die Anwendung der feinsten verfügbaren Mittel gleichfalls ein negatives Resultat ergiebt, so wird man nach Gesichtspunkten suchen müssen, die Theorie der Wärmeleitung so zu verändern, daß sie rotatorische Qualitäten als unmöglich erscheinen läßt.

Daß die von Herrn Soret angewandten Methoden nicht das äußerste bisher erreichbare Maß von Schärfe besitzen, spricht er selbst aus, indem er an einer Stelle die Unsicherheit seiner Messungen auf $^1/_{30}$ bis $^1/_{50}$ schätzt. Sein erstes Verfahren, eine Gypsplatte längs einer Geraden zu zerschneiden, die Hälften in einem sehr kleinen Abstand wieder zusammenzufügen, zwei Punkte zu beiden Seiten dieses Spaltes zu Wärmequellen zu machen und den Verlauf der Isothermen nach dem de Senarmont'schen Verfahren längs des Spaltes zu verfolgen, ist auch principiell nicht unbedenklich, da keinerlei Veranlassung vorliegt, die Wärmeströmung nächst dem Spalt als diesem parallel anzusehen; und doch ist dies die Voraussetzung für das Eintreten einer Unstetigkeit der Isothermen. Sein zweites Verfahren, Isothermen auf den natürlichen Flächen gewisser Krystalle hervorzubringen, die nach Symmetrie rotatorische Qualitäten besitzen können, und ihre Symmetrieverhältnisse messend zu untersuchen, erweist sich dadurch als wenig scharf, daß es auch diejenige Dissymmetrie, die ohne rotatorische Einflüsse auftreten muß, nicht aufzudecken vermocht hat.

In der That, schreiben wir für einen einaxigen Krystall, dessen Hauptaxe wir zur Z_0-Axe wählen, die Ausdrücke für die Strömungscomponenten der Wärme

$$22) \qquad u_0 = \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial x_0} - \lambda \frac{\partial \tau}{\partial y_0}, \quad v_0 = \lambda \frac{\partial \tau}{\partial x_0} + \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial y_0}, \quad w_0 = \lambda_2 \frac{\partial \tau}{\partial z_0},$$

führen wir ein zweites Koordinatensystem Ξ, H, Z nach dem Schema

23)

	Ξ	H	Z
X_0	α_1	α_2	α_3
Y_0	β_1	β_2	β_3
Z_0	γ_1	γ_2	γ_3

1) Ch. Soret, Arch. de Genève. 29, No. 4, 1893; 32, No. 12, 1894.

ein, so wird die Komponente ω nach der Richtung von ξ gegeben sein durch

$$24) \quad \begin{aligned} \omega = {} & ((\lambda_3 - \lambda_1)\gamma_1\gamma_3 - \lambda\gamma_2)\frac{\partial\tau}{\partial\xi} + ((\lambda_3 - \lambda_2)\gamma_2\gamma_3 + \lambda\gamma_1)\frac{\partial\tau}{\partial\eta} \\ & + ((\lambda_3 - \lambda_1)\gamma_3^2 + \lambda_1)\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}. \end{aligned}$$

Ist dann die ΞH-Ebene die Begrenzungsfläche des Krystalles, und ist λ' die Konstante der äußeren Leitfähigkeit, so gilt für $\xi = 0$

$$25) \quad \bar{\omega} + \lambda'\bar{\tau} = 0,$$

d. h., wenn man zur Vereinfachung die ΞZ-Ebene in den Hauptschnitt $X_0 Z_0$ legt, also $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = -\alpha_3$ macht:

$$26) \quad 0 = \lambda'\bar{\tau} - (\lambda_3 - \lambda_1)\alpha_3\gamma_3\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\xi} - \lambda\alpha_3\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\eta} + (\lambda_1\alpha_3^2 + \lambda_3\gamma_3^2)\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\zeta}.$$

Diese Formel zeigt aber, daß, falls nur γ_3 nicht verschwindet, die Isothermen ebensowohl in Bezug auf die Ξ- wie in Bezug auf die H-Axe unsymmetrisch sind. Wenn somit, wie Herr Soret sagt, bei Dolomit die Beobachtung auf einer Rhomboëderfläche keinerlei Dissymmetrie der Isothermen ergab, so ist auch die Wirkung des zweiten Gliedes dieser Formel unmerklich gewesen; so wenig aber dieses factisch gleich Null war, so wenig wird man das Verschwinden des dritten als befriedigend erwiesen ansehen können.

Es erscheint somit wünschenswerth, Hülfsmittel von größerer Schärfe zur Entscheidung der Frage heranzuziehen, und die vorstehend auseinander gesetzte und theoretisch durchaus sichergestellte Methode dürfte dergleichen bieten, wenn es gelingt, ein für feine Beobachtungen genügend homogenes Material aufzutreiben, — was mir, beiläufig gesagt, noch nicht ganz geglückt ist.

Bleiben wir bei einem optisch einaxigen Krystall stehen, so gilt für eine der oben vorausgesetzten, normal zur Hauptaxe geschnittenen künstlichen Zwillingsplatten statt (13) nach (22) die Formel

$$27) \quad \alpha = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi = \frac{\lambda}{\lambda_1};$$

es bedarf also keiner meßbaren Größe, sondern nur eben der Wahrnehmbarkeit eines Knickes im Verlauf der Isotherme, um die Existenz der rotatorischen Konstante λ nachzuweisen. Zur Feststellung eines solchen stehen aber in den Thermoketten Hülfsmittel von fast beliebiger Empfindlichkeit zur Verfügung, sodaß, wie gesagt, nur

die Beschaffung des Beobachtungsmateriales ernstere Schwierigkeiten bietet.

Ich hoffe, aber auch diese mit der Zeit überwinden zu können.

II. Anordnung der Beobachtungen.

Die Herstellung der Präparate für die Untersuchung der Wärmeleitung nach der oben auseinandergesetzten Methode wird man natürlich einem technischen Institute überlassen; die von mir benutzten Platten hat die Firma Dr. Steeg und Reuter in Bad Homburg in sehr vollkommener Weise ausgeführt.

Bei der Bearbeitung optisch einaxiger Krystalle ist die äußerste Sorgfalt bezüglich der Einhaltung der theoretisch vorausgesetzten Orientirung nicht nöthig; kleine Abweichungen der Plattenebene vom Hauptschnitt, und des Zwillingsschnittes von der Neigung 45° gegen die Hauptaxe wirken auf das Endresultat nur in einem Gliede zweiter Ordnung. Dasselbe gilt bezüglich der Krystalle des rhombischen Systemes. Bei monoklinen Krystallen sind kleine Abweichungen der Platten aus der Symmetrieebene gleichfalls unbedenklich, dagegen ist die genaue Bestimmung der Lage der Zwillingsschnitte Vorbedingung für ein zuverlässiges Resultat. Weicht die gegenseitige Orientirung der beiden Platten merklich von 45° ab, so sind complicirtere, übrigens aus (8) leicht zu gewinnende Formeln an Stelle von (18) anzuwenden.

Was die Dimensionen der Präparate angeht, so wird hierbei das verfügbare Material in erster Linie bestimmend wirken; jedenfalls sind schon Platten von 6—8 mm Kantenlänge und 1—2 mm Dicke recht wohl zu Messungen geeignet.

Wesentlich für die Genauigkeit der Beobachtungen ist, daß der verkittete Schnitt sich auf der Oberfläche des Präparates nur als eine sehr feine Linie, und nicht etwa als eine Rille markirt. —

Um die Isothermen auf den zu beobachtenden Platten darzustellen, erwies sich der bei Anwendung der de Senarmont'schen Methode gewöhnlich benutzte Ueberzug derselben mit einem Gemisch von Wachs und Terpentin als nicht ganz vortheilhaft. Ein solches Gemisch hat keinen scharf definirten Schmelzpunkt, und in Folge dessen ist auch die Grenze, bis zu der die Schmelzung auf solch einem Ueberzug fortschreitet, nicht scharf ausgeprägt. Die Beobachtung aber an den schärfer bezeichneten inneren Rand des kleinen, aus der geschmolzenen Substanz gebildeten Walles anzuknüpfen, wie mehrfach gerathen worden, ist bedenklich, weil diese

Linie wahrscheinlich gar keine Isotherme ist[1]) und jedenfalls häufig die von der Theorie gegebene Unstetigkeit an der Grenze der beiden Plattenhälften in abgerundeter Form zeigt.

Will man mit dem Wachs-Terpentin-Gemisch operiren, so empfiehlt es sich nach meiner Erfahrung, die Beobachtungen an eine eigenthümliche Grenzlinie anzuknüpfen, die auf dem genannten Wall nahe dessen äußerem Rande ein mehr und ein minder durchsichtiges Gebiet scheidet. Diese Linie bezeichnet wahrscheinlich die Schmelzgrenze eines Bestandtheiles des sehr complicirten Gemisches; sie ist gut ausgeprägt und zeigt, wenn der Ueberzug, und daher auch der Wall, nicht zu dick ist, die Unstetigkeit sehr sauber.

Um eine noch schärfer markirte Schmelzgrenze zu erhalten, habe ich Versuche mit verschiedenen reinen organischen Substanzen mit niedrigem Schmelzpunkt angestellt, die mir durch das Entgegenkommen meines verehrten Collegen Prof. Wallach zur Verfügung standen. Der Erfolg war ein negativer: die Körper benetzten entweder im geschmolzenen Zustand die Krystallpräparate überhaupt nicht und ließen sich somit nicht in dünner Schicht auftragen, oder sie erstarrten grob krystallinisch und ergaben demnach ganz unregelmäßige, gezackte Schmelzcurven.

Sehr brauchbar erwies sich Elaidinsäure mit einem Zusatz des Wachsterpentingemisches, dessen Betrag je nach der Benetzbarkeit des benutzten Krystalles von 0,1 bis fast 0,5 ihres Volumens variirte; namentlich, wo ein geringer Zusatz genügt, werden die Grenzcurven tadellos und markiren sich im durchgehenden Lichte als dunkele, im reflectirten als helle, scharf begrenzte Linien. Aber Elaidinsäure ist ein ziemlich theures Präparat, und wenn ich es gleich zu meinen Messungen meistens benutzt habe, so bleibt es doch wünschenswerth, noch andere Hülfsmittel aufzufinden, um die auseinandergesetzte Methode einzubürgern. —

Mit welcher Substanz man aber operiren möge, Vorbedingung des Erfolges bleibt größte Sorgfalt betreffs der Fernhaltung von Staub, da jedes eingeschmolzene fremde Theilchen durch Capillarität die flüssige Substanz an sich zieht und die Schmelzcurven verzerrt, soweit sie ihm nahe liegen. Daher gebietet es sich, das

1) Vermuthlich wird die Breite des Walles durch die Oberflächenspannung der geschmolzenen Substanz bestimmt und ist sonach bei den elliptischen Isothermen der de Senarmont'schen Methode ringsum nahe constant. Dann ist aber jedenfalls der innere Rand keine Isotherme, und die an ihm angestellten Messungen müssen das Axenverhältniß mehr von Eins abweichend ergeben, als richtig.

hergestellte Gemisch heiß zu filtriren und sorgsam bedeckt zu halten, auch den zum Auftragen dienenden Pinsel öfter durch Auswaschen von etwaigen Stäubchen und Fäserchen zu befreien. Doch muß derselbe darnach vollständig getrocknet sein, ehe er mit dem geschmolzenen Gemisch wieder in Berührung kommt, da bei höherer Temperatur die Elaidinsäure mit Alkohol in Reaction tritt.

Um die Krystall-Platten mit einem der geeigneten Gemische zu überziehen, ist es vortheilhaft, sie nicht etwa auf einem Metallblech, sondern auf einem Wasserkessel, der mit einigen Lagen Papier bedeckt ist, vorzuwärmen; man ist dann sicher, keine Temperatur zu erreichen, bei der die Kittmasse, mit der die Theile des Präparates verbunden sind, weich oder flüssig wird. Auch das Tiegelchen mit dem Gemisch wird passend auf dem Kessel placirt[1]). Nach dem Auftragen belasse man die Platten noch einige Zeit in der höheren Temperatur, damit jede Spur der Pinselstriche verschwinden kann, und bringe sie dann auf irgend einen die Wärme schlecht leitenden Stoff, bis die Erstarrung eben beginnt. Jetzt ist es günstig, die Abkühlung zu beschleunigen, da bei schnellem Erstarren die Krystallindividuen besonders klein ausfallen, und man legt daher nun, wo die Gefahr des Springens vorüber ist, die Platte auf irgend ein kaltes, ebenes Metallstück. Zeigen sich nach dem Erstarren nahe an dem Zwillingsschnitt in Theilen, wo man zu beobachten gedenkt, Rauhheiten, die meist von eingeschlossenen Fremdkörperchen herrühren, so ist es gut, die Operation sofort zu wiederholen, um einen möglichst störungsfreien Ueberzug zu erhalten. Fertig präparirte Platten werden unter einem Glassturz bis zur Verwendung verwahrt. —

Die oben im theoretischen Theil vorausgesetzte, der Schnittfläche parallele Wärmeströmung wird erzielt, indem man eine der zur Schnittfläche normalen Schmalseiten der zu beobachtenden Platte mit einem Wärmereservoir in Berührung bringt. Zu letzterem wählt man bequem einen Streifen Kupfer *SS*, von ca. 15 cm Länge, 3—5 cm Breite, 0,6—1 cm Dicke (s. Figur 3), der an einem Ende horizontal befestigt wird und auf der freien verticalen schmalen Endfläche recht gleichförmig amalgamirt ist. Ein Brettchen *BB*, das oben mit Sammet überzogen ist und sich mittelst des Bügels *bb* leicht an dem Kupferstreifen befestigen

1) Uebrigens kann man auch so verfahren, daß man eine kleine Menge des noch festen Gemisches auf die Platten bringt, dort schmelzen läßt und mit einem kleinen flachen Pinsel oder einem geeignet geschnittenen Glimmerblättchen ausbreitet.

läßt, trägt das Krystallpräparat *k*, dessen zu erwärmende Fläche an dem amalgamirten Ende des Kupferstreifens anliegt, eventuell auch mit einem Hölzchen an dasselbe gedrückt wird. Stellt man

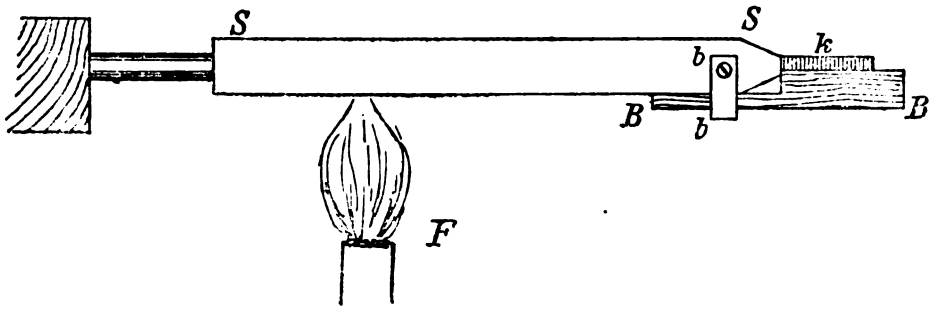


Fig. 3.

unter die Mittellängslinie des Kupferstreifens eine Flamme, *F*, so wird dieser, und damit seine amalgamirte Endfläche, jedenfalls symmetrisch zur Mitte erwärmt; auch variirt wegen der guten Leitfähigkeit des Kupfers die Temperatur nur wenig von Punkt zu Punkt.

Für die Art des Operirens im Einzelnen lassen sich allgemeine Regeln schwer geben; es ist dabei vielmehr die Dimension und die Natur jedes Präparates in Betracht zu ziehen. Das Ziel muß in jedem Falle sein, daß die Isothermen, die man an demselben Präparate erhält, wenn man die Erwärmung einmal von der einen, dann von der anderen Seite vornimmt, so, wie in der Figur 4 bei *a* und *b* angedeutet ist, möglichst geradlinig und gleich, nicht, wie bei *a'* und *b'*, krumm und verschieden ausfallen[1]).

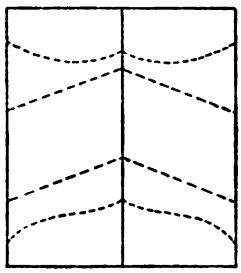


Fig. 4.

Bei Präparaten von geringer Dicke erhält man die Normalform *a* und *b* mitunter ausgezeichnet schön, wenn man die Erwärmung einigermaßen schnell stattfinden läßt, nämlich die Doppelplatte direct an den schon vorgewärmten Kupferstreifen anlegt. Damit die Temperatur des Streifens dabei nicht zu hoch und das Präparat nicht gefährdet wird, ist es günstig, auf ersterem nahe der amalgamirten Endfläche einen Tropfen Siegellack anzubringen, dessen Weichheitsgrad ohne Messung die Temperatur zu beurtheilen gestattet. Ich habe auf diese Weise u. a. auf einer ca. 1 □ cm Fläche und 1 mm Dicke habenden Doppelplatte von brasilianischem Turmalin, während der Siegellacktropfen eben in plastischem Zu-

1) Curven von der Form *a'* unterscheiden sich unter Umständen so wenig von ungebrochenen geraden Linien, daß sie zur Messung ganz ungeeignet sind.

stand war, Isothermen der Art *a*, *b* in größter Regelmäßigkeit im Laufe einiger Secunden erhalten.

Die Ursache dieser besonderen Regelmäßigkeit ist, wie leicht ersichtlich, die Geringfügigkeit des Wärmeverlustes durch die äußeren Flächen bei schnellem Operiren.

Wo die Natur der Krystalle oder die Dicke der Platten ein sehr starkes Temperaturgefälle gefährlich macht, muß man auf andere Weise den Wärmestrom durch die äußeren, insbesondere die Seitenflächen zu vermindern suchen; hierzu kann man z. B. in einer ausprobirten Entfernung beiderseits neben das Präparat kleine Kupferstreifen legen, die gleichfalls an der amalgamirten Fläche von *SS* anliegen und somit eine ähnlich fallende Temperatur annehmen, wie das Präparat selbst. Bei sehr dicken Platten thut schon eine Bedeckung der Seitenflächen mit Sammet gute Dienste.

Hier ist die Gelegenheit, noch auf einen nicht unwichtigen technischen Vorzug der neuen Methode gegenüber der älteren hinzuweisen. Bei der letzteren geschieht die Erwärmung der Krystallplatten von einem Punkte aus; dieser muß demnach auf eine ziemlich hohe Temperatur gebracht werden, wenn die Schmelzgrenze eine brauchbare Ausdehnung erhalten soll, und hierdurch wird die Anwendung der Methode auf viele wasserhaltige Krystalle schwierig oder unmöglich. Bei der ersteren vertheilt sich der Wärmezufluß auf eine ganze Seitenfläche; in Folge hiervon braucht die höchste Temperatur auf der Platte ca. 70° C nicht zu überschreiten, und jene Schwierigkeit kommt vollkommen in Wegfall. —

Für die Ausmessung der Winkel, welche die Knickung der Isothermen auf der Grenze der beiden Plattenhälften bestimmen, ist ein gewöhnlicher Nörremberg'scher Polarisationsapparat zu verwerthen, nachdem der Analysator durch ein kleines Fernrohr, resp. ein Mikroscop mit großer Brennweite ersetzt ist, dessen Fadenkreuz passend recht genau in die Drehungsaxe gebracht wird. Bei dem von mir benutzten Instrument ist die Vergrößerung ungefähr sechsfach, das beobachtete, auf dem Tisch des Apparates liegende Präparat befindet sich 13 cm vom Objectiv. Bei durchsichtigen Krystallen geschieht die Beleuchtung von unten mit Hülfe eines kleinen Spiegels; das Bild gewinnt an Schärfe, wenn man einige Centimeter unter dem Präparat einen dunkeln Schirm mit einer kleinen Oeffnung aufstellt, die nur ein schmales Lichtbündel auf den Krystall fallen läßt. Ist der Krystall undurchsichtig, so geschieht die Beleuchtung der Schmelzgrenze oben von der Seite, und es kostet hier mitunter etwas Mühe, ein gutes Bild zu erzielen. Die eigentliche Messung wird ausgeführt, indem

man den Kreuzungspunkt der Ocularfäden in die Nähe des Knickes der Isotherme bringt und nun erst die eine Hälfte eines Fadens dem ersten, dann die andere dem zweiten Theil der Isotherme parallel stellt. Fällt die Drehungsaxe des unteren mit derjenigen des oberen Kreises zusammen, so kann man vortheilhaft die Methode der Repetition anwenden, die bekanntlich darin besteht, daß nach Ausführung der zweiten Einstellung am oberen Kreis die erste durch eine Drehung des unteren Kreises wiederhergestellt wird, dann die zweite wieder oben, die erste wieder unten erfolgt u. s. f. Man liest nach n maliger Wiederholung dieser Operation am oberen Kreis das n fache des gesuchten Winkels ab, erhält somit ungefähr die n fache Genauigkeit einer einzelnen Einstellung.

Die Mittheilung der erhaltenen Beobachtungsresultate bleibt einer späteren Publication vorbehalten, da mein Wunsch ist, die Messungen noch auf eine größere Anzahl von Substanzen zu erstrecken, und die Beschaffung des Materiales sehr zeitraubend ist, auch von vielen Zufälligkeiten abhängt. —

Schließlich mag bemerkt werden, daß die erörterte und zunächst für exacte Messungen erdachte Methode auch einen gewissen didaktischen Werth haben dürfte. Die Erzeugung der elliptischen Isothermen nach der de Senarmont'schen Methode veranschaulicht nämlich nur einen Theil der Eigenschaften, welche die Wärmeleitung in Krystallen von denen in isotropen Körpern unterscheiden: die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Richtung; der andere Theil: die Schiefheit der Strömung gegen die Isothermen, kommt dabei nicht überzeugend zum Ausdruck, denn es hindert nichts, sich zunächst die Strömung krummlinig und stets normal zur Isotherme verlaufend vorzustellen. Jedenfalls dürften wenig Lernende aus der Betrachtung der elliptischen Isothermen von selbst den richtigen Schluß ziehen, zu dem das Experiment mit der Doppelplatte den Beschauer gewissermaßen zwingt.

Zum Zwecke der Demonstration eignet sich ganz besonders eine natürliche Zwillingsplatte von Gyps, wie sich dergleichen aus dem Vorkommen von Friedrichsroda i. Th. mit Leichtigkeit und mit größter Vollkommenheit der Zwillings-Fläche herstellen lassen. Behandelt man sie nach den oben gegebenen Vorschriften, so erhält man je nach Umständen ein den Curven a', b' oder a, b in der Figur 4 ähnliches Bild; der Winkel, um den die Isothermen geknickt sind, beträgt hier gegen 12°, ist also überaus auffallend.

Göttingen, im October 1896.

Ueber die Lage der Absorptionsbüschel in zweiaxigen pleochroitischen Krystallen.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 24. October 1896.

Die merkwürdigen Absorptionsbüschel, welche man wahrnimmt, wenn man durch eine senkrecht zu einer optischen Axe aus einem zweiaxigen pleochroitischen Krystall geschnittene Platte nach einer hellen Fläche, z. B. nach dem Himmel blickt, liegen in den bekanntesten Fällen normal zu der Ebene der optischen Axen, und man hat hieraus, wie sich an verschiedenen Stellen in der Literatur zeigt, mitunter gefolgert, daß diese Orientirung stets stattfinde. Indessen habe ich bei Ableitung der allgemeinen Theorie [1]) ein anderes Resultat erhalten und dasselbe auch kürzlich durch die Beobachtung bestätigen können.

Die Theorie giebt folgende einfache Regel an die Hand.

Für eine jede Farbe ist ein Krystall charakterisirt durch zwei Systeme von rechtwinkligen Symmetrieaxen, — deren eines als Elasticitäts- oder Polarisationsaxensystem, deren anderes als Absorptionsaxensystem bezeichnet werden mag, — und durch zwei Tripel auf diese bezüglicher Constanten, die analog Polarisations- und Absorptionsconstanten genannt werden mögen.

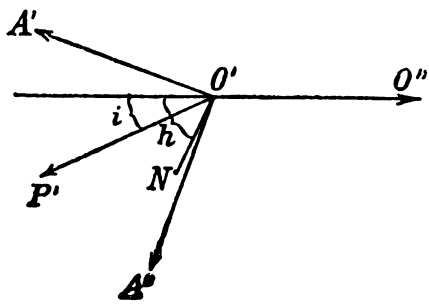
Die ersteren Constanten a_1, a_2, a_3 stellen die Quadrate der Halbaxen des bekannten Fresnel'schen Polarisationsovaloides dar, das bei durchsichtigen Krystallen zur geometrischen Construction der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener Wellen dient; die letzteren a_1', a_2', a_3' bestimmen ähnlich ein zweites Ovaloid, das als Absorptionsovaloid bezeichnet werden möge.

---

1) W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik, II. Band, Leipzig 1896, p. 725 u. f.

Die Normalen auf den Kreisschnitten des ersten Ovaloides sind bei durchsichtigen Krystallen bekanntlich die sogenannten optischen Axen O' und O'', und sie behalten diese Eigenschaften auch bei denjenigen schwachen Absorptionen, die in den gewöhnlichen pleochroitischen Krystallen stattfinden, wie denn bei solchen die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Polarisation durch die Absorption überhaupt nicht merklich modificirt werden. Die Normalen auf den Kreisschnitten des zweiten Ovaloides haben im allgemeinen keine directe physikalische Bedeutung; nur bei sehr schwacher Doppelbrechung fallen sie nahezu in die Richtungen, in denen die beiden fortgepflanzten Wellen gleichstark absorbirt werden. Wir bezeichnen diese Normalen als die Axen A', A'' und benutzen sie, wie überhaupt vielfach in der allgemeinen Theorie absorbirender Krystalle, so besonders zur Veranschaulichung der Lage der Absorptionsbüschel.

Da diese Büschel in der Nähe der optischen Axen besonders merklich sind, so stellen wir in der Figur ein Stück einer um die Lichtquelle — oder das beobachtende Auge — construirten Hohlkugel aus dem pleochroitischen Krystall in der Nähe der Austrittsstelle O' einer optischen Axe dar. N sei die Austrittsstelle der Wellennormale und somit der Beobachtungsrichtung; in den Ebenen $O'O''$, $O'A'$, $O'A''$ liegen die Axen O'', A', A'', und zwar



sei der Winkel $\overline{O'O''}$ zwischen den beiden optischen Axen groß gegen den Winkel zwischen N und O'. Das Azimuth der Beobachtungsrichtung N sei durch den Winkel h gegen die Ebene der optischen Axen bestimmt; außerdem führen wir noch das Azimuth i der Halbirungsebene $O'P'$ des Winkels $A'O'A''$ gegen die Ebene der optischen Axen ein.

Dann lautet die angekündigte Regel: „die wahrgenommene größte Dunkelheit findet in den Richtungen $h = 2i \pm \frac{1}{2}\pi$, die größte Helligkeit in den Richtungen $h' = 2i$ und $h' = 2i + \pi$ statt“; erstere Orientirung wird man sonach auch kurz den Absorptionsbüscheln zusprechen.

Hieraus folgt, daß jederzeit, wenn die Axen A', A'' entweder in der Ebene der Axen $O,'$ O'' oder symmetrisch in einer dazu normalen liegen, $h = \pm \frac{1}{2}\pi$ wird, daß dann also die Büschel sich

normal zur Ebene der optischen Axen zeigen. Dies gilt stets bei rhombischen Krystallen, sowie bei monoklinen dann, wenn die optischen Axen in der Symmetrieebene liegen; es gilt nicht beallen triklinen Krystallen und denjenigen monoklinen, deren optische Axen sich in einer zur Symmetrieebene normalen Ebene befinden.

Monokline pleochroitische Krystalle, welche deutlich Büschel zeigen und dem zweiten Typus angehören, sind mir nicht zugänglich geworden; dagegen bietet der Axinit ein Beispiel eines triklinen Krystalles, bei dem die Abweichungen der Büschel von der zur optischen Axenebene normalen Lage sehr merklich ist; bei dem schönen Präparat, das ich der Firma Dr. Steeg und Reuter in Bad Homburg verdanke, dürfte sie gegen 20° betragen. Um dies festzustellen, muß man die Ebene der optischen Axen bestimmen, was ziemlich leicht, aber freilich nicht sehr genau gelingt, wenn man das Präparat innerhalb einer hoch brechenden Flüssigkeit im convergenten Lichte beobachtet und die Neigungsrichtung aufsucht, bei welcher sich die isochromatischen Curven lemniskatisch auseinanderziehen.

Während diese Beobachtung einerseits die Folgerung der Theorie bestätigt, beweist sie zugleich, daß im Axinit die Symmetrieaxen der Polarisation erheblich gegen diejenigen der Absorption geneigt sind.

Göttingen, im October 1896.

Ueber die Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen auf einander.

Von

A. Schoenflies.

(Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 21. November.)

Das Problem der Abbildung von Raumteilen verschiedener Dimensionen auf einander wurzelt bekanntlich in den Arbeiten des Herrn G. Cantor über Mengenlehre; insbesondere in dem schon frühzeitig von ihm ausgesprochenen Satz, daß das n-dimensionale Continuum dieselbe Mächtigkeit besitzt, wie das eindimensionale [1]). Herr Peano hat sodann gezeigt, daß man sogar ein Quadrat stetig auf eine Strecke, resp. auf die Längeneinheit abbilden kann [2]). Sein Verfahren, das auf arithmetischer Grundlage ruht und nicht gerade einfach ist, ist bald darauf von Herrn Hilbert durch einen geometrischen Beweisgang ersetzt worden [3]), der den Vorzug unmittelbarer anschaulicher Evidenz besitzt.

Im Folgenden werde ich für die Abbildung des Quadrates auf eine Strecke eine neue Ableitung geben, die sich auf beliebig viele Dimensionen übertragen läßt, nach einem Verfahren, das wiederum arithmetischer Natur ist, und an Einfachheit meines Erachtens kaum übertroffen werden kann. Ich teile es besonders deshalb hier mit, weil es unmittelbar erkennen läßt, wie sich in die Einheitsstrecke die einzelnen linearen Continua der Reihe nach ohne Ende einordnen lassen, bis ihre Gesammtheit dem mehrdimensionalen Continuum aequivalent ist. Sind ferner die

1) Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Journ. f. Math. Bd. 84, S. 246.

2) Sur une courbe qui remplit toute une aire plaine, Math. Ann. Bd. 36, S. 157.

3) Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, Math. Ann. Bd. 38. (Abgedruckt aus den Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, Bremen 1890.)

Coordinaten $x_1, x_2, \cdots x_n$ des Raumpunktes als Decimalbruch gegeben, so kann der Wert der Variabeln z, die dem zugehörigen Punkt der Strecke entspricht, unmittelbar hingeschrieben werden, und umgekehrt. Dies gelingt überdies so, daß für die $m$te Ziffer der einen Variabeln immer nur die $m$ten Ziffern der andern in Frage kommen, während z. B. bei Herrn Peano für die Bestimmung der $m$ten Ziffern die Bestimmung aller $m-1$ vorhergehenden erforderlich ist.

Was die Stetigkeit dieser Abbildung betrifft, so ist die volle Stetigkeit im eigentlichen Sinne zwar nicht vorhanden, jedoch aber so, daß wenn die Zahlenwerte der linearen Variabeln auf beliebig viele Decimalen übereinstimmen, dies auch für die Coordinaten der Bildpunkte der Fall ist, und umgekehrt. Man kann jedoch die Abbildung auch so abändern, daß man die Stetigkeit erreicht.

Das lineare Continuum kann man leicht in ein Punktsystem von der Streckenlänge Null abbilden, man kann also auch die Abbildung des Würfels in ein derartiges Punktsystem ausführen.

Ich beginne damit, zunächst die Abbildung des Continuums auf das Punktsystem darzulegen.

1. Das Continuum, von dem im Folgenden stets die Rede sein wird, ist das arithmetische Zahlencontinuum, insbesondere die Gesammtheit aller Zahlenwerte zwischen 0 und 1, die Werte 0 und 1 selbst eingeschlossen. Diese Zahlenwerte denken wir uns im dyadischen Zahlensystem ausgedrückt; ein einzelner sei $0{,}1010011\cdots$ Man kann sich nun des einfachen Gedankens bedienen, alle diese Zahlen in einem andern Zahlensystem zu lesen, beispielsweise also im dekadischen[1]). Dabei ist nur noch der Umstand zu erörtern, daß eine jede Zahl des dyadischen Systems, die von irgend einer Stelle an die Periode 1 besitzt, einer Zahl mit nur einer endlichen Anzahl von Decimalstellen[2]) gleich ist, die man erhält, indem man die Periode tilgt und die vorhergehende 0 durch 1 ersetzt. Z. B. ist $0{,}0010111\cdots = 0{,}0011$. Will man also jede Zahl zwischen 0 und 1 nur einmal schreiben, so muß man entweder die Zahlen mit einer endlichen Stellenzahl oder die ihnen gleichen periodischen Zahlen weglassen. Ich entscheide mich, dem vorliegenden Zweck entsprechend, für das erstere; jede unserer Zahlen enthält mithin unendlich viele Stellen. Das Symbol

$$x = 0,\ a_1 a_2 a_3 \cdots a_\iota = 0 \text{ oder } 1$$

1) Ein derartiger Gedanke ist mir gelegentlich von Herrn Sommerfeld geäußert worden.

2) Der einfachen Ausdrucksweise halber behalte ich die Bezeichnung Decimalstellen auch für die andern Zahlensysteme bei.

giebt alsdann, wenn alle $a_i = 1$ sind, auch den Wert 1; ich füge hierzu ausdrücklich noch das Symbol, in dem alle $a_i = 0$ sind. Bei dieser Festsetzung stellt x alle Zahlen zwischen 0 und 1 und jede nur einmal dar, die Grenzen eingeschlossen.

Jede Zahl x der so definirten Menge M, d. h. unseres arithmetischen Continuums, fassen wir unter Beibehaltung der Ziffern nun als Zahl x_0 eines andern Zahlsystems Z auf, z. B. des dekadischen, so wird dadurch in diesem Zahlensystem Z eine Menge M_0 definirt, die auf das Continuum M ein-eindeutig abgebildet ist; beide Mengen haben die gleiche Mächtigkeit, und im Sinne des Herrn Cantor auch den gleichen Ordnungstypus [1]). Von dieser Menge M_0 läßt sich nun leicht zeigen, daß sie die Streckensumme Null besitzt. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall des dekadischen Zahlsystems.

Der Punkt der Menge M_0, der den größten Abstand vom Punke 0 hat, ist der Punkt $0{,}1111\cdots$ Wir suchen diejenigen zwischen ihm und 0 gelegenen Strecken, die ganz frei bleiben von Punkten der M_0. Dies ist zunächst die Strecke zwischen

$$0{,}0111\cdots \text{ und } 0{,}1;$$

ferner die beiden Strecken zwischen

$$0{,}0011\cdots \text{ und } 0{,}01 \text{ resp. } 0{,}1011\cdots \text{ und } 0{,}11$$

sodann die vier Strecken zwischen

$$\begin{array}{ll} 0{,}00011\cdots \text{ und } 0{,}001 & 0{,}01011\cdots \text{ und } 0{,}011 \\ 0{,}10011\cdots \text{ und } 0{,}101 & 0{,}11011\cdots \text{ und } 0{,}111 \end{array}$$

u. s. w. u. s. w. Das weitere Bildungsgesetz ist leicht zu überschauen. Die Summe dieser sämmtlichen Strecken ist

$$\tfrac{8}{90}\left(1 + \tfrac{2}{10} + \left(\tfrac{2}{10}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{10}\right)^3 \cdots\right)$$

deren Wert gleich $\frac{1}{9}$ ist; damit ist die Behauptung erwiesen; d. h.

Unsere Abbildung bildet das Zahlencontinuum zwischen 0 und 1 ein-eindeutig auf eine Menge M_0 ab, die die Streckensumme Null besitzt [2]).

---

1) Beiträge zur Begründung der definiten Mengenlehre, Math. Ann. Bd. 46 S. 496.

2) Das Punktsystem M_0 ist demjenigen sehr ähnlich, welches P. du Bois-Reymond in seiner allgemeinen Functionentheorie auf S. 188 ff. betrachtet hat. Man vgl. auch die Untersuchungen von Herrn J. Bendixson, Acta math. Bd. 2 S. 417.

Es ist klar, daß dieser Beweis für jedes andere Zahlsystem analog geführt werden kann.

2. Von dieser Abbildung aus bin ich auf folgende Weise zur Abbildung des Würfels auf die Einheitsstrecke gelangt.

Es sei N die Grundzahl des Zahlsystems Z und α eine ganze Zahl, so daß

$$1 < \alpha < N-1.$$

Wir ersetzen jetzt in jeder Zahl x_0 unserer Menge M_0 a_1 durch

$$a_1' = a_1 + \alpha,$$

addiren also bei jedem x_0 zur ersten Ziffer die Zahl α, so ergiebt sich eine neue Zahlenmenge M_1, dargestellt durch das im Zahlsystem Z zu lesende Symbol

$$x_1 = 0,\ a_1' a_2 a_3 \cdots$$

Diese Menge entspricht ebenfalls ein-eindeutig den Zahlen des Continuums, und ihre Zahlen sind überdies sämmtlich unter einander und von den Zahlen von M_0 verschieden; alle diese Zahlen sind überdies auf der Einheitsstrecke enthalten.

Solcher Zahlenmengen können wir in die Strecke 01 beliebig viele einordnen. Anstatt die erste Ziffer jeder Zahl x um eine und dieselbe Zahl zu vermehren, können wir das gleiche mit jeder andern thun; wir erhalten dementsprechend die Mengen

$$M_1,\ M_2,\ M_3 \cdots M_n \cdots,$$

wo M_i diejenige Menge bedeutet, die durch Vermehrung der $i$ten Stelle aller Zahlen x um α entsteht. Man sieht unmittelbar, daß alle diese Mengen aus lauter verschiedenen Zahlen bestehen, und daß auch keine zwei Zahlen verschiedener Mengen einander gleich sind. Damit ist aber unser Einordnungsproceß noch nicht abgeschlossen. Statt nur eine Ziffer von x um die eine Zahl α zu vermehren, können wir zwei, drei, $\cdots$ Ziffern dem unterziehen, wir erhalten so die Mengen

$$M_{12},\ M_{13},\ M_{14} \cdots$$
$$M_{23},\ M_{24} \cdots$$
u. s. w.,

wo M_{ik} bedeutet, daß die $i$te und $k$te Ziffer von x um α zu vermehren sind. Analog bilden wir die Mengen

$$M_{123},\ M_{124},\ M_{125} \cdots,$$

die immer wieder die Eigenschaften der früheren besitzen; ja wir

können sogar unendlich viele Stellen nach einem irgend wie herausgegriffenen Gesetz der Vermehrung um α unterwerfen und erhalten immer wieder eine Menge der angegebenen Art.

Es ist nicht schwierig, von hieraus zu derjenigen Abbildung des Quadrats auf die Einheitsstrecke zu gelangen, die ich hier mitteilen will. Zunächst ist ersichtlich, daß sich in die Einheitsstrecke genau so viele Mengen M einordnen lassen, als es Zahlenwerte in der Einheitsstrecke giebt, und dies heißt wieder nichts anderes, als daß die im vorstehenden aufgezählten Mengen insgesammt den durch zwei Coordinaten x und y darstellbaren Quadratpunkten zugeordnet werden können. Denkt man sich nämlich die Zahl y ebenfalls im dyadischen Zahlsystem dargestellt, also

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots$$

mit der Maßgabe, daß wir jetzt auch endliche Decimalbrüche zulassen, so entspricht jeder bestimmten Zahl y' stets eine unserer Mengen M'; ich erhalte sie, indem ich a_i um α vermehre, falls $b_i = 1$ ist, aber a_i ungeändert lasse, falls $b_i = 0$ ist. Diese Menge stellt alsdann diejenigen Quadratpunkte dar, deren $y = y'$ ist, während x jeden Werth zwischen 0 und 1 annehmen kann resp. den Schnitt des Quadrats mit der Geraden. Beispielsweise entsprechen also der Menge M_{194} die Quadratpunkte mit variablem x, und $y = 0{,}1101$.

3. Die einfachste arithmetische Darstellung dieser Abbildung gestaltet sich folgendermaßen.

Die Gesammtheit aller Mengen M' braucht die Einheitsstrecke keineswegs vollständig zu bedecken. Um dies zu erreichen, nehmen wir jetzt insbesondere an, daß die Grundzahl des Zahlsystems Z den Wert 4 hat, und setzen $\alpha = 2$; alsdann ergiebt sich folgendes Abbildungsverfahren. Die Coordinaten des Quadratpunktes, im dyadischen Zahlsystem geschrieben, seien wieder

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \qquad a_i = 0 \text{ oder } 1,$$
$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots \qquad b_i = 0 \text{ oder } 1.$$

Wir setzen

$$\xi = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$$
$$\eta = 0, 2b_1 2b_2 2b_3 \cdots,$$

so giebt

$$z = \xi + \eta$$

stets eine Zahl im Zahlsystem Z mit der Grundzahl 4, nämlich

$$z = 0, c_1 c_2 c_3 \cdots \qquad c_i = 0, 1, 2, 3$$

für

$$c_i = a_i + 2b_i.$$

Umgekehrt aber, ist ε eine beliebige Zahl von Z, so läßt sich jedes c_i auf eine und nur eine Art in zwei Summanden spalten, deren einer 0 oder 1, und deren anderer 0 oder 2 ist. Aus ε folgt also eindeutig ξ und η, aus ξ und η wieder x und y.

Um ein Beispiel zu geben, so sei

$$x = 0{,}1011001 \cdots$$
$$y = 0{,}0110100 \cdots,$$

so wird

$$\left.\begin{aligned}\xi &= 0{,}1011001 \cdots \\ \eta &= 0{,}0220200\end{aligned}\right\}, \qquad \varepsilon = 0{,}1231201 \cdots$$

Umgekehrt, ist

$$\varepsilon = 0{,}3203312 \cdots,$$

so folgt sofort

$$\left.\begin{aligned}\xi &= 0{,}1001110 \cdots \\ \eta &= 0{,}2202202 \cdots,\end{aligned}\right\} \text{ also } \left.\begin{aligned}x &= 0{,}1001110 \cdots \\ y &= 0{,}1101101 \cdots\end{aligned}\right.$$

Unsere Abbildung arbeitet also in der That nur mit einem Minimum von Rechnung.

Die vorstehende Abbildung ist nicht durchgehends eindeutig, sondern vielmehr teilweise mehrdeutig. Die Mehrdeutigkeit tritt dadurch auf, daß wir genötigt sind, für die vorliegende Abbildung auch solche Zahlen x und y zu berücksichtigen, die nur eine endliche Zahl von Stellen enthalten.

Um hierüber das genauere zu ermitteln, denken wir uns wieder ε in der Weise bestimmt, wie oben die Zahlen des dyadischen Systems; d. h. wir setzen fest, daß jedes ε unendlich viele Stellen besitzt. Um es zu erreichen, ersetzen wir in den Zahlen ε mit endlicher Stellenzahl die letzte Ziffer durch die um 1 kleinere Ziffer und eine Folge von lauter Dreien. Damit haben wir die Gesammtheit aller Werte von ε, so daß $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ wieder definirt. Zu jedem dieser Werte ε gehört alsdann ein bestimmtes Wertepaar x und y. Ebenso, wenn wir x und y in der entsprechenden Weise durch lauter Zahlen von unendlich vielen Stellen gegeben denken, so gehört zu jedem Zahlenpaar ein bestimmter Wert ε. Dieses ε besteht immer wieder aus unendlich vielen Stellen, dagegen können sich für x oder y Zahlen mit endlicher Stellenzahl ergeben. Enthält z. B. ε von einer bestimmten Stelle an lauter gerade Ziffern, so sind die bezüglichen Stellen von x sämmtlich gleich Null. Da sich ein solcher Wert von x, resp. y auch als Zahl mit unendlich vielen Stellen schreiben läßt, so tritt

er doppelt auf; d. h. wir sehen, daß in unserer Abbildung jedem irrationalen Wertepaar x, y ein Wert z entspricht, daß jedem Quadratpunkte mit **einer** rationalen Coordinate zwei Werte z, endlich jedem Punkt dessen **beide** Coordinaten rational sind, vier Werte z entsprechen. Lassen wir übrigens auch für z Werte mit endlicher Stellenzahl zu, so erleidet die Ein-Eindeutigkeit der Abbildung noch insofern eine Ausnahme, als dann auch diesen Werten z zwei verschiedene Quadratpunkte entsprechen.

Wenn die Werte von z in beliebig vielen Decimalstellen übereinstimmen, so thun es augenscheinlich auch die Werte von x und y und umgekehrt. Dies bedingt jedoch nicht die volle Stetigkeit der Abbildung. Die Stetigkeit würde nur dann vorhanden sein, wenn zu zwei Decimalbrüchen z, von denen der eine endlich, der andere aber der ihm gleiche periodische ist, die nämlichen Werte x und y gehörten. Dies ist jedoch nicht der Fall. Es gehören also auch zu zwei Werten z, die zwar beide unendlich viele Stellen haben, von denen aber der eine beliebig wenig größer, der andere beliebig wenig kleiner ist, als ein Wert von z mit endlicher Stellenzahl, Werte x resp. y, deren Differenz nicht unter jede Grenze hinabsinkt.

4. Wir können die Abbildung zu einer stetigen machen, indem wir sie mit der von Herrn Hilbert gegebenen in Uebereinstimmung setzen. Einen Zusammenhang zwischen beiden Abbildungen zu vermuten, liegt an sich nahe. Die bei Herrn Hilbert benutzte Teilung der Einheitsstrecke in vier Teile entspricht der Anwendung des Zahlsystems mit der Grundzahl vier, während die fortgesetzte Halbirung der Quadratseiten auf die Anwendung des dyadischen Zahlsystems für die Coordinaten der Quadratpunkte hinausläuft. Aendert man die Hilbert'sche Quadratbezeichnung dahin ab, daß man die mit 3 und 4 bezeichneten Quadrate vertauscht, und diese Anordnung der Quadrate auch für die weitere Teilung beibehält, so ergiebt sich unmittelbar das geometrische Abbild der vorstehenden Darstellung. Umgekehrt ist diese folgendermaßen abzuändern, um eine stetige Abbildung zu liefern.

Ich bezeichne die vier durch erste Halbierung entstehenden Teilquadrate durch 0 1 2 3, genauer durch 0,0 0,1 0,2 0,3, indem 0 1 2 3 die ersten Decimalen in einem Zahlsystem mit der Basis 4 bedeuten. Ferner soll der Uebergang von 0 zu 1 und von 2 zu 3 längs der x-Axe, derjenige von 0 zu 2 und von 1 zu 3 längs der y-Axe und zwar beidemale in positiver Richtung erfolgen. Für je vier Teilquadrate, die durch die neue Teilung

aus einem Quadrat entstehen, soll endlich die eben angegebene Nummerirung stets beibehalten werden und zwar so, daß die neuen Ziffern immer als nächste Decimale an diejenige Zahl treten, die dem geteilten Quadrat entspricht; ist also ε_1 oder $0, \varepsilon_1$ eines der ersten vier Quadrate, so sind $\varepsilon_1\varepsilon_2$ resp. $0, \varepsilon_1\varepsilon_2$ die sechzehn Quadrate der zweiten Teilung; insbesondere sei 00 das Anfangsquadrat des Weges.

Auf Grund hiervon läßt sich das Gesetz des Weges, der bei fortgesetzter Teilung alle Quadrate durchzieht, folgendermaßen bestimmen. Wir nehmen den Weg $\mathfrak{G}_n$ für n-fache Teilung als bekannt an, und bestimmen den Weg $\mathfrak{G}_{n+1}$ für die neue Teilung.

Seien

$$0, \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n \text{ und } 0, \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \xi_n$$

zwei benachbarte Quadrate der $n$ten Teilung, so können wir sie für das folgende einfach durch ε_n resp. ξ_n bezeichnen. Aus ihnen entstehen bei neuer Teilung je vier neue Quadrate ε_{n+1} resp. ξ_{n+1}, und für diese Quadrate haben wir das Weggesetz $\mathfrak{G}_{n+1}$ festzustellen. Wir bezeichnen die Reihenfolge, in der der Weg die vier ersten resp. zweiten Quadrate durchzieht, durch

$$\varepsilon_{n+1}, \varepsilon'_{n+1}, \varepsilon''_{n+1}, \varepsilon'''_{n+1} \text{ und } \xi_{n+1}, \xi'_{n+1}, \xi''_{n+1}, \xi'''_{n+1},$$

alsdann gilt folgende Regel: Wenn der Weg $\mathfrak{G}_n$ von ε_n zu ξ_n in positiver Richtung längs einer Axe fortgeht, d. h. wenn $\xi_n - \varepsilon_n > 0$ ist, so ist immer $\xi_{n+1} = 0$, d. h. 0 ist das erste vom Weg $\mathfrak{G}_{n+1}$ durchzogene Teilquadrat von ξ_n; wenn dagegen der Uebergang von ε_n zu ξ_n in negativer Richtung erfolgt, d. h. wenn $\xi_n - \varepsilon_n < 0$ ist, so ist $\xi_{n+1} = 3$, dann ist also 3 das erste Teilquadrat von ξ_n, das der Weg $\mathfrak{G}_{n+1}$ durchläuft. Dies ist evident für den Fall, daß ε_{n+1} den Wert 0 oder 3 hat, und da das allererste Teilquadrat, in dem der Weg $\mathfrak{G}_{n+1}$ beginnt, nach obiger Festsetzung ein Quadrat 0 ist, so folgt es damit überhaupt. Damit ist bereits das Anfangsquadrat des Weges $\mathfrak{G}_{n+1}$ innerhalb ξ_n bestimmt. Ebenso läßt sich aber auch das letzte leicht angeben. Denn der Schritt vom letzten Quadrat ε'''_{n+1} zum ersten Quadrat ξ_{n+1} muß der nämlichen Axe parallel laufen, und in der nämlichen Richtung geschehen, wie der Schritt von ε_n zu ξ_n selbst; und daraus folgt leicht, daß

$$\xi_{n+1} - \varepsilon'''_{n+1} = \varepsilon_n - \xi_n$$

ist, womit ε'''_{n+1} bestimmt ist. Kennen wir aber von je vier Teilquadraten das erste und letzte, so kennen wir auch den ganzen Weg; denn diese vier Quadrate werden so durchzogen, daß die

Schritte längs der x- und y-Axe abwechseln. Es sind also nur folgende vier Reihenfolgen möglich, 0123 und 0231, resp. 3102 und 3201. Beispielsweise ergiebt sich auf die dargelegte Art unmittelbar, daß die sechzehn Teilquadrate des zweiten Weges in der Reihe

$$\begin{array}{cccccccc} 00 & 02 & 03 & 01 & 10 & 11 & 13 & 12 \\ 30 & 31 & 33 & 32 & 23 & 21 & 20 & 22 \end{array}$$

durchlaufen werden.

Nachdem so der Weg arithmetisch definirt ist, ergiebt sich das Gesetz der stetigen Abbildung folgendermaßen. Seien wieder

$$x = 0,\ a_1 a_2 a_3 \cdots \quad y = 0,\ b_1 b_2 b_3 \cdots$$

die Coordinaten eines Quadratpunktes, und sei

$$\xi = 0,\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots$$

der Wert des zugehörigen Punktes auf der Einheitsstrecke, so ist zunächst klar, daß für die Beziehung der $n$ten Decimalziffern $\gamma_n a_n b_n$ zu einander je ein eigener Weg σ_n gehört. Betrachten wir zunächst die dem ersten Weg entsprechenden vier Quadrate, so wollen wir die Reihenfolge der Quadrate, die durch

$$\begin{array}{cccc} a_1 = 0{,}0 & a_1 = 0{,}1 & a_1 = 0{,}0 & a_1 = 0{,}1 \\ b_1 = 0{,}0 & b_1 = 0{,}0 & b_1 = 0{,}1 & b_1 = 0{,}1 \end{array}$$

bestimmt ist, als die natürliche Reihenfolge 0123 bezeichnen; es ist diejenige, die bei Benutzung der Relationen von (3), d. h. bei der ursprünglichen Abbildung die Zahlenwerte

$$0{,}0 \quad 0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3$$

für c_1 liefert und umgekehrt. Ist nun die Ziffernfolge, welche dem diese Quadrate durchziehenden Weg entspricht, wieder $\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''$ so ist die stetige Abbildung so einzurichten, daß auch diese Ziffern die obenstehenden Werte für a_1 und b_1 liefern; d. h. aber nichts anderes, als daß γ_1 durch c_1 so zu ersetzen ist, wie es durch das Entsprechen der Ziffernfolgen $\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''$ und 0123 gefordert wird. Für den ersten Weg sind die Zahlen $\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''$ resp. 0132, also folgt, daß wenn

$$\gamma_1 = 0132 \text{ ist, } c_1 = 0123$$

zu setzen ist, und dann wieder a_1 und b_1 nach (3) zu berechnen. Dieses Gesetz gilt nun aber ganz allgemein für jede Decimale, wobei nur zu beachten ist, daß man stets an dem durch c_i bestimmten Quadrat weiteroperirt, da das Weggesetz sich an die natürliche Nummerirung anschließt. Da nun für je vier zusammenge-

hörige Teilquadrate nach dem Vorigen die Folge $\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''$ bekannt ist, so ist damit auch stets c_n aus γ_n zu entnehmen und umgekehrt. Für die Rechnung selbst ist zu beachten, daß man den Weg $\mathfrak{G}_n$ fast immer nur innerhalb des einen Quadrates $\mathfrak{G}_n$ selbst zu bestimmen braucht. Ist beispielsweise

$$\xi = 0{,}1333\cdots$$

so gilt für den ersten Weg die Zahlenfolge 0132, so daß $c_1 = 1$ ist; für den zweiten Weg innerhalb c_1 die Folge 0132, so daß $c_2 = 2$ ist für den dritten und jeden folgenden Weg endlich die Folge 3102, so daß alle weiteren $c_n = 2$ sind; also ist

$$x = 0{,}1000\cdots \text{ und } y = 0{,}0111\cdots$$

Wenn dagegen

$$\xi = 0{,}20000\cdots$$

ist, so ist die erste Folge 0132, so daß $c_1 = 3$ ist; für die zweite und alle übrigen Folgen ergiebt sich daraus sofort 0131, so daß alle folgenden $c_i = 0$ sind; d. h. es ist

$$x = 0{,}100\cdots\ y = 0{,}100\cdots$$

In diesem Fall gehört also zu den vorstehenden Werten ξ der nämliche Quadratpunkt, wie es der Stetigkeit der Abbildung entspricht.

5. Die vorstehende Abbildung ist unmittelbar einer Verallgemeinerung auf beliebig viele Dimensionen fähig. Diese Möglichkeit beruht auf der einfachen Thatsache, daß sich jede ganze Zahl, die kleiner ist als 2^n, auf eine und nur eine Weise als Summe

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + \cdots 2^{n-1}\varepsilon_n$$

darstellen läßt, wo alle ε_i den Wert 0 oder 1 haben. Jede solche Zahl bestimmt daher eindeutig n Ziffern $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$, die sämmtlich Null oder Eins sind. Wir legen nun für die Zahlbestimmung von x auf der Einheitsstrecke ein Zahlsystem zu Grunde, dessen Basis 2^n ist; für jede Coordinate $x_1, x_2 \cdots x_n$ des Würfelpunktes aber wieder das dyadische Zahlsystem. Wenn dann die $m$ten Stellen von $x_1, x_2 \cdots x_n$ bezüglich die Werte

$$\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_n \qquad \mu_i = 0 \text{ oder } 1$$

haben, so ergiebt sich daraus die $m$te Ziffer μ von x als

$$\mu = \mu_1 + 2\mu_2 + 4\mu_3 + \cdots + 2^{n-1}\mu_n$$

und ebenso ergiebt sich aus μ eindeutig das System der Ziffern $\mu_1 \cdots \mu_n$.

Ist beispielsweise für $n = 3$

$$x_1 = 0{,}101101 \cdots \quad x_2 = 0{,}011010 \cdots \quad x_3 = 0{,}111100 \cdots,$$

so setzen wir einfach $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = 2x_2$, $\xi_3 = 4x_3$, also

$$\xi_1 = 0{,}101101 \cdots \quad \xi_2 = 0{,}022020 \cdots \quad \xi_3 = 0{,}444400 \cdots$$

und erhalten

$$z = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0{,}567521 \cdots$$

Ebenso folgt sofort aus

$$z = 0{,}706316 \cdots$$

$$\xi_1 = 0{,}10010 \cdots \quad \xi_2 = 0{,}202202 \cdots \quad \xi_3 = 0{,}404004 \cdots$$

und daraus

$$x_1 = 0{,}100110 \cdots \quad x_2 = 0{,}101101 \cdots \quad x_3 = 0{,}101001 \cdots$$

Bei den analogen Festsetzungen, wie oben, folgt wieder, daß jedem Würfelpunkt mit lauter irrationalen Coordinaten ein Punkt der Einheitsstrecke entspricht, dagegen jedem Würfelpunkt, der α rationale Coordinatenwerte besitzt, 2^α Werte von z entsprechen. Auch bezüglich der Stetigkeit bleiben die obigen Bemerkungen unverändert bestehen; auch kann wieder die Abbildung, dem Fall $n = 2$ analog, so abgeändert werden, daß sie in vollem Sinne stetig ist.

6. Denken wir uns schließlich jede Zahl z der Einheitsstrecke wieder im dyadischen Zahlsystem geschrieben, so können wir das Zahlencontinuum der Werte z auf die oben genannte Weise eineindeutig auf ein Punktsystem von der Streckenlänge Null abbilden; damit ergiebt sich unmittelbar auch die Abbildung des Würfels auf das bezügliche Punktsystem. Die Stetigkeit hört dabei natürlich auf; die Mehrdeutigkeit folgt den nämlichen Gesetzen, die die Abbildung auf die Streckeneinheit betreffen. Damit ist in der That gezeigt, wie man einen beliebig großen Würfel von beliebig vielen Dimensionen, beispielsweise also den gesammten sichtbaren Weltenraum, auf ein Punktsystem von der Streckenlänge Null abbilden kann. Man könnte hiermit wieder noch eine Abbildung des gesammten unbegrenzten Raumes durch reciproke Radien combiniren, doch will ich hierauf nicht weiter eingehen. Nur die eine Thatsache möge noch erwähnt werden, daß auf die angegebene Weise nun auch die Abbildung eines Würfels von n Dimensionen auf einen solchen von m wirklich hergestellt werden kann. Man braucht zu diesem Zwecke nur durch die Abbildung des einen Würfels auf die Einheitsstrecke hindurchzugehen.

7. Um die Tragweite der vorstehenden Betrachtungen zu kennzeichnen, will ich nicht unterlassen, nochmals darauf hinzuweisen, daß als Object immer nur das arithmetische Continuum auftritt, und daß schließlich von diesem Continuum im Sinne der Begriffsbestimmungen des Herrn Cantor immer nur die Mächtigkeit resp. der Ordnungstypus in Frage kommt. Hierin findet der paradoxe Character des letzten Resultats meines Erachtens seine hinreichende Erklärung; das Resultat ist nichts anderes, als ein Satz über die Mächtigkeit gewisser arithmetisch definirten Mengen. Will man diese Verhältnisse dem allgemeinen Vorstellen durch ein Bild zugänglich machen, so kann man den Uebergang vom dyadischen zum andern Zahlsystem als eine Art von Vergrößerung der Streckeneinheit betrachten, bei der der Zusammenhang an jeder Stelle des ursprünglichen Zahlencontinuums reißt, während für die geometrisch gegebene Continuität dieser Zusammenhang bei Vergrößerung bestehen bleibt.

Göttingen, den 5. November 1896.

Zur Theorie der linearen Scharen von Punktaggregaten auf algebraischen Curven.

Von

H. Burkhardt in Göttingen.

(Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 21. November.)

I. Ableitung der grundlegenden Sätze aus der Riemann'schen Theorie.

In den letzten Jahren haben sich namentlich italienische Mathematiker[1]) neuerdings mit linearen Scharen von Punktaggregaten auf algebraischen Gebilden einer Dimension (Curven) beschäftigt. Es ist daher vielleicht nicht ohne Interesse einmal zuzusehen, wie sich die wichtigsten Sätze dieser Theorie anordnen, wenn man mit Riemann die Eigenschaften der Integrale des Gebildes an die Spitze stelle.

Seien mit:

$$1) \qquad v_k = \int \psi_k \, dz, \qquad (k = 1, 2 \ldots p)$$

die transscendent normirten Integrale I. Gattung bezeichnet (sodaß also v_k an allen Querschnitten 1. Art bis auf den k^{ten} den Periodicitätsmodul 0, am k^{ten} den Periodicitätsmodul 1 hat). Sei ferner

$$Z(z; t)$$

das Integral II. Gattung, das in $z = t$ mit dem Residuum 1 einfach unendlich wird und so normirt ist, daß seine Perioden an den Querschnitten 2. Art alle $= 0$ sind; seine Periode am k^{ten} Querschnitt 2. Art ist dann bekanntlich:

$$-2\pi i \psi_k(t).$$

Eine algebraische Functien $F(z)$ der Fläche, die nirgendwo

1) Vgl. die zusammenfassenden Darstellungen von E. Bertini und C. Segre im 22. Bd. der Ann. di Mat. (1893).

als in n gegebenen Punkten $t_1, t_2 .. t_n$ und in diesen nur von der ersten Ordnung unendlich groß wird, läßt sich darstellen als Summe solcher Integrale II. Gattung:

$$2) \qquad F(z) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha Z(z; t_\alpha) + c_{n+1};$$

umgekehrt stellt diese Summe eine algebraische Function der Fläche dar, wenn ihre Periodicitätsmoduln auch an den Querschnitten 2. Art alle gleich Null sind, wenn also die p Gleichungen bestehen:

$$3) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \psi_k(t_\alpha) = 0. \qquad (k = 1, 2 .. p)$$

Sind von diesen Gleichungen τ eine Folge der übrigen, m. a. W. gibt es τ von einander linear unabhängige lineare Combinationen der ψ, die in allen den Punkten t_α Null werden, so enthält die allgemeinste algebraische Function, die nirgends als in den Punkten t_α und in diesen nicht von höherer als der ersten Ordnung unendlich wird, $n - p + \tau + 1$ willkürliche Constante linear und homogen (der Riemann-Roch'sche Satz).

[Dieser Beweis setzt zunächst voraus, daß die Punkte t_α nicht in Verzweigungspunkte oder unendlich ferne Punkte der Riemann'schen Fläche fallen, sowie daß sie alle von einander verschieden sind; es ist wesentlich, sich vollständig klar zu machen, daß der Satz selbst von diesen beiden Voraussetzungen unabhängig und ganz allgemein gültig ist; bezw. wie sein Wortlaut in solchen Fällen zu modificiren ist. Wie man im ersten Fall zu verfahren hat, hat schon Roch selbst am Schlusse seiner Arbeit[1]) angegeben: man muß eine Hilfsvariable σ einführen, die die Umgebung des betr. Punktes t_α auf die Umgebung des Nullpunkts der σ-Ebene abbildet. Das Normalintegral II. Gattung, das in diesem t_α unendlich wird wie σ^{-1}, hat dann $-2\pi i\, dv_k/d\sigma$ zur Periode am k^{ten} Querschnitt 2. Art; und diese Größe $dv_k/d\sigma$ tritt dann auch in den Bedingungsgleichungen (3) an Stelle von ψ_k auf. M. a. W. man hat bei Abzählung der ψ, die in den t_α Null werden, erst alle Nullpunkte in Abrechnung zu bringen, die in Verzweigungs- oder unendlich fernen Punkten bei sämtlichen ψ von selbst auftreten. (Zu einer einheitlichen Ausdrucksweise würde man gelangen, wenn man eine Variable η einführte, von der alle algebraischen Functionen der Fläche eindeutige Functionen sind). Was den Fall

1) J. f. Math. 65 (1864).

zusammenrückender Punkte t_α betrifft, d. h. den Fall, daß die algebraischen Functionen die wir suchen auch von höherer als der ersten Ordnung (aber nicht von höherer als einer für jeden Pol bestimmt vorgeschriebenen) unendlich groß werden dürfen, so wird es genügen, den Fall zu besprechen, daß $t_2 = t_1$ ist, während die übrigen t_α von t_1 und von einander verschieden sind. Dann tritt an Stelle von $c_1 Z(z; t_1) + c_2 Z(z; t_2)$ in der Summe (2) die Verbindung auf:

$$c_1 Z(z; t_1) + c_2 \bar{Z}(z; t_1),$$

in der

$$\bar{Z}(z; t_1) = \frac{\partial Z(z; t_1)}{\partial t_1} \text{ (bezw. } \frac{\partial Z(z; t_1)}{\partial \sigma})$$

ein Integral II. Gattung ist, das in t_1 von der zweiten Ordnung unendlich groß wird. Die Gleichungen (3) ihrerseits werden:

$$c_1 \psi_k(t_1) + c_2 \frac{d\psi_k(t_1)}{dt_1} + \sum_{\alpha=3}^{n} c_\alpha \psi_k(t_\alpha) = 0;$$

und von diesen Gleichungen sind dann gerade τ eine Folge der übrigen, wenn gerade τ lineare Verbindungen der ψ existiren, die in t_1 von der zweiten, in t_2, $t_3 \ldots t_n$ je von der ersten Ordnung Null werden].

Das System der Bedingungsgleichungen (3) kann auf eine reducirte Form gebracht werden, wenn man statt der ψ_k solche linear unabhängige lineare Verbindungen χ_k von ihnen einführt, daß $\chi_{p-\tau+1}$, $\chi_{p-\tau+2} \cdots \chi_p$ in den t_α Null werden; es bleiben dann gerade die $p - \tau$ von einander linear unabhängigen Gleichungen:

3a) $$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \chi_k(t_\alpha) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots p-\tau)$$

Legt man den Constanten c_α in $F(z)$ bestimmte mit den Bedingungen (3) verträgliche Werte bei und setzt dann:

4) $$F(z) = 0$$

so erhält man ein Aggregat von n Punkten; läßt man die Constanten in jeder mit den Bedingungen (3) verträglichen Weise variiren, so erhält man eine $(n - p + \tau)$fach unendliche Schar solcher Aggregate. Man bezeichnet sie als eine Vollschar g^r_n von der „Ordnung“ n und der „Dimension“:

5) $$r = n - p + \tau.$$

Unterwirft man aber die Constanten c_α noch λ weiteren, von einander und von den Bedingungen (3) unabhängigen linearen homogenen Bedingungen:

$$6) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n+1} \gamma_{\alpha\beta} c_\alpha = 0, \qquad (\beta = 1, 2 \ldots \lambda)$$

so wird dadurch aus der Vollschar eine Teilschar von der gleichen Ordnung und von der Dimension:

$$7) \qquad r = n - p + \tau - \lambda$$

ausgeschieden.

In einem speciellen den Bedingungsgleichungen (3) und (6) genügenden System von Werten der Constanten c_α kann eine von ihnen $= 0$ sein. Sei etwa $c_1 = 0$, so wird die mit diesen Werten der Constanten gebildete Function $F(x)$ in t_1 nicht unendlich und hat dann natürlich auch nur $n - 1$ Nullpunkte; zu diesen hat man den Punkt t_1 mit hinzuzunehmen, um ein Aggregat der Schar zu erhalten. Ebenso können auch mehrere der t_α in einem Aggregat der Schar auftreten; schließlich sind auch die sämtlichen t_α selbst als ein Aggregat der Schar anzusehen. Sie spielen übrigens keinerlei ausgezeichnete Rolle in ihr; man kann dieselbe Schar erhalten, indem man von irgend einem ihrer Aggregate statt von dem der t_α ausgeht.

Es kann auch der Fall eintreten, daß eine solche Gleichung $c_1 = 0$ eine Folge der Gleichungen (3) und (6) ist; dann ist t_1 in jedem Aggregat der Schar enthalten, die Schar ist eine solche „mit festem Punkt". Dieser Fall wird keineswegs ausgeschlossen; doch kann man aus jeder g_n^r mit festem Punkt eine g_{n-1}^r ohne solchen erhalten, indem man sowol im Ansatz (2) als auch in den Bedingungsgleichungen (5) und (6) überall $c_1 = 0$ setzt. Die Anzahl der linear unabhängigen unter den Bedingungsgleichungen reducirt sich dabei um eine Einheit; man erkennt das, wenn man sie vorher durch ein aequivalentes System ersetzt, in dem eine Gleichung $c_1 = 0$ lautet, während in den andern c_1 nicht vorkommt.

Fügt man umgekehrt zu allen Aggregaten einer g_n^r einen festen Punkt t_0, so erhält man eine g_{n+1}^r.

Sei (2) der Ansatz für die g_n^r; seien die Bedingungsgleichungen (3) für diese Schar bereits auf die Form (3a) gebracht, und nehmen wir zunächst an, daß Gleichungen (6) nicht vorkommen, daß wir es also mit einer Vollschar zu thun haben. Bilden wir dann:

8) $$F_1(z) = c_0 Z(z; t_0) + \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha Z(z; t_\alpha) + c_{n+1}$$

so können wir die Bedingungen dafür, daß diese Function eine algebraische ist, folgendermaßen schreiben:

9a) $$\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha \chi_k(t_\alpha) = 0, \qquad (\varkappa = 1,2..p-\tau)$$

9b) $$c_0 \chi_k(t_0) = 0 \qquad (\varkappa = p-\tau+1 \ldots p)$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Nicht alle Functionen χ_k, die in $t_1, t_2 \ldots t_n$ Null werden, werden auch in t_0 zu Null; dann verlangt eine der Gleichungen (9b), daß $c_0 = 0$ sei. Es ist also dann $c_0 = 0$ eine Folge der Bedingungsgleichungen, die durch den Ansatz (8) definirte Vollschar hat den Ueberschuß $\tau - 1$, die Dimension r und den Punkt t_0 zum festen Punkt und besteht aus den um t_0 erweiterten Aggregaten der gegebenen g_n^r.

b) Alle Functionen χ_k, die in $t_1, t_2 .. t_n$ Null werden, werden auch in t_0 zu Null; dann sind die Gleichungen (9b) für beliebige Werte von c_0 erfüllt, die Gleichung $c_0 = 0$ folgt nicht aus ihnen, der Ansatz (8) führt zu einer Vollschar von dem Ueberschuß τ und der Dimension $r+1$, in der t_0 nicht fester Punkt ist; und erst wenn man $c_0 = 0$ noch besonders als Bedingung (6) hinzufügt, erhält man die g_{n+1}^r, die also in diesem Falle eine Teilschar ist.

Ist die vorgelegte Schar g_n^r eine Teilschar, so gelten dieselben Schlüsse; man hat nur immer noch die Bedingungen (6) mitzunehmen.

Man kann das Resultat auch in der Form aussprechen: Ein Punkt t_0 ist dann und nur dann fester Punkt in einer Vollschar, von der $(t_0, t_1 .. t_n)$ ein Aggregat ist, wenn es eine lineare Verbindung der ψ_k gibt, die in $t_1, t_2 .. t_n$ Null wird, aber nicht in t_0 („Noether's Reductionssatz").

II. Specialscharen. Der Clifford'sche Satz.

Ist $t < 0$, so heißt die Schar Specialschar. Für eine solche hat man außer der Darstellung (4) noch eine andere. Setzt man nämlich:

10) $$x_1 : x_2 : \ldots : x_p = \psi_1 : \psi_2 : \ldots : \psi_p$$

so wird durch diese Gleichungen eine Curve im $(p-1)$ dimensionalen Raume, die Normalcurve, definirt. Von dieser wird auf Grund der Theorie der Integrale einfach [1]) gezeigt:

daß sie nicht einem Raume von weniger als $p-1$ Dimensionen angehört;

daß sie genau von der Ordnung $2p-2$ ist;

daß sie, solange das Geschlecht erhalten bleibt, nicht anders ausarten kann, als in eine doppelt überdeckte Curve der Ordnung $p-1$ (hyperelliptischer Fall);

daß jede Specialschar auf ihr durch ein lineares System linearer Räume ausgeschnitten wird, sodaß die Dimension einer Vollschar um 1 kleiner ist, als der Ueberschuß des Restes, der ein Aggregat der Schar zum vollen Schnitt der Curve mit einer M_{p-1} ergänzt. (Specialscharensatz; aus ihm folgt das Brill-Noethersche Corollar des Riemann-Roch'schen Satzes).

Clifford hat angegeben [2]), für jede Specialschar sei $2r \leqq n$. Sein Beweis läßt sich nicht halten, da er auf einer Außerachtlassung des Vorzeichens von Integralsummen beruht, die nur im hyperelliptischen Fall zulässig sein würde; die Richtigkeit des Satzes selbst haben Bertini und Segre durch Ueberlegungen bestätigt, die sich etwa folgendermaßen darstellen lassen:

Sei zunächst die Schar eine Vollschar und x_α $(\alpha = 1, 2 \ldots n)$ seien die Punkte eines ihrer Aggregate. Ein durch diese Punkte gelegter linearer Raum $(p-2)^{\text{ter}}$ Dimension (M_{p-2}) trifft die Normalcurve in $n' = 2p-2-n$ Punkten y_β, $(\beta = 1, 2 \ldots n)$, die ihrerseits eine Vollschar $g^{r'}_{n'}$ bestimmen. Gehen τ linear unabhängige M_{p-2} durch die x_α, τ' durch die y_β, so sind von den n Gleichungen:

$$11) \qquad \sum_{k=1}^{p} c_k \psi_k(x_\alpha) = 0$$

$p-\tau$, von den n' Gleichungen:

$$12) \qquad \sum_{k=1}^{p} c_k \psi_k(y_\beta) = 0$$

$p-\tau'$ von einander linear unabhängig. Betrachtet man die Gleichungen (11) und (12) zusammengenommen als ein einziges System, so können unter ihnen nicht mehr als $2p-\tau-\tau'$ linear unab-

1) Vgl. etwa die Darstellung bei Klein-Fricke, Modulfunctionen Bd. I (Lpz. p. 556).

2) Coll. papers p. 328 (a. d. J. 1878).

hängige sein. Andererseits aber weiß man, daß genau $p-1$ von ihnen linear unabhängig sind. (Denn es gibt n. V. einen M_{p-2}, der durch die x_α und die y_β geht; und giengen zwei M_{p-2} also eine M_{p-3} durch alle diese Punkte, so würde die letztere mit irgend einem weiteren Curvenpunkt durch eine M_{p-1} verbunden werden können, der dann $2p-1$ Punkte mit der Curve gemein hätte, was nicht möglich ist). Also ist $p-1 \leqq 2p-\tau-\tau'$, oder $\tau+\tau' \leqq p+1$. Aber nach dem Riemann-Roch'schen Satz ist $\tau = -n+p+r$ und nach dem Specialscharensatz $\tau' = r+1$; also folgt $2r \leqq n$, w. z. b. w.

Darüber hinaus haben aber Bertini und Segre bewiesen: das Gleichheitszeichen gilt nur für die g^r_{2p-2}, der Schnittpunkte mit allen M_{p-2}, und für gewisse Scharen des hyperelliptischen Falles.

III. Anwendungen auf die Theorie der ebenen Curven.

Die Frage, ob eine ebene Curve m^{ter} Ordnung vom Geschlechte p adjungirte Curven der Ordnung $m-3-\alpha$ $(\alpha>0)$ haben könne, hat F. Amodeo[1]) folgendermaßen in Angriff genommen:

Die allgemeinste ternäre Form dieser Ordnung enthält:

$$\frac{(m-3-\alpha)(m-\alpha)}{2}+1$$

Constante linear und homogen; die Forderung des Adjungirtseins legt diesen:

$$\sum \frac{s(s-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

Bedingungen auf; von diesen seien ϱ eine Folge der übrigen. Dann bilden die freien Schnittpunkte dieser Curven mit der Grundcurve eine Schar g^r_n von der Ordnung:

$$n = 2p-2-m\alpha$$

und der Dimension:

$$r = p-1-m\alpha+\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\varrho.$$

Da nach dem Clifford'schen Satze $n \geqq 2r$ sein muß, folgt: es muß

$$\varrho \leqq \frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$$

sein; und Amodeo hat hauptsächlich den Fall weiter verfolgt, daß

1) Linc. Rend. (5) 21, p. 462.

hier das Gleichheitszeichen gilt. Dem hat Bertini[1]) entgegengehalten, daß das Gleichheitszeichen nur für $\alpha = 0$ gelten könne, nach seinem Corollar zum Clifford'schen Satze (der hyperelliptische Fall kommt hier nicht in Betracht). Dabei übersieht er allerdings den Fall $n = r = 0$, m. a. W. den Fall, daß eine adjungirte Curve der Ordnung $m - 3 - \alpha$ existiert, die die Grundcurve nicht weiter schneidet; dieser Fall kann in der That eintreten, wenn $2p - 2$ durch m teilbar ist. Gleichwol ist die von Amodeo als Analogon zum Brill-Noether'schen Corollar aufgestellte Gleichung[2]) illusorisch, insofern auf solchen Curven durch die eine adjungirte Curve $(m - 3 - \alpha)^{ter}$ O. eben keine Schar von Punctgruppen ausgeschnitten wird[3]). Die Ungleichung, die Amodeo neuerdings[4]) an Stelle jener Gleichung setzt, kann so auch nicht richtig sein (schon weil sie nicht ungeändert bleibt, wenn man gestrichene und ungestrichene Buchstaben vertauscht); man findet vielmehr statt ihrer:

$$-m\alpha + \alpha(\alpha+3) + 2\varrho < 2(r'-r) - (n'-n) < m\alpha - \alpha(\alpha+3) - 2\varrho.$$

Immerhin würde noch zu untersuchen sein, ob nicht etwa jede Curve, deren Doppelpunkte eine so sehr specielle Lage haben, notwendig zerfällt oder noch weitere Doppelpunkte besitzt.

---

1) Ann. di Mat. (2) 22 (1893) p. 14.

2) Linc. Rend. (5) 21 p. 531.

3) [Herr Bertini teilt mir unter dem 23. Nov. mit: „er sei bei erneuter Prüfung zu denselben Conclusionen gekommen. Insbesondere habe er sich vergewissert, daß die in der Note ***) der Nr. 17 und in der Note*) der Nr. 44 seiner Abhandlung (Ann. di Mat. 22) enthaltenen Bemerkungen aufrecht zu erhalten seien: nur seien in der erstgenannten Note die Worte zu streichen: per la stessa ragione nell' ultimo teorema del § 3 deve porsi $\alpha = 0$".]

4) Ann. di Mat. (2) 24, p. 3. [Herr Amodeo teilt mir unter dem 25. Nov. mit, er habe die Formel inzwischen seinerseits richtig gestellt und komme in einer im Druck befindlichen Abhandlung auf die Frage zurück].

Göttingen, den 19. November 1896.

Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung.

Von

H. Weber, auswärtiges Mitglied.

Vorgelegt in der Sitzung am 21. November 1896.

Die Dirichletschen Methoden der Zahlentheorie beruhen auf der Untersuchung eines n-fachen Integrals über ein endliches Gebiet, oder wie man sich ausdrücken kann, auf der Bestimmung des Volumens eines endlichen Stückes in einem n-dimensionalen Raume. Den Hauptsatz, auf den es hier ankommt, will ich zunächst formulieren.

Es mögen n Variable $x_1, x_2, \ldots x_n$ als rechtwinklige Coordinaten in einem n-dimensionalen Raume gedeutet werden. Durch n Schaaren von Ebenen, (lineare Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen: $x_1 = \text{const.} \ldots x_n = \text{const.}$) deren Individuen in der Entfernung Δ von einander je einer der Coordinatenebenen parallel laufen, ist dieser Raum in ein cubisches Gitter getheilt, dessen einzelne Würfel δ den Volumeninhalt Δ^n haben. Die Ecken dieser Würfel heißen die Gitterpunkte, die Würfel δ selbst die Elementarwürfel. In diesem Raume ist ein Volumen V abgegrenzt, das sich nicht ins Unendliche erstreckt, und dessen Begrenzung bestimmt ist durch eine endliche Anzahl von Oberflächenstücken (Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen) deren jede durch eine analytische Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \tag{1}$$

bestimmt ist. Die Punkte der Begrenzung sollen mit zu V gerechnet werden. Bezeichnet man dann mit T die Anzahl der in dem Bereich V liegenden Gitterpunkte und mit V zugleich den numerischen Werth des Volumens, so ist

$$V = \operatorname{Lim} T\Delta^n \tag{2}$$

wenn Δ sich der Grenze Null nähert. Dies ist im Grunde nichts anderes als die Definition des Volumens durch ein n-faches Integral. Der Nutzen dieser Formel besteht darin, daß man das n-fache Integral V auf andere Weise, etwa durch Einführung anderer Variablen genau bestimmen kann, und so einen genäherten Ausdruck für die Anzahl T der Gitterpunkte erhält.

Es giebt aber manche Fragen, die den Dirichletschen Methoden zugänglich sind, für die die Formel (2) noch eine genauere Fassung fordert. Ich erwähne unter diesen Fragen besonders die nach der Vertheilung der Primideale auf die verschiedenen Idealclassen oder auf die Nebengruppen zu irgend einer anderen Idealgruppe.

Der Satz, den wir unter einer gleich auszusprechenden Voraussetzung beweisen wollen, ist in der Formel enthalten.

1) Es ist

$$V = T\Delta^n + M\Delta, \tag{3}$$

wenn M eine Function von Δ bedeutet, die mit unendlich abnehmendem Δ nicht unendlich wird, oder, genauer ausgedrückt, die, wie klein auch Δ sei, immer zwischen zwei endlichen Grenzen $\pm C$ eingeschlossen bleibt[1]).

Ich führe diesen Satz zunächst auf einen anderen zurück. Unter den Elementarwürfeln δ werden solche vorkommen, die in ihrem Inneren Punkte der Begrenzung von V enthalten, die durch die Oberfläche von V zerschnitten genannt werden können. Auch hier mögen unter den zerschnittenen Würfeln die mitgezählt werden, die etwa nur einen Punkt mit der Begrenzung von V gemein haben. Die Anzahl dieser zerschnittenen Würfel sei Z. Da T die Anzahl der Gitterpunkte innerhalb V ist, so ist T zugleich die Anzahl der Elementarwürfel, von denen eine, nämlich die den kleinsten Coordinatenwerthen entsprechende Ecke innerhalb V liegt. Wenn ich aber zu diesen Würfeln alle zerschnittenen Würfel hinzufüge, auch die darunter schon enthaltenen nochmals mitzähle, so erhalte ich ein Gesammtvolumen, was größer ist als V; ebenso erhalte ich, wenn ich das Volumen aller zerschnittenen Würfel

1) Dieser Satz findet sich bei Minkowski („Geometrie der Zahlen", Leipzig 1896, S. 62) unter Voraussetzungen abgeleitet, die nicht ganz auf den hier vorliegenden Fall passen. Einen von den hier mitgetheilten verschiedenen, jedoch auf ganz ähnlichen Betrachtungen beruhenden Beweis für unseren Fall hat mir Minkowski am 18. Mai 1896 brieflich mitgetheilt.

von dem Gesammtvolumen der T Würfel δ abziehe, ein Volumen, was kleiner ist als V; folglich

$$(4) \qquad (T-Z)\Delta^n < V < (T+Z)\Delta^n$$

und es ist also nur zu beweisen

2) daß $Z\Delta^{n-1}$ für beliebig kleine Δ zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleibt. Der Satz ist offenbar richtig für $n = 1$, wenn in diesem Falle das Volumen V aus einer endlichen Anzahl endlicher Strecken besteht, weil dann Z höchstens gleich der Anzahl der Endpunkte dieser Strecken ist. Wir wenden also bei dem allgemeinen Beweise die vollständige Induction an, indem wir von dem Volumen V die Voraussetzung machen, daß seine Begrenzung aus einer endlichen Anzahl von Stücken S besteht, so daß in jedem dieser Stücke eine der Coordinaten, etwa x_1, als stetige Function der übrigen bestimmt ist, und daß auch die partiellen Ableitungen

$$(5) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_3}, \quad \cdots \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_n}$$

in S endliche und stetige Functionen sind. Es genügt offenbar, den Satz 2 für jedes einzelne dieser Stücke S zu beweisen.

Es braucht nicht ausgeschlossen zu werden, daß die Größen (5) in einzelnen Punkten von S, wie etwa in einer Kegelspitze, unbestimmt werden, wenn sie nur bei der Annäherung an diesem Punkt in endlichen Grenzen eingeschlossen bleiben.

Ist (x) ein Punkt der Fläche S mit den Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_n$, so sei nach unserer Voraussetzung

$$x_1 = \varphi(x_2, \ldots x_n),$$

und für einen benachbarten, gleichfalls in S gelegenen Punkt $(x+\xi)$

$$x_1 + \xi_1 = \varphi(x_2 + \xi_2, \ldots x_n + \xi_n).$$

Wenden wir nun auf die Function $\varphi(x_2 + t\xi_2, \ldots x_n + t\xi_n)$ den Taylorschen Lehrsatz an, und setzen dann $t = 1$, so ergiebt sich, wenn Θ ein echter Bruch ist,

$$(6) \qquad \xi_1 = \xi_2 \varphi'(x_2 + \Theta\xi_2) + \cdots + \xi_n \varphi'(x_n + \Theta\xi_n).$$

Wir bezeichnen nun mit V' die Projection von S in die Ebene $x_1 = 0$, so daß V' ein $(n-1)$ dimensionales Volumen ist, und setzen voraus, daß nicht nur die Projectionen der Punkte (x) und $(x+\xi)$ sondern auch die gerade Verbindungslinie dieser Projectionen ganz innerhalb V' liegt. Sind dann die $\xi_2, \ldots \xi_n$ in (6) alle kleiner als Δ, so folgt aus (6) nach der Voraussetzung über die

Differentialquotienten (5)

$$-a\Delta < \xi_1 < a\Delta \tag{7}$$

worin a eine von Δ unabhängige positive endliche Zahl ist.

Ist δ' die Projection eines Elementarwürfels δ in die Ebene $x_1 = 0$, also $\delta' = \Delta^{n-1}$ ein $(n-1)$-dimensionaler Würfel, so ist, wenn δ' ganz innerhalb V' liegt, die größte Schwankung σ der Function x_1 innerhalb δ' wegen (7)

$$\sigma < a\Delta. \tag{8}$$

Liegt aber δ' nur zum Theil innerhalb V', wird es also durch die Begrenzung von V' zerschnitten, so ist sicher, da ja die Function x_1 selbst schon endlich ist

$$\sigma < b, \tag{9}$$

wenn b wieder eine von Δ unabhängige positive Zahl ist.

Die Anzahl der Elementarwürfel δ, die durch den über δ' liegenden Theil der Fläche S zerschnitten werden, ist aber sicher nicht größer als $\sigma : \Delta$. Es sollen nun T', Z' dieselbe Bedeutung für V' haben, wie T, Z für V. Dann ist T' die Anzahl der Gitterpunkte im Innern von V', und die Anzahl der Elementarwürfel δ', die ganz im Innern von V' liegen, ist nicht größer als T', und wenn also Z_1 die Anzahl der Würfel δ ist, die von allen über diesen δ' gelegenen Theilen der Fläche S zerschnitten werden, so ist nach (8)

$$Z_1 \leqq aT'$$

Die Anzahl der durch die Begrenzung von V' zerschnittenen Würfel δ' ist Z'; folglich ist die Anzahl aller der Würfel δ, die von dem über diesen δ' gelegenen Theile von S zerschnitten werden

$$Z_2 \leqq \frac{bZ'}{\Delta}$$

und es ist also die Gesammtzahl aller von S zerschnittenen Würfel

$$Z \leqq aT' + \frac{bZ'}{\Delta}$$

folglich

$$Z\Delta^{n-1} \leqq aT'\Delta^{n-1} + bZ'\Delta^{n-2}. \tag{10}$$

Nun hat $T'\Delta^{n-1}$ für unendlich abnehmende Δ den Grenzwerth V', und bleibt also unter einer endlichen Grenze, wenn Δ einen beliebig anzunehmenden oberen Grenzwerth nicht überschreitet.

Nach der Annahme, die wir gemacht haben, daß das Theorem 2) für $n-1$ Dimensionen bereits bewiesen sei, bleibt auch $Z'\Delta^{n-1}$ endlich und unser Satz ist dadurch bewiesen.

In den Problemen der Zahlentheorie, auf die dieses Theorem angewandt werden soll, wird die Begrenzung folgendermaßen bestimmt[1]).

Es seien $y_1, y_2, \dots y_n$ von einander unabhängige lineare homogene Functionen der $x_1, x_2, \dots x_n$, unter denen $2\nu-n$ reelle und $n-\nu$ Paare conjugiert imaginäre vorkommen mögen. Die Veränderlichkeit der x wird zunächst so beschränkt, daß die reellen y keine negativen Werthe erhalten. Eine weitere Grenzbedingung ist

$$0 \leqq y_1 y_2 \dots y_n \leqq 1. \tag{11}$$

Um die übrigen Bedingungen zu erhalten, ordne man den Variablen y_i ein Zahlensystem δ_i so zu, daß $\delta_i = 1$ oder $= 2$ ist, je nachdem y_i reell oder imaginär ist, und setze

$$z_i = \log y_i, \tag{12}$$

wenn y_i reell ist, und

$$z_i = \log y_i y_i', \tag{13}$$

wenn $y_i y_i'$ ein conjugiert imaginäres Paar ist. Es sind nun ferner $\nu(\nu-1)$ reelle Zahlwerthe $l_{i,\varkappa}$ $(i = 1, 2, \dots \nu-1;\ \varkappa = 1, 2, \dots \nu)$ gegeben, so daß

$$l_{i,1} + l_{i,2} + \dots + l_{i,\nu} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots \nu-1) \tag{14}$$

und daß die Determinante $\Sigma \pm l_{1,1} \dots l_{\nu-1,\nu-1}$ von Null verschieden ist. Dann werden die Größen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu$ durch die linearen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 l_{1,1} + \dots + \xi_{\nu-1} l_{\nu-1,1} + \delta_1 \xi_\nu &= z_1 \\ \xi_1 l_{1,2} + \dots + \xi_{\nu-1} l_{\nu-1,2} + \delta_2 \xi_\nu &= z_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \xi_1 l_{1,\nu} + \dots + \xi_{\nu-1} l_{\nu-1,\nu} + \delta_\nu \xi_\nu &= z_\nu \end{aligned}\right. \tag{15}$$

bestimmt, um für das Volumen V die noch fehlenden Grenzbedingungen

$$0 \leqq \xi_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \xi_2 \leqq 1, \quad \dots \quad 0 \leqq \xi_{\nu-1} \leqq 1 \tag{16}$$

zu erhalten.

1) Vgl. Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl. (Braunschweig 1894) § 184 oder auch den zweiten Band meines Lehrbuchs der Algebra (Braunschweig 1896) § 189.

Für ξ_ν ergiebt sich wegen (12), (13), (14)

$$n\xi_\nu = \log y_1 y_2 \dots y_n, \tag{17}$$

und wenn man die Gleichungen (15) für die ξ auflöst, so erhält man aus (16) für die Begrenzung des Volumens V $2\nu-2$ Gleichungen, die alle die Form haben

$$y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2} \dots y_n^{\gamma_n} = c, \tag{18}$$

worin $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ reelle, der Bedingung

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 0 \tag{19}$$

genügende Zahlen sind, während c eine von Null verschiedene positive Constante ist.

Die Variable ξ_ν kann wegen (11) und (17) innerhalb V keine positiven, aber beliebige negative Werthe erhalten.

Hiernach ergeben die Gleichungen (15) Folgendes für das Bereich V:

Da die ε nicht positiv über alle Grenzen wachsen können, so können die y dem absoluten Werthe nach nicht über alle Grenzen wachsen, und die x sind daher auch zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen.

Eine der Grössen ε kann nur dann negativ unendlich werden, wenn ξ_ν negativ unendlich wird, und dann sind alle ε negativ unendlich. Daraus folgt, daß eine der Größen y innerhalb V nur dann verschwinden kann, wenn alle y zugleich verschwinden, d. h. im Coordinatenanfangspunkt.

Eliminirt man ξ_ν aus irgend zwei der Gleichungen (15), so ergiebt sich, daß die Differenzen $\delta_i\varepsilon_k - \delta_k\varepsilon_i$ alle innerhalb V endliche Werthe haben, und dies hat zur Folge, daß die Verhältnisse $y_i : y_k$ irgend zweier der y innerhalb V in endlichen Grenzen eingeschlossen sind.

Wenn sich durch Differentiation einer der Grenzgleichungen

$$Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \dots + Y_n dy_n = 0 \tag{20}$$

ergiebt, so sind die $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ homogene Functionen der $y_1, y_2, \dots y_n$ und folglich auch der $x_1, x_2, \dots x_n$, die in keinem Punkte von V, mit Ausnahme des Nullpunktes verschwinden, und deren Verhältnisse in endlichen Grenzen eingeschlossen sind. Wenn sich durch Einführung der Variablen x statt der y aus (20)

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n = 0 \tag{21}$$

ergiebt, so sind die X_i lineare homogene Functionen der Y_i die also nur im Coordinatenanfangspunkt alle verschwinden. Wenn

in irgend einem Begrenzungspunkt X_1 von Null verschieden ist, so kann man ein diesen Punkt umgebendes Begrenzungsstück von endlicher Ausdehnung angeben, in dem die partiellen Ableitungen (5) endlich sind, und dies Stück reicht, wenn es auf einer der Kegelflächen (18) liegt, bis zu dem Nullpunkt. Daraus ergiebt sich, daß hier die Voraussetzungen unseres Satzes erfüllt sind.

Zur Veranschaulichung diene der Fall $n = 3$. Ist y_1 reell, y_2, y_3 conjugiert imaginär, so ist $\nu = 2$ und die Begrenzung von V besteht aus den beiden Kegelflächen

$$y_1^2 = y_2 y_3, \quad y_1^2 = c y_2 y_3,$$

von denen die eine ganz in der anderen liegt, und der hyperbolischen Fläche dritten Grades

$$y_1 y_2 y_3 = 1$$

mit der Asymptotenebene $y_1 = 0$, und der Asymptotenaxe $y_2 = y_3 = 0$. Sind aber y_1, y_2, y_3 reell, so ist $\nu = 3$. Die Begrenzung besteht aus vier Stücken von, im allgemeinen transcendenten, Kegelflächen, deren gemeinschaftliche Spitze der Anfangspunkt ist, und aus der hyperbolischen Fläche dritter Ordnung $y_1 y_2 y_3 = 1$ mit den drei Asymptotenebenen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Die Gestalt des Körpers V ist etwa die einer dreiseitigen Pyramide mit gekrümmten Flächen.

Ueber Linienconnexe.

Von

E. v. Weber in München.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung am 21. November 1896.

1. In der gewöhnlichen Connextheorie wird die Combination von Punkt und Ebene als Raumelement zu Grunde gelegt und dadurch die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung invariantentheoretischer Behandlungsweise zugänglich gemacht; die vorliegende Mitteilung stellt sich die Aufgabe zu zeigen, daß man durch Einführung des Geradenpaars als Raumelement für eine ausgedehnte Classe partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung einen ganz analogen Ansatz gewinnt.

2. Es seien $x_1, \dots x_6$; $y_1, \dots y_6$ die auf dieselben Fundamentalcomplexe bezogenen Klein'schen Coordinaten zweier Geraden, so daß die Relationen:

$$\omega(x) \equiv \sum x_i^2 = 0, \quad \omega(y) = 0 \tag{1}$$

bestehen; wir bezeichnen dann die ∞^7 Geradenpaare, die durch eine sowohl in den x_i als auch in den y_i homogene Gleichung:

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

bestimmt sind, als einen „Linienconnex", die ∞^7 durch die Relation

$$\omega(x, y) \equiv \sum x_i y_i = 0 \tag{3}$$

definierten Paare sich schneidender Geraden als den „Hauptconnex", die ∞^6 gemeinsamen Paare zweier Connexe als deren „Coincidenz", die ∞^6 durch (2), (3) bestimmten Geradenpaare insbesondere als die „Hauptcoincidenz des Connexes (2)".

3. Jedem Paar sich schneidender Linien ist eine Schaar von ∞^1 Flächenelementen zweiter Ordnung:

$$x, y, z, p, q, r, s, t \tag{4}$$

in folgender Weise zugeordnet: x, y, z sollen die auf irgend 3 rechtwinklige Axen bezogenen Coordinaten ihres Schnittpunkts,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

die Richtungscoefficienten ihrer Ebene bedeuten; die Verhältnisse der zweiten Ableitungen r, s, t endlich seien durch die Forderung bestimmt, daß die beiden Geraden die Haupttangenten des Elements (4) seien, d. h. die Fläche:

$$Z - z = p(X-x) + q(Y-y) + \tfrac{1}{2}[r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2]$$

im Punkte x, y, z dreipunktig berühren. Die ∞^6 Geradenpaare einer Hauptcoincidenz (2), (3) definieren solcherweise im ganzen ∞^7 Elemente 2. Ordnung, welche einer in r, s, t homogenen Gleichung:

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{5}$$

genügen, und umgekehrt entspricht jeder derartigen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung eine bestimmte Hauptcoincidenz[1]).

4. Eine beliebige Integralfläche der Gleichung (5) hat die Eigenschaft, daß in jedem ihrer Punkte die beiden Haupttangenten dem Connex (2) angehören, und werde als Integralfläche des Connexes (2) bezeichnet. Die ∞^3 Haupttangentenpaare x_i, y_i einer jeden Fläche genügen nun außer den Relationen (1), (3) noch den folgenden totalen Differentialgleichungen:

$$\omega(x, dy) = 0, \quad \omega(dx, dy) = 0. \tag{6}$$

Sind nämlich x_i, y_i; $x_i + dx_i, y_i + dy_i$ zwei benachbarte Paare sich schneidender Linien, p, p' ihre Schnittpunkte, π, π' ihre Ebenen, so drückt die erste Relation (6) aus, daß p' auf π gelegen ist, d. h. daß die Flächenelemente 1. Ordnung (p, π) und (p', π') sich in vereinigter Lage befinden[2]), und die zweite Relation, daß

1) Eine Ausnahme bildet offenbar nur die Gleichung $rt - s^2 = 0$, welcher die ∞^4 doppelt zählenden Geraden des Raumes entsprechen.

2) Vgl. Königs, la géometrie réglée, Paris 1895, Chap. IV.

die Linien x_i, y_i zu der Verbindungsgeraden von pp' und der Schnittgeraden von $\pi\pi'$ harmonisch liegen. Die allgemeinste ∞^2-Schaar von Paaren sich schneidender Linien, welche den Gleichungen (6) Genüge leistet, besteht nun offenbar entweder 1° aus den ∞^2 Haupttangentenpaaren einer Fläche, oder 2° aus den ∞^2 Linienpaaren, die man erhält, wenn man in jedem Flächenelement 1. Ordnung (p, π) einer Serie von ∞^1 benachbarten vereinigt liegenden Elementen $(p, \pi), (p', \pi'), \ldots$ die ∞^1 Geradenpaare betrachtet, die durch p gehen, in π liegen und zu den Geraden $\overline{pp'}$, $\overline{\pi\pi'}$ harmonisch liegen; 3 oder 3° aus ∞^3 Linienpaaren durch einen Punkt; wir können daher das zu dem Connex (2) gehörige Integrationsproblem allgemein so formulieren:

„Alle zweigliedrigen Schaaren von Linienpaaren x_i, y_i zu finden, welche die Gleichungen (1), (2), (3), (6) identisch erfüllen."

5. Zu jedem Linienpaar x_i, y_i der Coincidenz (2), (3) gibt es im allgemeinen ein benachbartes, in derselben Ebene π gelegenes, durch denselben Punkt p gehendes Paar $x_i + \varepsilon y_i$, $y_i + \varepsilon' x_i$, das gleichfalls der Coincidenz angehört. Die infinitesimalen Größen $\varepsilon, \varepsilon'$ genügen der Gleichung:

$$\varepsilon F_y + \varepsilon' F_x = 0$$

$$\left(F_y \equiv \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} y_i; \quad F_x \equiv \sum \frac{\partial F}{\partial y_i} x_i\right).$$

Die beiden gleichfalls in π gelegenen und durch p gehenden Geraden, deren Coordinaten ξ_k, η_k durch die Formeln

$$(7) \qquad \varrho \xi_k = \sqrt{F_y} x_k + i \sqrt{F_x} y_k, \quad \varrho \eta_k = \sqrt{F_y} x_k - i \sqrt{F_x} y_k$$

gegeben sind, liegen zu den beiden benachbarten Linienpaaren der Coincidenz harmonisch und mögen als das „zu dem Linienpaar x_i, y_i adjungierte Paar" bezeichnet werden. In jedem Punkt einer Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (5) definieren die beiden zu dem Haupttangentenpaar adjungirten Geraden die characteristischen Richtungen. Es gibt im allgemeinen ∞^6 verschiedene Linienpaare, die zu den ∞^6 Paaren der Coincidenz (2), (3) bezw. adjungiert sind; die so definirte Coincidenz werde „die zur gegebenen adjungierte" genannt. Die Beziehung zwischen beiden Coincidenzen ist augenscheinlich covariant (d. h. bei beliebiger simultaner Geradentransformation der x_i, y_i unzerstörbar) und überdies reciprok.

6. Setzt man

$$F_{\bar{x}\bar{x}} \equiv \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} \bar{x}_i \bar{x}_k, \quad F_{xx} \equiv \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_k} y_i x_k, \quad F_{yy} \equiv \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \bar{y}_i y_k,$$

so liefert die Relation

$$F_{\bar{x}\bar{x}} F_y^2 - F_{xx} F_{\bar{x}} F_y + F_{yy} F_{\bar{x}}^2 = 0$$

die Bedingung dafür, daß das Linienpaar (7) zu drei aufeinanderfolgenden Paaren der Coincidenz harmonisch liegt. Ist diese Gleichung vermöge (1), (2), (3) identisch erfüllt, so bilden immer je ∞^1 in derselben Ebene befindliche und durch denselben Punkt gehende Linienpaare eine Involution, bestimmen also dasselbe adjungierte Paar, und es existieren solcher Paare dann nur ∞^5. Die linke Seite der Gleichung (5) zerfällt dann (und nur dann) in Faktoren, die alle in rst linear und homogen sind[1]). Dies tritt z. B. ein bei dem folgenden Spezialfall des lineo-linearen Connexes:

$$\sum a_{ik} x_i y_k = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}). \tag{8}$$

Die adjungierten Linienpaare erfüllen hier, außer den in ξ, η geschriebenen Relationen (1), (3), noch die folgenden beiden:

$$\sum a_{ik} \xi_i \xi_k = 0, \quad \sum a_{ik} \eta_i \eta_k = 0.$$

Man schließt daraus leicht, daß die Integralflächen des Connexes (8) nichts anderes sind als die in Bezug auf den Complex 2. Grades

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0$$

conjugierten Flächen[2]); die zugehörige partielle Differentialgleichung II. Ordnung umfaßt die Gleichung der Minimalflächen, des logarithmischen Potentials etc. als Spezialfälle.

7. Verschwindet einer der Ausdrücke F_x, $F_{\bar{x}}$ z. B. der erstere vermöge (1), (2), (3), so besteht das zu dem Paar x_i, y_i der Coincidenz adjungierte Paar stets aus der doppelt zählenden Geraden x_i; die Gleichung (2) kann mit Hülfe von (1) und (3) auf eine Form gebracht werden, in der sie die Variabeln y_i nur in den Verbindungen $x_i y_k - x_k y_i$ enthält; die Linienpaare der Coincidenz (2), (3), die in einer beliebigen Ebene liegen und durch einen beliebigen Punkt gehen, bilden nunmehr eine gewisse Zahl parabolischer Involutionen; die linke Seite der Gleichung (5) ge-

1) Abgesehen von einem eventuellen Faktor der Form $(rt - s^2)^{\frac{\nu}{2}}$.

2) Lie, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, pg. 376.

nügt jetzt der Bedingung

$$4\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2\equiv 0 \quad (\text{vermöge } \Phi = 0),$$

da die beiden Charakteristikensysteme[1]) identisch sind, und zerfällt demnach in eine gewisse Zahl von Faktoren[2]) der Form

$$r+2N_i s+N_i^2 t,$$

unter den N_i Funktionen von x, y, z, p, q verstanden. Dies tritt z. B. ein, wenn F die y_i überhaupt nicht enthält; die Gleichung (5) geht dann über in die partielle Differentialgleichung der Regelflächen des durch (2) dargestellten Complexes[3]).

8. Verschwinden die beiden Ausdrücke F_x, F_y vermöge der Relationen (1), (2), (3), so kann die Gleichung (2) auf die folgende Form gebracht werden:

$$(9) \qquad f([12],[13],\ldots[56]) = 0 \quad ([ik]\equiv x_i y_k - x_k y_i).$$

Wir betrachten die 15 Grössen $[ik]$, in denen x_i, y_i die Coordinaten zweier sich schneidender Linien bedeuten, und die demnach nur 5 unabhängige Bestimmungsstücke darstellen, als die Coordinaten des Flächenelements I. Ordnung (p, π), unter p den Schnittpunkt, unter π die Ebene der beiden Geraden verstanden. Die Coincidenzgleichungen (3), (9) definieren demnach ∞^4 Elemente I. Ordnung, derart, daß durch sie jede Gerade x_i oder y_i ∞^1 Elemente, die sich an sie anschließen, zugewiesen erhält. Die Gleichung (5) geht nunmehr in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung über[2]); umgekehrt entspricht jeder solchen Gleichung eine ganz bestimmte Hauptcoincidenz der Form (3), (9). Doch liefern bei der gegenwärtigen Auffassung die ∞^3 Haupttangentenpaare einer Integralfläche der Gleichung I. Ordnung nur ein singuläres Integral des Connexes (9); das allgemeine besteht aus den ∞^3 Linienpaaren, die zu einem beliebigen Streifen von Elementen der Gleichung I. Ordnung in der unter No. 4 geschilderten Weise gehören.

Die Theorie der besonderen Linienconnexe (9) erscheint sonach als liniengeometrisches Aequi-

---

1) Vgl. z. B. Goursat, Leçons sur l'integration des équations aux dérivées partielles du second ordre, Paris 1896, Chap. IV.

2) Vgl. die erste Anm. pag. 285.

3) Vgl. Lie, l. c. p. 370 f.

valent der gewöhnlichen Connextheorie im R_3. So führt z. B. der spezielle lineo-lineare Connex:

$$\sum a_{ik}[ik] = 0$$

auf das gleiche Integrationsproblem, wie der Clebsch'sche Connex (1,1), nämlich auf eine in den ersten Ableitungen lineare partielle Differentialgleichung I. Ordnung, deren ∞^3 Charakteristiken aus den Bahnkurven der allgemeinsten eingliedrigen projektiven Gruppe des R_3 bestehen.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß sich die vorstehenden Entwickelungen vermöge der bekannten Abbildung auf's leichteste in die Sprache der Lie'schen Kugelgeometrie übersetzen lassen.

München, im August 1896.

Ueber die ungleichmäßige Convergenz und die gliedweise Integration der Reihen.

Von

W. F. Osgood in Cambridge, Mass., U. S. A.

(Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung am 21. November 1896.)

In vorliegender Note sollen die hauptsächlichsten Resultate einer Untersuchung (I) über die allgemeinste Art der Convergenz einer den Bedingungen (A) genügenden Function $s_n(x)$, wenn n ins Unendliche wächst, und (II) über die gliedweise Integration der Reihen mitgeteilt werden. Die Ausführung der Beweise wird demnächst im Amer. Jour. of Math. erscheinen.

Die geometrische Anschauung hat sich in hohem Grade heuristisch bewährt und ich habe dieselbe a. o. c. O. in voller Klarheit hervortreten lassen. Doch die Resultate sind durchaus arithmetische und deshalb habe ich dieselben hier der Kürze halber auch nur in arithmetischer Form ausgesprochen.

Indem ich mir für später vorbehalte, die hiermit für die gliedweise Integration der Reihen gewonnenen Sätze auf die damit eng verwandten Probleme der gliedweisen Differentiation der Reihen, der Differentiation unter dem Integralzeichen und der Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen beim Doppelintegral zu übertragen, teile ich hier nur vorläufig ein Beispiel solcher Uebertragung mit.

Die Bedingungen (A). 1) Es mögen $u_1(x), u_2(x), \ldots$ stetige Functionen der reellen Veränderlichen x im Interval (a, b): $a \leqq x \leqq b$ sein; dann wird $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ ebenfalls stetig sein; 2) $s_n(x)$ soll gegen einen endlichen Grenzwert $f(x)$ convergiren, wenn x constant bleibt und n ins Unendliche wächst; 3) $f(x)$ soll stetig sein.

Die X-, ξ-, ζ-Punkte. Man nehme x_0 im Interval (a, b) beliebig an. Es seien $x', x'' \ldots$ mit $\lim_{i=\infty} x^{(i)} = x_0$; $n', n'' \ldots$ mit $\lim_{i=\infty} n^{(i)} = \infty$ zwei sogleich näher zu bestimmende Reihen von x-

Erwähnt sei noch, daß die ξ-Punkte in jedem Interval sowohl abzählbar als nicht-abzählbar sein können; ferner, daß die Q-Punkte in keinem Interval ein Continuum bilden können.

Das Problem der gliedweisen Integration der Reihen läßt sich, wie folgt, formuliren: Wann wird

$$\int_{x_0}^{x}\left[\lim_{n=\infty} s_n(x)\right]dx = \lim_{n=\infty}\left[\int_{x_0}^{x} s_n(x)\,(dx)\right]$$

sein? Darauf gebe ich folgende Antwort.

Falls im Integrationsinterval (x_0, x) kein X-Punkt vorkommt, so wird obige Gleichung stets bestehen, d. h. die gliedweise Integration wird stets gestattet sein. Und ferner:

Kommt im Interval (a, b) kein X-Punkt vor, so wird

$$\int_{x_0}^{x} s_n(x)\,dx, \quad a \leqq x_0 \leqq b, \quad a \leqq x \leqq b,$$

als Function von x_0, x betrachtet, **gleichmässig** gegen $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ convergiren, wenn n ins Unendliche wächst.

Wenn dagegen X-Punkte in (a, b) vorhanden sind, so kann $\int_{x_0}^{x} s_n(x)dx$ bei wachsendem n divergiren oder nach einem Grenzwert convergiren, der keine stetige Function von x ist. Es liegt die Frage nahe, ob der Grenzwert eine stetige Function von x sein könnte, die trotzdem nicht mit $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ zusammenfiele, wofern $x \neq x_0$; ob also die gliedweise Integration der u-Reihe zu einer Reihe führen könnte, deren Wert eine stetige Function von x, jedoch nicht gleich dem Integral der ursprünglichen Reihe wäre. Durch die wirkliche Aufstellung einer solchen Reihe weise ich zunächst die Existenz derartiger Reihen nach. Aber noch mehr. Ich zeige, daß die Mengen G der X-Punkte in zwei Klassen zerfallen: gehört eine vorgelegte G zu der ersten Klasse, so kann sich die Sache niemals so verhalten wie im eben erwähnten Beispiel; gehört sie dagegen zur zweiten Klasse, so giebt es stets $s_n(x)$, wofür das Beispiel typisch ist. In der That, ist G abzählbar, so giebt es nach Hrn. Cantor stets eine Zahl α der ersten oder der zweiten Zahlenklasse, wofür $G^{(\alpha)} \equiv 0$, und G gehört zur ersten der eben erwähnten beiden Klassen. Ist aber G nicht abzählbar, so läßt sich stets aus G eine perfecte Menge

resp. n-Werten und man fasse die Größe $s_{n^{(i)}}(x^{(i)})$ ins Auge. Drei Fälle sind möglich: a) $x^{(i)}, n^{(i)}$ lassen sich so annehmen, daß $\lim_{i=\infty} |s_{n^{(i)}}(x^{(i)})| = \infty$; b) $x^{(i)}, n^{(i)}$ lassen sich so annehmen, daß $\lim_{i=\infty} s_{n^{(i)}}(x^{(i)}) \neq f(x_0)$, ohne daß dabei Fall a) notwendig vorläge; c) wie auch immer $x^{(i)}, n^{(i)}$ angenommen werden mögen, stets ist $\lim_{i=\infty} s_{n^{(i)}}(x^{(i)}) = f(x_0)$. In den drei Fällen soll x_0 resp. als X-, ξ-, ζ-Punkt bezeichnet werden.

Die Punktmengen G und Q. Ist eine Punktmenge nirgends dicht und enthält dieselbe ihre Ableitung, so bezeichne ich sie mit G, (woran nötigenfalls ein Index gehängt wird). Wird eine Reihe von Punktmengen $G: G_1, G_2, \ldots$ vorgelegt, die so beschaffen sind, daß alle Punkte von G_i in $G_{i'}$, $i' > i$, vorkommen, so wird die Menge derjenigen Punkte, die eventuell in einer G_i vorkommen, als eine Punktmenge Q bezeichnet. Es liegt nahe zu schreiben: $Q = \lim_{i=\infty} G_i$. Umgekehrt soll jede Menge als eine Q bezeichnet werden, falls sich eine G_i finden läßt, derart daß im soeben erklärten Sinne $Q = \lim_{i=\infty} G_i$.

Unter Benutzung dieser Bezeichnungen lassen sich folgende Sätze aussprechen.

Die X-Punkte bilden eine Menge G und umgekehrt entspricht jeder G eine den Bedingungen (A) genügende Function $s_n(x)$, deren X-Punkte ausschließlich aus den Punkten von G bestehen[1]).

Die ζ-Punkte liegen in jedem Interval überall dicht und nicht-abzählbar.

Die ξ-Punkte bilden eine Punktmenge Q; und umgekehrt entspricht jeder Menge Q eine den Bedingungen (A) genügende Function $s_n(x)$, deren ξ-Punkte ausschließlich aus den Punkten von Q bestehen.

Da die ξ- und die ζ-Punkte sich gegenseitig ergänzen, so ergiebt sich aus dem letzten Satz sofort ein Satz über die ζ-Punkte. Die Frage: Welche Punktmengen können als ξ- resp. ζ-Punkte fungiren? ist somit auf ein Problem in der Punktmengenlehre zurückgeführt.

1) In einem Aufsatz: Ueber die Integration der Reihen, Sitz.-Ber. d. Berliner Akad. 1886, p. 359 hat du Bois Reymond ein Beispiel mitgeteilt, woran er gezeigt zu haben glaubte, daß die X-Punkte überall dicht liegen können. Auch in seiner Behandlung des Hauptproblems treten falsche Ansichten zu Tage, so daß es ihm ein leichtes war, indem er den eigentlichen Sachverhalt verkannte, den allerdings richtigen Satz aufzustellen, daß die gliedweise Integration erlaubt sei, wofern im Integrationsinterval keine X-Punkte auftreten.

aussondern, und G gehört zur zweiten Klasse. In einem Satz zusammengefaßt lautet das Ergebniß, wie folgt:

Ist das Resultat einer gliedweisen Integration der u-Reihe:

$$\int_{x_0}^{x} u_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2(x)\,dx + \cdots$$

eine stetige Function von x (m. a. W. ist $\lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x} s_n(x)\,dx$ stetig) und ist die Menge G der X-Punkte eine abzählbare, so genügt das, damit die gliedweise Integration gestattet sei, d. h. damit

$$\int_{x_0}^{x} \left[\lim_{n=\infty} s_n(x)\right] dx = \lim_{n=\infty} \left[\int_{x_0}^{x} s_n(x)\,dx\right].$$

Ist dagegen G nicht abzählbar, so ist die erste Bedingung nicht genügend, da es dann stets u-Reihen giebt, deren X-Punkte ausschließlich aus den Punkten der Menge G bestehen und welche gliedweise integrirt stetige Functionen bilden, die dem Integral der u-Reihe nicht gleich sind.

Dies ist, soviel ich weiß, die allgemeinste bisher bekannte hinreichende Bedingung für die gliedweise Integration der u-Reihe. Jede allgemeinere Bedingung würde dem Verhalten von $s_n(x)$ in der Nähe eines X-Punktes offenbar noch engere Einschränkungen auferlegen müssen.

Aus den vorangehenden Sätzen über die gliedweise Integration der Reihen geht beispielsweise folgender Satz über die gliedweise Differentiation derselben hervor.

Besitzt die Function $U(x)$ eine für alle Werte von x: $a \leqq x \leqq b$ stetige Ableitung und wird $U(x)$ durch eine Reihe dargestellt:

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) + \cdots$$

wobei $U_i(x)$ eine stetige Ableitung $u_i(x)$ zukommt; convergirt außerdem die Reihe der Ableitungen gegen einen stetigen Grenzwert $u(x)$:

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

so läßt sich die U-Reihe gliedweise differentiiren:

$$U'(x) = u(x).$$

Cambridge, Mass., U. S. A., im Sept. 1896.

Ueber Goldbachs empirisches Theorem: Jede grade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden.

Von

Paul Stäckel in Königsberg i. Pr.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. December 1896 von D. Hilbert.

1. Die Vermutung Goldbachs, daß jede grade Zahl als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden könne[1]), hat für die ersten fünfhundert graden Zahlen durch die Tabelle Bestätigung gefunden, die auf Veranlassung von Georg Cantor berechnet worden ist[2]). Diese Tabelle zeigt sogar, daß die Anzahl der Darstellungen von $2n$ in dem Intervalle von 2 bis 1000, abgesehen von Schwankungen wie sie zahlentheoretische Functionen zu zeigen pflegen, mit wachsendem n beständig wächst, und dieser Umstand ist geeignet, Vertrauen in die allgemeine Gültigkeit des Goldbachschen Theorems zu erwecken[3]) und zu Untersuchungen über den Gegenstand anzuregen.

Die Cantorsche Tabelle giebt für jede grade Zahl $2n$ von 2 bis 1000 diejenigen Primzahlen x, für die $2n - x = y$ wieder eine Primzahl ist, wobei $x \leqq y$ vorausgesetzt wird; dahinter steht die

---

1) Man vergleiche die Briefe Goldbachs und Eulers vom 7. und 30. Juni 1742, die 1843 in dem ersten Bande der *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième siècle* (S. 127 und S. 135) veröffentlicht worden sind. Auch Waring hatte 1770 in seinen *Meditationes algebraicae* dieselbe Vermutung ausgesprochen.

2) *Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach.* Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Caen 1894. Schon 1853 behauptete Desboves (Nouvelles Annales, t. XIV. S. 293), das Theorem sei bis 10000 verificirt worden.

3) Die Bedenken Lionnets (Nouvelles Annales, 2e série, t. XVIII. 1879. S. 356) scheinen mir nicht entscheidend zu sein.

Anzahl dieser Primzahlen x. Abweichend hiervon soll im Folgenden einer jeden graden Zahl $2n$ als Goldbachsche Zahl

$$G_{2n}$$

die Anzahl *aller* Zerlegungen von $2n$ in die Summe von zwei Primzahlen zugeordnet werden. Im Allgemeinen bedeutet daher G_{2n} das Doppelte der Anzahl in jener Tabelle; nur wenn n eine Primzahl ist, hat man das Doppelte um eins zu vermindern.

Die so definirten Zahlen G_{2n} besitzen die erzeugende Function:

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_{2n} x^{2n} = (\sum x^p)^2 = (1-x^2)^2 \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_{2r+1} x^{2r+1}\right)^2;$$

hierin bedeutet p alle ungraden Primzahlen 1, 3, 5, 7, 11, . . ., und P_{2r+1} ist die Anzahl aller ungraden Primzahlen von 1 bis $2r+1$.

2. Eine genauere Betrachtung der Zahlen G_{2n}, die Cantors Tabelle liefert, läßt erkennen, daß die Schwankungen der G_{2n} in Zusammenhang stehen mit der multiplicativen Structur von $2n$. Es wird nämlich G_{2n} für das Intervall von 200 bis 1000 mit großer Genauigkeit durch den Ausdruck

$$(9,64 + 0,029 \cdot 2n)\, J_{2n}$$

dargestellt. Hierin ist der erste Factor eine beständig wachsende Function von n, während der zweite, die Schwankungen von G_{2n} characterisirende Factor J_{2n} folgendermaßen erklärt ist: Jeder ungraden Primzahl p entspricht ein gewisser Multiplicator M_p, und zwar ist

$$M_3 = 1,88\ldots,\quad M_5 = 1,26\ldots,\quad M_7 = 1,15\ldots,\quad M_{11} = 1,08\ldots,$$
$$M_{13} = 1,07\ldots,\ \ldots;$$

mit wachsendem p nähern sich diese Multiplicatoren rasch der Grenze eins. Man ermittele nun, durch welche ungraden Primzahlen $2n$ teilbar ist. *Dabei bleibt es gleichgültig, wie oft eine Primzahl p in $2n$ als Factor auftritt.* Alsdann wird J_{2n} das Product aller der Multiplicatoren M_p, die zu den Primfactoren von $2n$ gehören. Je mehr Primfactoren also eine Zahl $2n$ enthält, um so größer fällt der Wert der zugehörigen Goldbachschen Zahl gegenüber den Goldbachschen Zahlen aus, die zu der Nachbarschaft gehören.

3. Diese Beschaffenheit der Schwankungen von G_{2n} weist auf einen Zusammenhang hin mit der zahlentheoretischen Function $\varphi(2n)$, welche die Anzahl aller Zahlen angiebt, die kleiner als $2n$ und dazu relatif prim sind. Bedeuten nämlich $p, q, \ldots$ die ungraden Primfactoren von $2n$, so ist

$$\frac{n}{\varphi(2n)} = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)\left(1+\frac{1}{q-1}\right)\cdots,$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite setzt sich in derselben Weise aus den Multiplicatoren

$$\mathfrak{M}_3 = 1,_{50}, \quad \mathfrak{M}_5 = 1,_{25}, \quad \mathfrak{M}_7 = 1,_{17}\ldots, \quad \mathfrak{M}_{11} = 1,_1,$$
$$\mathfrak{M}_{13} = 1,_{08}\ldots, \ldots$$

zusammen, wie J_{2n} aus den Multiplicatoren M_p. In der That ergiebt sich ein solcher Zusammenhang durch folgende Ueberlegungen.

Man denke sich unter der Reihe der ungraden Zahlen 1, 3, 5, $\ldots$, $2n+1$ dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge geschrieben. Es ergeben sich so genau die n Paare von ungraden Zahlen, deren Summe gleich $2n$ ist, und ein solches Paar liefert eine Goldbachsche Zerlegung von $2n$, wenn sich in ihm zwei Primzahlen *begegnen*. Eine solche Begegnung ist jedoch ausgeschlossen, sobald der eine der beiden Summanden, und damit auch der andere, einen Teiler mit $2n$ gemeinschaftlich hat[1]). Mithin erhält man Goldbachsche Zerlegungen von $2n$ nur bei den $\varphi(2n)$ Paaren relativ primer Summanden. Je kleiner also $\varphi(2n)$ gegenüber den Werten dieser Function in der Nachbarschaft von $2n$ ist, um so enger werden die Primzahlen zusammengedrängt, die kleiner als $2n$ und dazu relativ prim sind, und um so größer wird die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Primzahlen einander begegnen. Je größer dagegen $\varphi(2n)$ ausfällt, um so mehr Platz zum Ausweichen ist vorhanden, um so kleiner wird daher G_{2n} werden, und auf diese Weise erklärt es sich, warum die Maxima und Minima von G_{2n} und die Minima und Maxima von $\varphi(2n)$ einander entsprechen.

In gewissen Fällen ergeben die vorhergehenden Ueberlegungen sogar einen Beweis des Goldbachschen Theorems, denn es ist klar, daß mindestens *eine* Begegnung von zwei Primzahlen stattfinden muß, sobald die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als $2n$ und dazu relativ prim sind, größer ist als $\frac{1}{2}\varphi(2n)$. Das trifft zu

1) Der Fall, daß n eine Primzahl ist, bildet hierbei eine Ausnahme, indessen kommt es bei großen Werten von $2n$, um die es sich im Folgenden allein handelt, auf die *eine* Darstellung $2n = n + n$ nicht an.

für alle graden Zahlen von 2 bis 92, während für größere Zahlen eine solche Ungleichheit nicht immer besteht. Es läßt sich jedoch beweisen, daß wie weit man auch in der Reihe der graden Zahlen geht, immer wieder Zahlen $2n$ vorkommen, für die jene Ungleichheit erfüllt ist und die sich aus diesem Grunde als Summe von zwei Primzahlen darstellen lassen.

4. Daß zwischen G_{2n} und $\varphi(2n)$ ein *Zusammenhang* besteht, will wenig besagen, solange man diese Beziehung nicht durch eine *Formel* festlegen kann. Dazu gelangt man folgendermaßen.

Daß eine jede grade Zahl durch Addition von zwei Primzahlen erhalten werden kann, das erscheint deshalb zuerst so überraschend, weil die Primzahlen durch die multiplicativen Eigenschaften der Zahlen definirt sind. Man wird deshalb fragen, wie es überhaupt mit den Begegnungen steht, wenn man aus den $\varphi(2n)$ Zahlen, die kleiner als $2n$ und relativ prim dazu sind, gewisse Zahlen herausgreift und vor den übrigen auszeichnet, und wird so zu folgender Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung geführt.

Gegeben seien $2g$ gleichartige Elemente. Man zeichne unter ihnen r aus, bringe die Elemente in irgend eine Reihenfolge und denke sich darunter dieselben Elemente in umgekehrter Reihenfolge geschrieben. Stehen alsdann zwei ausgezeichnete Elemente unter einander, so soll gesagt werden, daß eine *Begegnung* stattfindet. Wie groß ist die wahrscheinliche Anzahl der Begegnungen? Sie ist gleich der Anzahl aller Begegnungen, die bei den sämtlichen verschiedenen Anordnungen der $2g$ Elemente stattfinden, dividirt durch die Anzahl dieser Anordnungen, also gleich einem Bruche, dessen Zähler gleich

$$\binom{2g}{r}$$

ist, während der Nenner sich ergiebt, indem man ermittelt, bei wie vielen Anordnungen $0, 2, 4, \ldots, 2\left[\frac{r}{2}\right]$ Begegnungen stattfinden, diese Anzahlen beziehungsweise mit $0, 2, 4, \ldots, 2\left[\frac{r}{2}\right]$ multipliciert und die so erhaltenen Zahlen addirt.

5. Bei wie vielen Anordnungen findet keine Begegnung statt? Faßt man die ersten g Paare ins Auge, die zusammengenommen alle $2g$ Elemente enthalten, so müssen r dieser Paare je ein ausgezeichnetes und ein nicht ausgezeichnetes Element enthalten, während die übrigen $g-r$ Paare aus lauter nicht ausgezeichneten Ele-

menten bestehen. Diese g Paare kann man beliebig anordnen, und dadurch ist dann die Anordnung aller $2g$ Paare bis auf die Verteilung innerhalb eines jeden Paares eindeutig festgelegt. Mithin ist die Anzahl aller der gesuchten Anordnungen

$$2^r \binom{g}{r}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß gar keine Begegnung stattfindet, ist mithin

$$W_0 = 2^r \binom{g}{r} : \binom{2g}{r}.$$

Sind g und r große Zahlen, so ergiebt sich hierfür die Näherungsformel:

$$W_0 = \frac{\left(1-\frac{r}{2g}\right)^{2g-r+\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{r}{g}\right)^{g-r+\frac{1}{2}}},$$

und setzt man im Besonderen

$$2g = 2n \text{ und } r = P_{2n},$$

wo P_{2n} die Anzahl der ungraden Primzahlen bedeutet, die kleiner sind, als $2n$, so ist in erster Annäherung

$$W_0 = e^{-\frac{2n}{(\log \mathrm{nat}\, 2n)^2}}.$$

Schreibt man also alle Zahlen von 0 bis $2n$ auf und schreibt darunter dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei *willkürlich* ausgewählten P_{2n} ausgezeichneten Zahlen mindestens eine Begegnung stattfindet, für großes n näherungsweise gleich

$$1-e^{-\frac{2n}{(\log \mathrm{nat}\, 2n)^2}},$$

und dieser Ausdruck kommt mit wachsendem n der Einheit beliebig nahe. Die Anzahl der Primzahlen in dem Intervalle von 1 bis $2n$ ist demnach so groß, daß das Goldbachsche Theorem gar keine besondere Eigenschaft der Primzahlen involvirt, und es wäre viel merkwürdiger, wenn sich zeigen ließe, daß dieses Theorem für gewisse Zahlenklassen seine Gültigkeit einbüßt.

6. Bei wie vielen Anordnungen finden 2α Begegnungen statt? Faßt man wiederum die ersten g Paare ins Auge, so kommen bei ihnen α Begegnungen vor, durch die 2α ausgezeichnete Elemente in Anspruch genommen werden. Unter den übrigen $g-\alpha$ Paaren, die $2g-2\alpha$ Elemente enthalten, finden sich daher nur $r-2\alpha$ ausgezeichnete Elemente, und es giebt

$$2^{r-2\alpha}\binom{g-\alpha}{r-2\alpha}$$

Anordnungen dieser $2g-2\alpha$ Elemente, bei denen keine Begegnung stattfindet. Nun lassen sich die α Paare mit je zwei ausgezeichneten Elementen auf

$$\binom{g}{\alpha}$$

Arten in die ersten g Paare einordnen, und damit ist die Anordnung aller $2g$ Elemente eindeutig festgelegt. Folglich ist die Anzahl der gesuchten Anordnungen

$$2^{r-2\alpha}\binom{g-\alpha}{r-2\alpha}\binom{g}{\alpha}.$$

Da α die Werte 0, 1, 2, ..., $\left[\frac{r}{2}\right]$ annehmen kann, so besteht mithin die Identität:

$$\binom{2g}{r} = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} 2^{r-2\alpha}\binom{g-\alpha}{r-2\alpha}\binom{g}{\alpha}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ergiebt sich für die wahrscheinliche Anzahl der Begegnungen bei $2g$ Elementen, unter denen r ausgezeichnet sind, ein unerwartet einfacher Ausdruck. Es ist nämlich diese Anzahl gleich

$$\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} 2\alpha - 2^{r-2\alpha}\binom{g-\alpha}{r-2\alpha}\binom{g}{\alpha} : \binom{2g}{r}$$

$$= 2g \sum_{\beta=0}^{\left[\frac{r-2}{2}\right]} 2^{r-2-2\beta}\binom{g-1-\beta}{r-2-2\beta}\binom{g-1}{\beta} : \binom{2g}{r}$$

$$= 2g \cdot \binom{2g-2}{r-2} : \binom{2g}{r} = \frac{r(r-1)}{2g-1}.$$

Setzt man jetzt

$$2g = \varphi(2n), \quad r = P_{2n},$$

so ist für die Goldbachsche Zahl G_{2n} bei großem n die Näherungsformel gewonnen:

$$\text{(I.)} \qquad G_{2n} = \frac{P_{2n}^2}{\varphi(2n)} = \frac{P_{2n}^2}{n} \cdot \frac{n}{\varphi(2n)};$$

der erste Factor ist eine beständig wachsende Function von n, während der zweite die Schwankungen liefert.

7. Berechnet man nach der Formel (I.) die Werte von G_{2n}, so zeigt sich, daß die berechneten Werte erheblich größer sind, als die wahren Werte. Das ließ sich auch voraussehen. Die Primzahlen sind ja in dem Intervalle von 1 bis $2n$ nicht ungleichmäßig verteilt, sondern so, daß ihre Dichtigkeit beständig abnimmt, und hierdurch wird besonders am Anfange und am Ende des Intervalles das Eintreten von Begegnungen erheblich erschwert.

Diesem Uebelstande läßt sich abhelfen, indem man die ersten und die letzten $[\sqrt{2n}]$ Zahlen von dem Intervalle abschneidet. Die Anzahl der Primzahlen in dem Intervalle von $\sqrt{2n}$ bis $2n - \sqrt{2n}$ ist

$$P(2n - \sqrt{2n}) - P(\sqrt{2n}),$$

und die Anzahl der Zahlen, die relativ prim zu $2n$ sind und in diesem Intervalle liegen, darf näherungsweise gleich

$$\frac{n - \sqrt{2n}}{n} \varphi(2n)$$

gesetzt werden. Als zweite Näherungsformel ergiebt sich daher:

$$\text{(II.)} \qquad G_{2n} = \frac{[P(2n - \sqrt{2n}) - P(\sqrt{2n})]^2}{n - \sqrt{2n}} \cdot \frac{n}{\varphi(2n)}.$$

Diese Näherungsformel erweist sich als recht brauchbar, wie durch die folgende Tabelle erläutert werden möge.

$2n$	G_{2n}	(II.)	$2n$	G_{2n}	(II.)	$2n$	G_{2n}	(II.)	$2n$	G_{2n}	(II.)	$2n$	G_{2n}	(II.)
400	28	31	420	63	57	440	30	37	460	32	37	480	62	55
2	36	37	2	23	26	2	26	31	2	58	54	2	21	30
4	22	25	4	24	27	4	44	41	4	26	30	4	28	33
6	26	31	6	42	39	6	23	27	6	25	29	6	46	46
8	40	40	8	18	26	8	26	32	8	50	46	8	20	30
410	28	33	430	28	34	450	56	50	470	30	37	490	38	45
2	22	26	2	40	40	2	24	27	2	26	30	2	46	47
4	42	40	4	28	32	4	23	28	4	46	43	4	26	35
6	20	27	6	22	26	6	48	44	6	28	36	6	26	31
8	22	30	8	43	39	8	19	28	8	21	29	8	46	45

Diese Tabelle zeigt, daß die Formel (II.) gewissermaßen ein abgeblaßtes Bild der Wirklichkeit liefert: die Minima werden vergrößert, die Maxima verkleinert, die Curve die den wahren Verlauf darstellt wird also abgeflacht.

8. Erst nach Abschluß dieser Untersuchungen ist mir bekannt geworden, daß auch Sylvester mit dem empirischen Theoreme von Goldbach sich beschäftigt hat. Leider ist jedoch von dem Vortrage: *On the partition of an even number into two primes*, den er am 9. November 1871 in der London Mathematical Society gehalten hat, nur ein sehr kurzer Auszug in den Proceedings Vol. IV mitgeteilt worden. Es ergiebt sich daraus, daß Sylvester durch Betrachtungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu Näherungsformeln für G_{2n} gelangt ist, die jedoch von den hier mitgeteilten verschieden zu sein scheinen.

In einem Zusatze behauptet Sylvester mittelst der Methode der erzeugenden Functionen den *genauen* Ausdruck für G_{2n} gefunden zu haben. Es wäre zu wünschen, daß diese interessanten Untersuchungen ausführlich veröffentlicht würden.

Hauptresultate der Untersuchung über die Abhängigkeit der elektrischen Erdströme von Niveau-Schwankungen des Grundwassers in Bulgarien.

Von

P. Bachmetjew.

Vorgelegt von Riecke in der Sitzung vom 19. Decbr. 1896.

Die erste Untersuchung der elektrischen Erdströme in Bulgarien habe ich im Jahre 1893 ausgeführt[1]) und bin dabei zum Schlusse gelangt, daß die wahrscheinliche Ursache dieser Ströme in den thermoelektrischen Eigenschaften verschiedener, auf der Erdoberfläche liegender Stoffe (Schwarz-Erde, Sand, Gesteine, Wasser etc.) liege.

Ein Jahr darauf haben die ausgedehnteren Untersuchungen ergeben[2]), daß die Richtung der Erdströme nur dann einen gewissen Winkel mit dem magnetischen Meridian nach Osten bildet (wobei der Strom annähernd von *W* nach *E* fließt), wenn die Messungen im Thale vorgenommen werden, sonst fließt der Strom in gebirgigen Gegenden stets vom Fuße zur Spitze des Berges. Dasselbe Resultat erhielt auch Palmieri auf dem Vesuv.

Somit müßte man eine Potentialdifferenz zwischen verschiedenen hoch liegenden Punkten des Berges annehmen, und zwar müsste das Potential am Fuße des Berges größer als an dessen Spitze sein.

Mit Bezug hierauf wurden die „Diafragma-Ströme" (von Quincke[3]) noch ein Mal einer experimenteller Prüfung unterzogen und auch bei Schwarz-Erde, Sand und Schnee untersucht.

---

1) Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch. XXVI p. 31 und p. 159. 1894.

2) „Sbornik" des Unterrichts-Ministerium in Bulgarien 12. p. 58—120. 1895. Göttinger Nachrichten Nr. 4 1894 (nur der Auszug).

3) Pogg. Ann. 107 p. 1 1859 und 110 p. 38. 1860.

Durch diese Untersuchung wurde die Existenz der „Durchsickerungsströme“ [1]) auch in unserer Erde nachgewiesen.

Wenn also die elektrischen Durchsickerungsströme in gebirgigen Gegenden vorhanden sind, so sollten dieselben auch im Thale beobachtet werden können und zwar aus folgendem Grunde: Die atmosphärischen Niederschläge sollten bei ihrem Durchgang durch die Erd-Schichten (wie die experimentellen Untersuchungen in Laboratorien es zeigen) eine Potential-Differenz zwischen verschieden tief liegenden Schichten verursachen; dasselbe sollte auch stattfinden, wenn die Atmosphäre trocken ist und die Feuchtigkeit der Erde von unten nach oben sich zu bewegen anfängt. In diesem Falle würden wir also vertical gerichtete elektrische Ströme erhalten. Bewegt sich das Grundwasser auch horizontal, dann hätten wir mit einer Resultierenden zu thun, welche mit dem Horizont einen gewissen Winkel bilden und folglich einen Erdstrom erzeugen, den man bequem mittelst der Brander'schen [2]) Elektroden auf der Oberfläche der Erde messen könnte. Hier wird vom speziellen Falle des Vorhandenseins verschieden hoch liegender und verschieden zusammengesetzter Erdschichten Abstand genommen, da wir in diesem Falle die oben erwähnten „Gebirgs-Ströme“ erhalten hätten.

Um diese Ansicht zu prüfen, habe ich im Juli und August 1896 Untersuchungen der Erdströme, verbunden mit Beobachtungen von Variationen des Grundwasser-Niveaus und der magnetischen Deklination mit Hülfe meiner Studenten auf Rechnung der bulgarischen Regierung vorgenommen. Die ausführliche Beschreibung dieser Untersuchung erscheint im XIV. Bande vom „Sbornik des Unterrichts-Ministeriums“ (bulgarisch); hier führe ich nur kurz die Hauptresultate an.

Die Untersuchungen sind an folgenden Orten angestellt worden:

1. Pawlowo — eine Brauerei 4 km von Sofia nach SW entfernt. Eine Ebene ohne Wald. Beobachtungen wurden vom 7. VIII. bis 10. VIII. angestellt.

2. Russischer Kirchhof — schon längst verlassen; in unmittelbarer Nähe von Sofia nach SE gelegen und nach dieser Richtung leicht ansteigend. Die Elektroden wurden außerhalb des

---

1) P. Bachmetjew und P. Pentscheff, Journ. der russ. phys.-chem. Gesellsch. 26. 1894.

2) K. Brander, Beitrag zur Unters. elektr. Erdströme. Akad. Abhandl. 1888. Helsingfors.

Kirchhofes eingegraben; in demselben war nur ein zu untersuchender Brunnen vorhanden. Beobachtet wurde vom 31. VII. bis 4. VIII.

3. Kloster-Gut Kokaleny — 1200 m über dem Meere, 16 km von Sofia nach SE. Ein Plateau mit kleiner Steigung nach SE, schwach bewaldet. Beobachtet wurde vom 17. VIII. bis 22. VIII.

4. Sofia, Krakra-Straße, im Hofe eines Privathauses, wo jedoch nur Niveau-Schwankungen beobachtet wurden und zwar vom 24. VIII. bis 27. VIII.

Die Beobachtungen wurden an jeder dieser Stationen ununterbrochen jede halbe Stunde Tag und Nacht ausgeführt, wobei folgende Apparate ihre Anwendung fanden: ein Wiedemann'sches Galvanometer mit 150 Ohm eigenem Widerstand; ein Rheostat zur Messung des totalen Widerstandes (incl. Erde); ein Variations-Magnetometer; eine Hebel-Vorrichtung zur Messung von Niveau-Schwankungen des Grundwassers in Brunnen. Meteorologische Elemente wurden mir vom Herrn Vatzoff, Direktor der meteorol. Central-Station in Sofia, mitgetheilt. Die Erdelektroden waren diejenigen von Brander und ihre Entfernung von einander betrug circa 100 m. Die Elektroden-Linie war SW—NE gerichtet. Alle Apparate waren in Zelten untergebracht. Die untersuchten Brunnen wurden schon längst nicht mehr gebraucht und ihre Tiefe betrug 4—6 m. Nur der Brunnen am Kloster-Gute Kokaleny konnte nicht mehr zum Stillstand gebracht werden, da aus demselben kurz vor Beginn der Beobachtungen noch immer Wasser entnommen wurde.

Kurz gefaßt sind die erhaltenen Resultate folgende:

1) Das Grundwasser verändert sein Niveau innerhalb 24 Stunden periodisch, wobei die Extreme der Zeit nach am nächsten der Aenderung des Luftdruckes stehen. Der tägliche Gang der Luftdruck-Aenderung und des Niveaus des Grundwassers unterscheiden sich etwas von einander in ihren Details, welcher Umstand wahrscheinlich durch den Einfluß der Temperatur und der Feuchtigkeit der Luft bedingt wird.

2) Für die magnetische Deklination erhielt man in Sofia im Juli und August innerhalb 24 Stunden zwei Hauptextreme und zwar eines gegen 8 Uhr Morgens und das Andere gegen 3 Uhr Mittags, wobei die Amplitude dieser Variationen im Maximum $13^1/_2$ Minute betrug.

3) Die Extreme des elektrischen Erdstromes in Bulgarien treten im Juli und August 2 Mal innerhalb 24 Stunden ein: Morgens (7—11 Uhr) und Nachmittag (3—6 Uhr).

4) Der tägliche Gang der Aenderungen des Grundwasserniveaus,

der elektromotorischen Kraft des Erdstromes und der magnetischen Deklination ist im Allgemeinen derselbe, sowohl nach der Zeit wie auch nach dem Charakter.

5) Es ist somit Grund vorhanden zu der Behauptung, daß wenigstens ein Theil des elektrischen Erdstromes durch Niveauschwankungen des Grundwassers hervorgerufen wird, und daß der elektrische Erdstrom den Erdmagnetismus beeinflußt.

6) In den gebirgigen Gegenden ist die Potentialdifferenz für den Erdstrom viel bedeutender als für die tief gelegenen Orte.

7) Die Sonnenfinsterniß, welche am 9. August stattfand, erzeugte keine merklichen Perturbationen weder im Gange des Erdstromes noch im Gange der erdmagnetischen Deklination.

8) Die Entladung der atmosphärischen Electricität, wenn sie auch in weiter Ferne stattfindet, erzeugt im Gange des Erdstromes Perturbationen.

9) Die gegenwärtige Untersuchung bestätigt die Resultate früherer Untersuchungen in Bulgarien.

Die horizontale Bewegung des Grundwassers, welche im Thale höchst wahrscheinlich die Richtung von Ost nach West besitzt, d. h. entgegengesetzt der Rotation der Erdkugel und dem Erdstrome, beabsichtige ich nächstes Jahr in der ungarischen Ebene zu untersuchen.

Sofia, December 1896.

Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (V).

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 19. December 1896.

I. Ueber das Absorptionsvermögen gewisser ungesättigter Ketone für die violetten Lichtstrahlen.

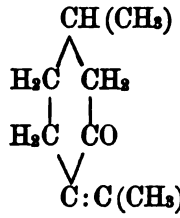
Gelegentlich einer früheren Mittheilung[1]) hatte ich auf die Thatsache aufmerksam gemacht, daß zwischen isomeren, ähnlich gebauten Verbindungen sich manchmal ein großer Unterschied hinsichtlich ihrer Fähigkeit bemerklich macht, in dünner, dem Beobachter farblos erscheinender Schicht, Lichtstrahlen von bestimmter Wellenlänge zurückzuhalten. So erwiesen sich z. B. Pulegon und Eucarvon als Lichtfilter für violette Strahlen, welche von den mit ihnen Isomeren Bihydrocarvon und Carvon in gleich dicker Schicht durchgelassen wurden. Ich glaube, daß es mir gelungen ist, die Gesetzmäßigkeit, welche diesen Erscheinungen zu Grunde liegt, aufzudecken.

Das von den zahlreichen Isomeren so abweichende optische Verhalten des Pulegons, von dem l. c. die Rede war, kann nur durch die ihm eigenthümliche Anordnung der Atome im Molecül bedingt sein. Nun ist die Structur des Pulegon jetzt aber völlig klargestellt[2]). Ihm eigenthümlich ist das Vorhandensein einer s. g. semicyclischen Bindung, benachbart einer im sechsgliederigen

1) Nachr. 1896, S. 73.

2) Vergl. diese Nachr. 1895, S. 308.

Kohlenstoffringe befindlichen Carbonylgruppe:



Wenn diese Gruppierung es ist, die den optischen Charakter des Pulegons wesentlich mitbestimmt, so müssen Substanzen, die eine ähnliche Anordnung der Atome aufweisen, auch ähnliche Erscheinungen hervortreten lassen. Zu solchen Verbindungen gehört nun das Mesityloxyd $\begin{matrix} CO\,CH_3 \\ | \\ HC:C(CH_3)_2 \end{matrix}$, das Acetophoron, das Mono- und Bi-Benzylidenaceton u. a. Um zunächst qualitativ das Verhalten dieser Körper kennen zu lernen, wurde folgendermaßen verfahren. Die zu untersuchenden Verbindungen wurden in Glaskästchen mit planparallelen Wänden gebracht, die festen Körper möglichst concentrirt in optisch indifferentem Lösungsmittel. Durch die nur etwa 1 cm dicke Flüssigkeitsschicht, welche vor den Spalt eines Spectroskops gebracht wurde, ließ man Licht hindurchgehen, welches von glühendem Wasserstoff ausstrahlte und das entstehende Absorptionsspectrum wurde ähnlich, wie ich es neulich beschrieben habe, photographirt und die Photogramme mit dem des direct erhaltenen Wasserstoffspectrums verglichen.

Die photographischen Aufnahmen, deren Durchführung ich wiederum meinem Assistenten, Herrn Dr. Herz, verdanke, zeigten nun in schlagender Weise die Richtigkeit der gemachten Voraussetzung. Sobald in einer Substanz eine Aethylenbindung benachbart zum Carbonyl tritt, zeigt sie ein gegen die Muttersubstanz merklich erhöhtes Absorptionsvermögen für die nach dem Violett hin liegenden Lichtstrahlen des Spectrums und dies Absorptionsvermögen steigt noch erheblich, wenn noch eine zweite Aethylenbindung benachbart an die andere Seite des Carbonyls tritt.

Das Mesityloxyd z. B. verhält sich optisch sehr ähnlich wie das Pulegon. Es verschluckt ferner in gleich dicker Schicht viel mehr violette Strahlen als das Aceton, wird in dieser Eigenschaft aber noch übertroffen vom Phoron. Dasselbe Verhältniß findet statt zwischen Aceton, Mono- und Di-Benzyliden-Aceton u. s. f. Eine Nebeneinanderstellung der Formeln zeigt die vorhandene Analogie der Bindungen:

$CH_3 CO CH_3$
Aceton

$(CH_3)_2 C : CH . CO CH_2 H$
Mesityloxyd

$(CH_3)_2 C : CH . CO CH : C (CH_3)_2$
Acetophoron

$(CH_3)_2 C : C . CO CH_2$
$CH_2 CH_2 CH (CH_3)$
Pulegon

$C_6 H_5 . HC : CH CO CH_3 H$
Benzyliden-Aceton

$C_6 H_5 . HC : CH . CO . CH : CH C_6 H_5$
Dibenzyliden-Aceton.

Das Resultat der gemachten Beobachtungen läßt sich nun aber auch ohne die angewandten Hülfsmittel bedeutend verallgemeinern.

Eine Substanz, welche den violetten Theil des Spectrums stark absorbirt, muß (mindestens bei genügend dicker Schicht in durchfallendem Licht) gelb erscheinen. Ist daher die angenommene Gesetzmäßigkeit richtig, so sollten alle Verbindungen, welche die Gruppirung $:C.CO.C$ enthalten, gelbstichig sein und diejenigen, welche die Gruppirung $:C.CO.C:$ einschließen, sollten dieselbe Eigenschaft in stärkerem Maße hervortreten lassen. Das trifft nun auch bei einer sehr großen Zahl von Verbindungen, welche gerade in neuerer Zeit bekannt geworden sind, zu.

Vor einiger Zeit habe ich in diesen Blättern Substanzen beschrieben[1]), welche ich gemeinsam mit Herrn Mighill durch Condensation von Piperonal mit Aceton erhielt und schon damals die auffallende Thatsache besonders hervorgehoben, daß die durch Combination zweier farbloser Körper gebildeten Substanzen stark gelb gefärbt sind. Die damals erhaltenen Verbindungen

$$C_6 H_3 \begin{pmatrix} O \\ O \end{pmatrix} > CH_2 \Big) . HC : CH CO CH_3$$

und $C_6 H_3 (O_2 CH_2) . HC : CH . CO . CH : CH . (CH_2 O_2) C_6 H_3$

sind aber Analoge des Benzyliden- und Dibenzyliden-Acetons, von denen das erstere auch gelblich, das letztere gelb gefärbt ist.

Herr Mighill hat in seiner Dissertation[2]) auch schon eine Reihe bereits bekannter analog gebauter Verbindungen zusammengestellt, die sämmtlich gelb gefärbt sind. Unter diesen verdient die Cinnamylacetessigsäure $C_6 H_5 CH : CH CO CH (CO CH_3) CO OH$ und

1) Diese Nachr. 1895, S. 180.
2) Göttingen 1895.

die Cinnamylameisensäure $C_6H_5CH:CHCO.COOH$ besonders hervorgehoben zu werden.

Im Lauf des letzten Jahres sind endlich viele Beispiele dafür beigebracht worden[1]), daß auch aus cyclischen Ketonen, welche die Gruppe CH_2CO oder CH_2COCH_2 enthalten, mehr oder weniger gelb gefärbte Verbindungen entstehen, sobald man die beiden an Kohlenstoff stehenden Wasserstoffatome durch ein doppelt gebundenes Kohlenstoffatom ersetzt. Die Mono- und Dibenzyliden-Pentanone und Hexanone sind z. B. alle hell- bis dunkelgelb gefärbte Körper. Das im dritten Abschnitt dieser Mittheilung neu beschriebene Tricyclo-Bi-Penten-Pentanon ist ein schön gelber Körper u. s. f. Die Färbungen verschwinden aber sofort bei der Reduction, ebenso bei der Ersetzung von O durch :NOH.

Es ist danach klar, daß die Combinationen

$$C:CH.CO. \quad \text{und} \quad C:CH.COCH:C$$

als Chromophore bezeichnet werden müssen[2]). Verbindungen, welche jene Gruppirung enthalten, werden in genügend dicker Schicht gelb aussehen. Wenn sie dem menschlichen Auge noch farblos erscheinen, so wird doch ihre photographisch-spectroskopische Untersuchung den chemischen Charakter anzeigen. Denn die photographische Platte ist hierfür ein viel schärferes Reagens als das Auge. Stark gelb gefärbtes Carvon und farbloses Pulegon verhalten sich, wie neulich schon hervorgehoben wurde[3]), in dünnen Schichten der Platte gegenüber so, daß das erstere wie eine farblose, das letztere wie eine gelbe Verbindung reagirt.

Es wird kaum zu gewagt sein, die festgestellten Thatsachen für Schlüsse auf die Constitution noch nicht genau erforschter Verbindungen schon zu verwerthen. Wenn Isothujon und Carvenon die violetten Strahlen, welche Pulegon absorbirt, ungehindert hindurchlassen, so darf man annehmen, daß sie die chromophore Gruppe C:CH.CO. nicht enthalten. Dasselbe gilt für das Campherphoron, welches sich optisch nicht wie Acetophoron verhält, sondern wie Aceton, d. h. dem Hindurchgehen der violetten Strahlen einen nur sehr geringen Widerstand entgegengesetzt. Auch für das Carvon ist die Anwesenheit unserer chromophoren

1) Vergl. Ber. chem. Ges. **29**, 1597.

2) Sehr bemerkenswerth ist, daß Kostanecki in einer Arbeit (Ber. chem. Ges. **29**, 1890) auch das Chromogen des Indigos in der Gruppe $C_6H_5CO\,CH:CH\,CO\,C_6H_5$ sucht. S. ferner Friedländer und Lövy, über Flavon-Derivate. eb. **29**, 2430.

3) Diese Nachr. 1896, S. 73.

Gruppe nicht anzunehmen, dagegen ist ihr Vorhandensein im Eucarvon sehr wahrscheinlich, da diese Substanz für die violette Hälfte des Spectrums ein sehr starkes Absorptionsvermögen zeigt.

2. Ueber neue Verbindungen der Fenchonreihe.

Wenn man die durch Einwirkung von Kohlensäure auf Fenchon bei Gegenwart von Natrium entstehende Fenchocarbonsäure für sich erhitzt, so erhält man eine bei 173—174° schmelzende, ungesättigte Säure $C_{11}H_{16}O_2$[1]). Dr. Herbig, der sich auf meine Veranlassung mit dem Gegenstand beschäftigte, hat dann zuerst die Beobachtung gemacht, daß man zu ganz anderen Producten gelangt, wenn man das Bleisalz der Carbonsäure trocken destillirt. Herr Dr. Lampe hat im vorigen Semester die Untersuchung mit folgendem Resultat weitergeführt.

Bei der trockenen Destillation des fenchocarbonsauren Bleis treten neben Kohlensäure und Wasser zwei Verbindungen auf. In geringer Menge eine Säure, welche bei höherer Temperatur Wasser abgiebt und deren Anhydrid dann bei 171—172° schmilzt. Die Analysen der freien Säure und des Silbersalzes weisen auf die Zusammensetzung $C_{11}H_{18}O_4$ für die Säure hin.

In reichlicherer Menge entsteht aus der Carbonsäure ein Keton von der Formel $C_{11}H_{16}O_2$. Dies Keton bildet, aus verdünntem Alkohol krystallisirt, gelbe, bei 96° schmelzende Nadeln und besitzt einen kampferartigen Geruch. Bei gewöhnlichem Druck destillirt, geht es unzersetzt bei 273—274° über. Behandelt man es mit Hydroxylamin, so entsteht ein in Nadeln krystallisirendes, bei 108° schmelzendes Oxim, $C_{11}H_{16}O:NOH$.

Durch ätzendes Alkali wird das Keton $C_{11}H_{16}O_2$ nicht verändert, beim Digeriren mit Ammoniak büßt es aber seine gelbe Farbe ein und es entsteht eine in Alkohol schwer lösliche weiße Verbindung, welche erst bei 199—200° schmilzt. Durch nascirenden Wasserstoff aus alkalischer Quelle wird das Keton in einen niedrig schmelzenden Alkohol von eigenthümlichem Calmus-Geruch übergeführt.

3. Ueber Condensationsproducte cyclischer Ketone.

Schon in der vorigen Mittheilung über den Gegenstand ist einer bicyclischen Verbindung $C_{14}H_{22}O$ Erwähnung gethan, welche aus Methylhexanon durch Condensation mit Halogenwasserstoff-

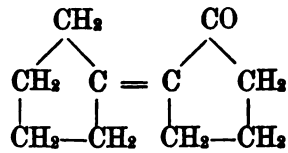
1) Annal. d. Chem. 284, 329.

säure und darauf folgender Entziehung des angelagerten Halogenwasserstoffs dargestellt wurde. Es hat sich nun herausgestellt, daß die cyclischen Ketone auch unter dem Einfluß von alkoholischem Alkali zur Selbstcondensation neigen. Die Ketone verschiedener Ringsysteme weisen aber sehr wesentliche graduelle Unterschiede hinsichtlich der Leichtigkeit auf, mit der die Condensation erfolgt. Die Pentanone condensiren sich außerordentlich schnell und glatt unter Zusammentritt zweier oder mehrerer gleichartiger Moleküle. Die Hexanone vereinigen sich unter denselben Bedingungen unvollständiger und langsamer und das bekannte Heptanon, das Suberon, zeigt überhaupt nur geringe Neigung zur Selbstcondensation.

Bisher sind folgende Verbindungen untersucht worden:

Bicyclo-Penten-Pentanon, $C_{10}H_{14}O$.

Das zu den Versuchen nöthige Pentanon, C_5H_8O, wurde aus Holztheer durch die Natriumbisulfit-Verbindung abgeschieden. Das Pentanon liefert, beiläufig bemerkt, auch leicht ein in Alkohol schwer lösliches bei 200—205° unter Zersetzung schmelzendes Semicarbazon, $C_5H_8N.NHCONH_2$. Bringt man Pentanon mit Natriumäthylat zusammen, so findet fast augenblicklich Condensation statt. Es entstehen zwei Verbindungen. Eine mit Wasserdampf schwer flüchtige, welche bei gewöhnlichem Druck bei 253—254° siedet und die Zusammensetzung $C_{10}H_{14}O$ besitzt. Ihr kommt unzweifelhaft die Constitutionsformel

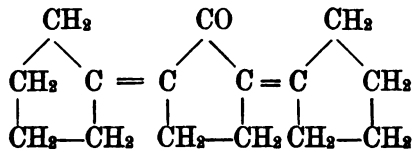


zu. Die Verbindung verhält sich wie ein Keton und liefert mit Hydroxylamin sehr leicht ein bei 123—124° schmelzendes Oxim, $C_{10}H_{14}NOH$. Die Molecular-Refraction weicht aber von der für ein Keton berechneten ab und stimmt besser mit der für einen ungesättigten Alkohol auf zwei Aethylenbindungen. Das Penten-Pentanon ist noch weiterer Condensation fähig. Vor allen Dingen vereinigt es sich leicht mit einem Mol. Pentanon zu einer tricyclischen Verbindung, welche auch als Nebenproduct beim Stehen von Pentanon mit Natriumäthylat auftritt. Es entsteht so das:

Tricyclo-Di-Penten-Pentanon, $C_{15}H_{20}O$.

Dieser Körper, welcher analog dem Phoron aus Aceton nach der Gleichung: $3C_5H_8O = 2H_2O + C_{15}H_{20}O$ sich bildet, ist mit

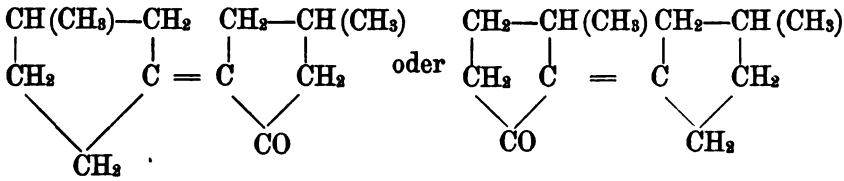
Wasserdampf sehr schwer flüchtig und erstarrt nach der Destillation im Vacuum zu einer gelben Krystallmasse, welche nach dem Umkrystallisiren aus Methylalkohol bei 76—77° schmilzt. Die Verbindung scheint kein Oxim mehr zu bilden. Ihre Constitution läßt sich durch die Formel



ausdrücken.

Bicyclo-Methylpenten-Methylpentanon, $C_{12}H_{18}O$.

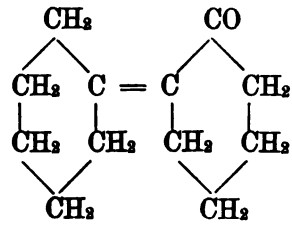
Entsteht aus Methylpentanon (aus β-Methyladipinsäure) in ganz analoger Weise, wie die erst beschriebene niedere homologe Verbindung. Herr Ruete fand ihren Siedepunkt bei 13 mm bei 127°. Das zugehörige Oxim $C_{12}H_{18}NOH$ krystallisirt sehr gut und schmilzt bei 94°. Die Constitution der Verbindung ist durch die Formeln



wiederzugeben.

Bicyclo-Hexen-Hexanon, $C_{12}H_{18}O$.

Mit der eben besprochenen Verbindung isomer ist ein Körper, der durch Selbstcondensation des Hexanons auf analogem Wege entsteht wie die vorige. Auch dieses Product ist ein farbloses Oel, das leicht in ein bei 146—148° schmelzendes Oxim überzuführen ist. Die Verbindung kann nur die Formel



besitzen. Neben der bicyclischen Verbindung entsteht auch in diesem Fall eine, gelbe Krystalle bildende tricyclische.

4. Synthese eines partiell hydrirten Methylfluoren.

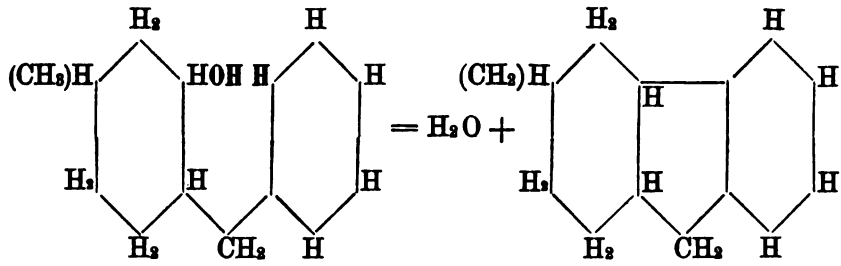
Die weitere Untersuchung des neulich l. c. schon beschriebenen Monobenzyliden-Methylhexanon $C_7H_{10}O:CHC_6H_5$, welche ich in Gemeinschaft mit Herrn Dorrance fortgesetzt habe, hat zu einigen neuen bemerkenswerthen Resultaten geführt. Das bei 109—110° schmelzende Oxim des Ketons geht bei der Reduction in eine bei 235—243° siedende, gesättigte Base über, welche als Benzyl-hexahydro- m. Toluidin, $C_6H_9\begin{matrix}CH_2C_6H_5\\CH_3\\NH_2\end{matrix}$ angesprochen werden muß, in dem das Benzyl entweder in der Ortho- oder in der Para-Stellung zum Methyl steht. Das Carbamid $C_{14}H_{19}NH.CONH_2$, der leicht Kohlensäure anziehenden Base, schmilzt bei 185°, die Acetylverbindung $C_{14}H_{19}NHCOCH_3$ schmilzt bei 168°.

Benzyl-Methyl-Hexanol, $C_6H_9\begin{matrix}CH_2C_6H_5\\CH_3\\OH\end{matrix}$, entsteht, wenn man das Benzyliden-Methylhexanon in alkoholischer Lösung mit Natrium reducirt. Der Alkohol bildet farblose, bei 97° schmelzende Nadeln. Wird diese Verbindung mit Phosphorsäureanhydrid erwärmt, so spaltet sich Wasser ab und es entsteht ein mit Wasserdämpfen flüchtiger Kohlenwasserstoff, der bei 14 mm bei 128° constant siedet und die Zusammensetzung $C_{14}H_{18}$ besitzt. Der Kohlenwasserstoff ist gesättigt, er entfärbt weder Brom noch Kaliumpermanganat. Auch sein optisches Verhalten stimmt zu dieser Annahme.

Es wurde gefunden $d = 0.99$, $n_D = 1.5455$ bei 20°.

Für $C_{14}H_{18}f^3$	berechnet	gefunden
M	59.05	59.44.

Wäre das Hydroxyl des Alkohols mit Wasserstoff von benachbartem Kohlenstoff ausgetreten, so würde neben den drei Benzolbindungen, die der Benzylgruppe zugehören, noch eine vierte Aethylenbindung entstanden sein müssen, was also durch den chemischen und physikalischen Befund ausgeschlossen ist. Das Wasserstoffatom kann daher wohl nur aus der Phenylgruppe zum Zweck der Wasserbildung entlehnt sein, sodaß folgende Formel-Gleichung den Vorgang wiedergeben würde:



Benzyl-Methyl-Hexanol, Methyl-Hydro-Fluoren,

d. h. es ist ein Methyl-Fluoren entstanden, dessen einer Benzolring vollständig hydrirt ist.

Mit dieser Reaction ist zugleich eine ganz allgemeine Methode gegeben, wie man zu analogen partiell hydrirten Kohlenwasserstoffen gelangen kann.

Ueber die Zahlentheorie der Quaternionen.

Von

A. Hurwitz in Zürich,
correspondirendem Mitgliede der Gesellschaft.

Vorgelegt von dem vorsitzenden Secretär in der Sitzung am 19. December 1896.

Ein Zahlenkörper n^{ten} Grades läßt sich bekanntlich auffassen als die Gesammtheit derjenigen Zahlen eines mit n unabhängigen Einheiten gebildeten Systemes complexer Zahlen, welche rationale Componenten besitzen, wobei in diesem Systeme die Produktbildung dem commutativen Gesetze unterliegt[1]). Es ist nun eine naheliegende Frage, in wie weit sich die Begriffe und Methoden, welche der Theorie der Zahlenkörper zu Grunde liegen, auf die Behandlung solcher Zahlensysteme anwenden lassen, in welchen die Produktbildung dem commutativen Gesetze nicht unterworfen ist. Zur Orientirung über diese Frage habe ich mich mit der Zahlentheorie der Quaternionen, des einfachsten derartigen Zahlensystemes, beschäftigt, und ich möchte mir erlauben, im Folgenden die hauptsächlichsten Resultate meiner Untersuchung mitzutheilen.

Zuvor bemerke ich, daß schon Herr Lipschitz in seiner interessanten Schrift „Untersuchungen über die Summen von Quadraten“ (Bonn 1886) eine Zahlentheorie der Quaternionen entwickelt hat. Dieselbe unterscheidet sich aber in einigen wesentlichen Punkten von der meinigen. Abgesehen von den Fragestellungen liegt ein tiefgreifender Unterschied namentlich darin, daß Herr Lipschitz seinen Untersuchungen einen anderen Begriff des „ganzen“ Quaternions zu Grunde legt, wie ich. Indem ich diesen Begriff in geeigneter Weise festsetze, verschaffe ich dem Satze

1) Vgl. R. Dedekind, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. (Diese Nachrichten vom 23. März 1885.)

von der Existenz eines größten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Quaternionen ausnahmslose Gültigkeit, wodurch dann die Zahlentheorie der Quaternionen, soweit dies überhaupt möglich ist, eine ähnliche Einfachheit erhält, wie die elementare Zahlentheorie.

§ 1. Bezeichnungen.

Die aus vier unabhängigen Einheiten $1, i_1, i_2, i_3$ gebildeten complexen Zahlen heißen „Quaternionen" wenn die Multiplication in dem Systeme dieser Zahlen durch die Gleichungen

$$(1)\quad i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1, \quad i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3, \quad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1,$$
$$i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$$

geregelt wird. Ist

$$(2)\qquad a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$$

ein Quaternion, so sollen a_0, a_1, a_2, a_3 die „Componenten" desselben heißen. Das Quaternion a heißt „reell", wenn die Componenten a_1, a_2, a_3 Null sind. Unter dem „zu a conjugirten" Quaternion ist das Quaternion

$$(3)\qquad a' = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3$$

zu verstehen. Die „Norm" des Quaternions a ist durch die Gleichung definirt:

$$(4)\qquad N(a) = aa' = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Diese Zahl verschwindet nur, wenn $a = 0$ ist. Wenn a von Null verschieden ist, so bedeute a^{-1} das Quaternion

$$(5)\qquad a^{-1} = \frac{1}{N(a)} a',$$

welches offenbar die Gleichungen

$$(6)\qquad aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

befriedigt. Bedeuten a und b irgend zwei Quaternionen, so ergiebt eine leichte Rechnung, daß

$$(7)\qquad (ab)' = b'a'$$

ist, woraus dann weiter die fundamentale Gleichung

$$(8)\qquad N(ab) = N(a)\,N(b)$$

folgt. — Da die Factoren in einem Produkte nicht vertauschbar sind, so giebt es zwei im Allgemeinen verschiedene Quotienten eines Quaternions a durch ein Quaternion b, welches letztere von

Null verschieden vorausgesetzt wird. Diese Quotienten sind bezüglich die Lösungen ab^{-1} und $b^{-1}a$ der Gleichungen $a = xb$ und $a = bx$.

Im Folgenden wird nur von solchen Gleichungen zwischen Quaternionen $a, b, c, \ldots l$ die Rede sein, welche die Gestalt

$$R_1(a, b, c, \ldots l) = R_2(a, b, c, \ldots l) \tag{9}$$

besitzen, wo R_1 und R_2 durch ausschließliche Anwendung der Addition, Subtraction, Multiplication und Division aus $a, b, c, \ldots l$ gebildet sind. Ich werde daher unter einer Gleichung zwischen Quaternionen schlechthin stets eine Gleichung der Form (9) verstehen.

Dies vorausgeschickt, gehe ich dazu über, die Begriffe „Quaternionenkörper“ und „Permutationen“ eines solchen Körpers zu definiren.

„Ein System von unendlich vielen Quaternionen heißt ein „Körper“, wenn in dem Systeme die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division (abgesehen von der Division durch 0) unbeschränkt ausführbar sind.“

„Ordnet man jedem Quaternion a eines Körpers nach einem bestimmten Gesetze ein Quaternion $f(a)$ zu, so heißt die Substitution $(a, f(a))$ eine „Permutation“ des Körpers, wenn durch die Anwendung dieser Substitution jede Gleichung zwischen Quaternionen des Körpers in eine richtige Gleichung übergeht.“

Die Substitution $(a, f(a))$ ist stets und nur dann eine Permutation, wenn die Quaternionen $f(a)$ nicht sämmtlich Null sind und wenn ferner die beiden Gleichungen

$$f(a+b) = f(a)+f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b) \tag{10}$$

bestehen, unter a, b zwei beliebige Quaternionen des Körpers verstanden[1]).

Durchläuft a die Quaternionen des Körpers, so bildet die Gesammtheit der Quaternionen $f(a)$ wiederum einen Körper. Neben den soeben definirten Permutationen hat man hier (wie überhaupt bei den Körpern in Zahlsystemen, die eine nicht-commutative Multiplication besitzen) noch eine andere Art von Substitutionen zu betrachten, die ich „Inversionen“ nennen will. Bedeutet wieder a jedes Quaternion eines Körpers, so soll die Substitution $(a, f(a))$

1) Vgl. R. Dedekind: Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune-Dirichlet (Braunschweig 1894) pag. 456 und ff.

eine Inversion des Körpers genannt werden, wenn die Quaternionen $f(a)$ nicht sämmtlich verschwinden und wenn ferner für je zwei Quaternionen a, b des Körpers die Gleichungen

$$(10') \qquad f(a+b) = f(a)+f(b), \quad f(ab) = f(b)f(a)$$

gelten. Da die Substitution (a, a'), wo a' das zu a conjugirte Quaternion bedeutet, offenbar eine Inversion ist, so wird $(a, f(a'))$ die allgemeinste Inversion vorstellen, wenn $(a, f(a))$ die allgemeinste Permutation ist.

Das nächstliegende Beispiel eines Körpers wird von der Gesammtheit aller Quaternionen gebildet. Für diesen Körper Ω hat man jedenfalls die folgenden Permutationen:

1) Es bedeute q ein von Null verschiedenes, übrigens beliebiges Quaternion. Ordnet man nun dem Quaternion a das Quaternion qaq^{-1} zu, so ist hierdurch eine Permutation des Körpers Ω definirt, wie aus den Gleichungen

$$q(a+b)q^{-1} = qaq^{-1}+qbq^{-1}, \quad q(ab)q^{-1} = qaq^{-1}.qbq^{-1}$$

erhellt.

2) Es mögen α, β, γ eine Permutation der Indices 1, 2, 3 bilden. Sodann bezeichne $f(a)$ dasjenige Quaternion, welches aus a dadurch hervorgeht, daß man i_1, i_2, i_3 durch $\pm i_\alpha, \pm i_\beta, \pm i_\gamma$ bez. ersetzt, wobei die Vorzeichen der Bedingung $\pm i_\alpha . \pm i_\beta . \pm i_\gamma = -1$ genügen sollen. Die Substitution $(a, f(a))$ ist wiederum eine Permutation des Körpers Ω. Denn jede Gleichung zwischen Quaternionen bleibt richtig, wenn man auf dieselbe die Substitution $\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ \pm i_\alpha, & \pm i_\beta, & \pm i_\gamma \end{pmatrix}$ anwendet, weil diese Substitution die Gleichungen (1) in sich überführt.

Die Anzahl der zuletzt genannten Permutationen beträgt 24. Es wird sich weiter unten ergeben, daß die Permutation (a, qaq^{-1}) durch geeignete Wahl von q mit jeder dieser 24 Permutationen zum Zusammenfallen gebracht werden kann.

Da jeder Quaternionenkörper ein Unterkörper von Ω ist, so stellen die unter 1) und 2) genannten Zuordnungsgesetze auch für jeden beliebigen Körper Permutationen dar, was übrigens auch unmittelbar einleuchtet.

§ 2. Der Körper R und seine Permutationen.

Ein Quaternion $a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ möge „rational" heißen, wenn seine Componenten a_0, a_1, a_2, a_3 gewöhnliche rationale Zahlen sind. Die Gesammtheit aller rationalen Quaternionen bildet

einen Körper R, auf welchen sich alle nun folgenden Betrachtungen beziehen[1]). Zunächst beschäftige ich mich mit der Aufgabe, alle Permutationen des Körpers R zu bestimmen.

Es sei $(a, f(a))$ irgend eine Permutation von R. Vermöge derselben gehe i_1, i_2, i_3 bez. über in j_1, j_2, j_3. Dann wird ein beliebiges rationales Quaternion $a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ in $f(a) = a_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3$ übergehen. Ich behaupte nun, daß das Quaternion q sich so bestimmen läßt, daß $j_1 = q i_1 q^{-1}$, $j_2 = q i_2 q^{-1}$, $j_3 = q i_3 q^{-1}$ und folglich

$$f(a) = qaq^{-1}$$

wird. Indem man die Permutation $(a, f(a))$ auf die Gleichungen (1) in § 1 anwendet, erkennt man zunächst, daß

$$(1) \quad j_1^2 = j_2^2 = j_3^2 = -1, \quad j_1 j_2 = -j_2 j_1 = j_3,$$
$$j_2 j_3 = -j_3 j_2 = j_1, \quad j_3 j_1 = -j_1 j_3 = j_2$$

sein muß. Nun sei b ein beliebiges von Null verschiedenes Quaternion und

$$(2) \qquad q_1 = b i_3 - j_1 b i_3.$$

Dann ist $q_1 i_1 = b i_3 + j_1 b i_3$, $j_1 q_1 = j_1 b i_3 + b i_3$, und folglich, falls q_1 nicht Null ist,

$$(3) \qquad j_1 = q_1 i_1 q_1^{-1}.$$

Falls aber $q_1 = 0$ ist, hat man $b i_1 = j_1 b$ und dann wird also b für q_1 gesetzt die vorstehende Gleichung befriedigen. Nachdem so die Existenz eines Quaternions q_1, welches der Gleichung (3) genügt, nachgewiesen ist, setze ich

$$(4) \quad k_1 = q_1^{-1} j_1 q_1 = i_1, \quad k_2 = q_1^{-1} j_2 q_1, \quad k_3 = q_1^{-1} j_3 q_1.$$

Sei nun

$$(5) \qquad q_2 = 1 \text{ oder } q_2 = k_2 i_2 - i_1 = -(k_2 i_2 + 1) i_1$$

je nachdem $k_2 = i_2$ ist oder nicht. Man hat dann

$$(6) \qquad q_2 i_1 = k_1 q_2, \quad q_2 i_2 = k_2 q_2.$$

Im ersten Falle, wo $q_2 = 1$ zu nehmen ist, leuchtet dies unmittel-

1) Allgemein bilden die Quaternionen, deren Componenten irgend einem algebraischen Zahlenkörper K angehören, einen Quaternionenkörper. Unter diesen ist der Körper R der einfachste. Ist K ein quadratischer Zahlenkörper, so steht die Theorie des entsprechenden Quaternionenkörpers in engem Zusammenhange mit den Untersuchungen, welche Herr Hermite in der Abhandlung „Sur la théorie des formes quadratiques" (Crelle's Journal, Bd. 47 pag. 313 ff.) veröffentlicht hat.

bar ein. Im zweiten Falle aber folgen die Gleichungen (6) aus den Relationen

$$q_2 i_2 = -k_2 i_1 - i_3, \quad k_2 q_2 = -i_3 - k_2 i_1$$
$$q_2 i_1 = k_2 i_2 + 1, \quad k_1 q_2 = i_1 q_2 = (i_1 k_2 i_1) i_2 + 1 = k_2 i_2 + 1,$$

wobei von der Gleichung $i_1 k_2 i_1 = k_1 k_2 k_1 = k_2 k_1 = k_2$ Gebrauch gemacht wurde. In Folge der Gleichungen (6) wird nun

$$(7) \quad q_2^{-1} k_1 q_2 = i_1, \quad q_2^{-1} k_2 q_2 = i_2, \quad q_2^{-1} k_3 q_2 = q_2^{-1} k_1 k_2 q_2 = i_1 i_2 = i_3.$$

Combinirt man hiermit die Gleichungen (4), so erkennt man, daß das Quaternion $q = q_1 q_2$ den Gleichungen

$$(8) \qquad j_1 = q i_1 q^{-1}, \quad j_2 = q i_2 q^{-1}, \quad j_3 = q i_3 q^{-1}$$

genügt. Es gilt also der folgende Satz:

„Die allgemeinste Permutation des Körpers R der rationalen Quaternionen entsteht, wenn man dem Quaternion a das Quaternion qaq^{-1} zuordnet, unter q ein beliebig gewähltes von Null verschiedenes Quaternion verstanden."

Hieran knüpft sich die Frage, unter welcher Bedingung zwei Quaternionen q und q_1 zu derselben Permutation des Körpers R Anlaß geben. Sei für einen Augenblick $q^{-1} q_1 = q_2$. Die Permutationen (a, qaq^{-1}) und $(a, q_1 a q_1^{-1})$ sind dann offenbar nur identisch, falls $(a, q_2 a q_2^{-1})$ die identische Permutation ist. Aus den Gleichungen $q_2 i_1 = i_1 q_2$, $q_2 i_2 = i_2 q_2$ folgt aber, daß q_2 ein reelles Quaternion r ist. Es ergiebt sich also die folgende Antwort auf die aufgeworfene Frage:

„Die beiden Permutationen (a, qaq^{-1}) und $(a, q_1 a q_1^{-1})$ des Körpers R sind stets und nur dann identisch, wenn $q_1 = rq$ ist, unter r eine reelle Zahl verstanden."

Wenn q ein rationales Quaternion ist, so durchläuft qaq^{-1} gleichzeitig mit a die Gesammtheit der rationalen Quaternionen und die Permutation (a, qaq^{-1}) führt also den Körper R in sich über. Wenn umgekehrt der Körper R durch die Permutation (a, qaq^{-1}) in sich übergeht, so hat man $qi_1 = j_1 q$, $qi_2 = j_2 q$, $qi_3 = j_3 q$, wo j_1, j_2, j_3 rationale Quaternionen bedeuten. Durch diese Gleichungen müssen nach dem vorhergehenden Satze die Componenten von q bis auf einen reellen Factor bestimmt sein und somit folgt:

„Bezeichnet q ein beliebiges von Null verschiedenes rationales Quaternion, so stellt (a, qaq^{-1}) die allgemeinste Permutation vor, die den Körper R in sich überführt."

§ 3. Die ganzen Quaternionen.

Ein System von unendlich vielen Quaternionen heiße ein „Integritätsbereich", wenn in dem Systeme die Operationen der Addition, Subtraction und Multiplication unbeschränkt ausführbar sind. Lassen sich in dem Systeme überdies eine endliche Anzahl von Quaternionen $q_1, q_2, \dots q_n$ so auswählen, daß aus diesen durch ausschließliche Anwendung von Addition und Subtraction alle Quaternionen des Systemes hervorgehen, so heiße der Integritätsbereich „endlich". In der Folge werde ich unter „Integritätsbereich" schlechthin stets einen solchen verstehen, der endlich ist und nur rationale Quaternionen enthält. In bekannter Weise ergiebt sich für einen solchen Integritätsbereich der Satz:

In einem Integritätsbereich lassen sich in mannigfaltiger Weise $n \leqq 4$ Quaternionen $q_1, q_2, \dots q_n$ so auswählen, daß jedes Quaternion q des Bereiches auf eine und nur eine Art in der Form

$$q = k_1 q_1 + k_2 q_2 + \cdots + k_n q_n$$

darstellbar ist, unter $k_1, k_2, \dots k_n$ rationale ganze Zahlen verstanden.

Ein System von solchen Quaternionen $q_1, q_2, \dots q_n$ heißt eine „Basis" des Bereiches.

Von grundlegender Bedeutung für die Zahlentheorie der Quaternionen ist nun die Frage nach dem größten Integritätsbereiche, welcher die Einheiten $1, i_1, i_2, i_3$ enthält. Auf diese Frage giebt der folgende Satz die Antwort:

Man verstehe unter ϱ das Quaternion

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(1 + i_1 + i_2 + i_3). \tag{1}$$

Dann bilden die Quaternionen

$$g = k_0 \varrho + k_1 i_1 + k_2 i_2 + k_3 i_3, \tag{2}$$

wo k_0, k_1, k_2, k_3 alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen sollen, einen Integritätsbereich J mit der Basis (ϱ, i_1, i_2, i_3). Dieser ist der größte Integritätsbereich, welcher die Einheiten $1, i_1, i_2, i_3$ enthält.

Die Quaternionen mit ganzen rationalen Componenten bilden ebenfalls einen Integritätsbereich, welchen ich mit J_0 bezeichnen werde. Offenbar ist J_0 ganz in dem Bereiche J enthalten. Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, daß es außer J und J_0 keinen weiteren Integritätsbereich giebt, welcher die Einheiten $1, i_1, i_2, i_3$ enthält. Nach Analogie der Theorie der endlichen Zahlenkörper

hat man in dem Bereiche J einfachere Theilbarkeitsgesetze zu erwarten, wie im Bereiche J_0, was die weitere Untersuchung vollkommen bestätigt. Ich stelle deshalb die Definition des ganzen Quaternions folgendermaßen:

„Ein Quaternion heißt „ganz", wenn es dem Integritätsbereiche J angehört."

Der allgemeine Ausdruck (2) eines ganzen Quaternions läßt sich offenbar auf die Form bringen

$$(3) \qquad g = \tfrac{1}{2}(g_0 + g_1 i_1 + g_2 i_2 + g_3 i_3),$$

wenn man

$$g_0 = k_0, \quad g_1 = k_0 + 2k_1, \quad g_2 = k_0 + 2k_2, \quad g_3 = k_0 + 2k_3$$

setzt. Hieraus schließt man, daß die Gleichung (3) das allgemeinste ganze Quaternion g darstellt, wenn man unter g_0, g_1, g_2, g_3 irgend welche ganze Zahlen versteht, die entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind. Die Norm des Quaternions g wird durch die Gleichung

$$(4) \quad N(g) = \tfrac{1}{4}(g_0^2 + g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_0(k_1 + k_2 + k_3)$$

gegeben. Endlich ist zu bemerken, daß das durch (2) dargestellte Quaternion g dem Bereiche J_0 angehört oder nicht, je nachdem k_0 gerade ist oder nicht.

An den Begriff des ganzen Quaternions knüpfen sich nun unmittelbar die folgenden Definitionen:

Das ganze Quaternion a heißt durch das ganze Quaternion b rechtsseitig (linksseitig) theilbar, wenn die Gleichung $a = cb$ ($a = bc$) durch ein passend gewähltes ganzes Quaternion c befriedigt werden kann. Es soll dann auch b ein rechtsseitiger oder rechts stehender, (resp. linksseitiger oder links stehender) Divisor von a genannt werden.

Hiernach ist das von Null verschiedene ganze Quaternion b ein rechtsseitiger (linksseitiger) Divisor von a, wenn ab^{-1} ($b^{-1}a$) ganz ist. Neben den genannten Bezeichnungen sollen auch die Redewendungen gebraucht werden: a sei durch b rechtsseitig (linksseitig) theilbar und b gehe rechtsseitig (linksseitig) in a auf.

Soll das ganze Quaternion ε in jedem anderen rechtsseitig aufgehen, so muß ε^{-1} ganz sein und ε geht dann auch linksseitig in jedem ganzen Quaternion auf.

Ein solches Quaternion ε heiße eine „Einheit." Da, wie leicht zu sehen, $N(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon' = 1$ die nothwendige und

hinreichende Bedingung dafür ist, daß ε eine Einheit ist, so erhält man alle Einheiten durch Auflösung der Gleichung

$$N(g) = \tfrac{1}{4}(g_0^2+g_1^2+g_2^2+g_3^2) = 1.$$

Es giebt daher 24 Einheiten, nämlich

$$(5) \qquad \varepsilon = \pm 1, \pm i_1, \pm i_2, \pm i_3, \frac{\pm 1 \pm i_1 \pm i_2 \pm i_3}{2}.$$

§ 4. Die Permutationen der ganzen Quaternionen.

Eine Permutation des Körpers R, welche jedes ganze Quaternion in ein eben solches überführt, welche also den Bereich J in sich transformirt, soll eine „Permutation der ganzen Quaternionen" heißen.

Solche Permutationen werden offenbar durch die Festsetzung definirt, daß dem Quaternion a das Quaternion

$$(1) \qquad f(a) = \varepsilon a \varepsilon^{-1}$$

zugeordnet sein soll, unter ε eine Einheit verstanden. Aber auch das Zuordnungsgesetz

$$(2) \qquad f(a) = \zeta a \zeta^{-1},$$

wo zur Abkürzung

$$(3) \qquad \zeta = 1 + i_1$$

gesetzt worden ist, stellt eine Permutation der ganzen Quaternionen vor, wie aus der Gleichung

$$\zeta(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)\zeta^{-1} = a_0 + a_1 i_1 - a_2 i_2 + a_3 i_3$$

hervorgeht. Durch die Combination von (1) und (2) entstehen die weiteren Permutationen

$$(1') \qquad f(a) = \varepsilon \zeta a \zeta^{-1} \varepsilon^{-1},$$

und ich will nun zeigen, daß mit (1) und (1') sämmtliche Permutationen der ganzen Quaternionen erschöpft sind. Zunächst folgt aus dem vorletzten Satze von § 2, daß (1) und (1') im Ganzen 24 verschiedene Permutationen darstellen. Nun kann es aber nicht mehr als 24 Permutationen der ganzen Quaternionen geben. Denn durch jede solche Permutation müssen i_1, i_2, i_3 in drei ganze Quaternionen j_1, j_2, j_3 übergehen, welche den Gleichungen (1) von § 2 genügen und folglich mit $\pm i_\alpha, \pm i_\beta, \pm i_\gamma$ übereinstimmen, unter α, β, γ eine Permutation von 1, 2, 3 verstanden. Die Vorzeichen sind zugleich der Bedingung $\pm i_\alpha . \pm i_\beta . \pm i_\gamma = -1$ unterworfen.

Hieraus folgt, daß jede Permutation der ganzen Quaternionen mit einer der 24 in § 1 erwähnten Permutationen $\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ \pm i_\alpha, & \pm i_\beta, & \pm i_\gamma \end{pmatrix}$ zusammenfällt.

Da zu jeder Einheit ε die Einheit ε_1 so bestimmt werden kann, daß $\varepsilon\xi = \xi\varepsilon_1$ ist, so lassen sich die 12 Permutationen (1′) auch in folgender Form darstellen:

$$(1'') \qquad f(a) = \xi\varepsilon a\varepsilon^{-1}\xi^{-1}.$$

Auf Grund des vorstehenden Ergebnisses ist es nun leicht, die folgende Frage zu erledigen:

Welche ganzen Quaternionen v haben die Eigenschaft, daß jedes ganze Quaternion a, welches linksseitig durch v theilbar ist, auch nothwendig rechtsseitig durch v theilbar ist und umgekehrt?

Hierzu ist erforderlich und hinreichend, daß jedes Quaternion vc auch in der Form $c_1 v$ darstellbar ist, daß also gleichzeitig mit c auch vcv^{-1} ganz ist. Diese Bedingung läßt sich nun dahin aussprechen, daß (a, vav^{-1}) eine Permutation der ganzen Quaternionen sein muß. Folglich sind die Quaternionen v durch die Gleichungen

$$(4) \qquad v = r\varepsilon, \quad v = r\xi\varepsilon$$

gegeben, in welchen $\xi = 1 + i_1$ ist, ε eine beliebige Einheit, r eine beliebige reelle ganze Zahl bedeutet. Die charakteristische Eigenschaft der Quaternionen v kann auch dahin ausgesprochen werden, daß sie mit der Gesammtheit der ganzen Quaternionen vertauschbar sind. Bei der Aussage: ein ganzes Quaternion a sei durch ein Quaternion v theilbar, darf offenbar der Zusatz „rechtsseitig“ oder „linksseitig“ fortgelassen werden.

§ 5. Der grösste gemeinsame Theiler zweier ganzen Quaternionen.

Wenn g ein ganzes Quaternion und m eine positive ganze Zahl ist, so läßt sich das ganze Quaternion q so bestimmen, daß die Norm von $g - qm$ kleiner als m^2 wird.

Denn ist

$$g = k_0\varrho + k_1 i_1 + k_2 i_2 + k_3 i_3 \text{ und } q = t_0\varrho + t_1 i_1 + t_2 i_2 + t_3 i_3,$$

so werden die Componenten von $g - qm$, nämlich

$$\tfrac{1}{2}(k_0 - mt_0), \quad \tfrac{1}{2}(k_0 + 2k_1 - m(t_0 + 2t_1)), \quad \tfrac{1}{2}(k_0 + 2k_2 - m(t_0 + 2t_2)),$$
$$\tfrac{1}{2}(k_0 + 2k_3 - m(t_0 + 2t_3)),$$

durch geeignete Verfügung über die ganzen Zahlen t_0, t_1, t_2, t_3 be-

züglich kleiner oder gleich

$$\tfrac{1}{4}m,\quad \tfrac{1}{2}m,\quad \tfrac{1}{2}m,\quad \tfrac{1}{2}m$$

und daher die Norm von $g-qm$ höchstens gleich

$$(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4})m^2 < m^2.$$

Aus dieser Bemerkung ergiebt sich nun leicht der Satz:

Bezeichnen a und b zwei ganze Quaternionen, von welchen das letztere nicht Null ist, so lassen sich die ganzen Quaternionen q, c und q_1, c_1 so bestimmen, daß

(1) $$a = qb + c,$$

(1′) $$a = bq_1 + c_1$$

und zugleich $N(c) < N(b)$, sowie $N(c_1) < N(b)$ wird.

Um die Existenz der Quaternionen q, c einzusehen, hat man nur die obige Bemerkung auf den Fall anzuwenden, wo $g = ab'$, $m = bb'$ ist. Ebenso ergiebt die Annahme $g = b'a$, $m = b'b$ die Existenz der Quaternionen q_1, c_1.

Auf diesen Satz läßt sich offenbar ein rechtsseitiger (1) und ein linksseitiger (1′) Divisions-Algorithmus gründen, woraus dann weiter die Existenz eines rechtsseitigen und eines linksseitigen größten gemeinsamen Theilers irgend zweier ganzen Quaternionen, die nicht beide Null sind, folgt. Indessen ziehe ich es vor, die Theorie der größten gemeinsamen Theiler auf den Begriff des Quaternionen-Ideals zu stützen.

Ein System nicht sämmtlich verschwindender ganzen Quaternionen heiße ein rechtsseitiges (linksseitiges) Ideal, wenn mit a und b auch $a+b$, $a-b$ und ga (ag) dem Systeme angehören, unter g ein beliebiges ganzes Quaternion verstanden.

Bezeichnet d irgend ein von Null verschiedenes ganzes Quaternion und durchläuft g die Gesammtheit aller ganzen Quaternionen, so bildet das System (gd) ein rechtsseitiges, das System (dg) ein linksseitiges Ideal. Solche Ideale mögen rechtsseitige, bezüglich linksseitige „Hauptideale“ heißen. Es gilt nun der Satz:

„Jedes Quaternionen-Ideal ist ein Hauptideal.“

In der That: es sei $\mathfrak{a}$ ein rechtsseitiges Ideal und d eines derjenigen nicht verschwindenden Quaternionen des Ideals, welche eine möglichst kleine Norm haben. Ist nun a irgend ein Quaternion des Ideals $\mathfrak{a}$, so gehört auch $a-qd$ dem Ideale an, unter q ein beliebiges ganzes Quaternion verstanden. Dieses läßt sich aber so bestimmen, daß $N(a-qd) < N(d)$ und folglich Null wird.

Es ist also $a = qd$, w. z. b. w. Ebenso folgt die Richtigkeit unseres Satzes für linksseitige Ideale.

Bezeichnen jetzt a und b irgend zwei ganze Quaternionen, die nicht beide Null sind, so bildet die Gesammtheit der Quaternionen $ga + hb$ (bez. $ag + bh$), wo g und h alle ganzen Quaternionen durchlaufen, ein rechtsseitiges (bez. linksseitiges) Ideal. Aus dem vorhergehenden Satze folgt daher:

„Je zwei ganze Quaternionen a und b, die nicht beide Null sind, haben einen gemeinsamen rechtsseitigen Theiler d, welcher in der Form

$$d = ga + hb$$

und einen gemeinsamen linksseitigen Theiler d_1, welcher in der Form

$$d_1 = ag_1 + bh_1$$

darstellbar ist."

Hier bedeuten g, h, g_1, h_1 ganze Quaternionen. Die Theiler d und d_1 heißen der größte gemeinsame rechtsseitige oder rechts stehende bez. linksseitige oder links stehende Theiler von a und b. Da zwei Quaternionen nur dann dasselbe Hauptideal erzeugen, wenn sie sich um einen Einheitsfactor unterscheiden, so ergiebt sich:

„Der Theiler d ist bis auf einen links stehenden, der Theiler d_1 bis auf einen rechts stehenden Einheitsfactor bestimmt."

Jeder rechtsseitige (linksseitige) Divisor von d (d_1) ist gemeinsamer rechtsseitiger (linksseitiger) Divisor von a und b und umgekehrt. Wenn d (d_1) eine Einheit ist, so sollen a und b rechtsseitig (linksseitig) theilerfremd heißen. Sind a und b rechtsseitig theilerfremd, so läßt sich die Gleichung

$$ga + hb = 1$$

durch ganze Quaternionen g, h befriedigen und umgekehrt. Entsprechendes gilt, wenn a und b linksseitig theilerfremd sind.

Es leuchtet ein, daß $N(a)$ und $N(b)$ einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Theiler besitzen, falls a und b einen rechtsseitigen oder linksseitigen gemeinsamen Divisor haben, der nicht eine Einheit ist. Dieser Satz läßt sich für den Fall umkehren, daß eines der beiden Quaternionen a und b zu den Quaternionen v gehört; mit anderen Worten, es läßt sich Folgendes beweisen:

„Ein beliebiges Quaternion a und ein Quaternion v, welches mit der Gesammtheit der ganzen Quaternionen vertauschbar ist, sind stets gleichzeitig rechtsseitig und linksseitig theilerfremd oder nicht. Und

zwar tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem $N(a)$ und $N(v)$ theilerfremd sind oder nicht."

Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, daß jede der beiden Gleichungen $ga+hv=1$ und $ag+vh=1$ nur bestehen kann, wenn $N(a)$ und $N(v)$ theilerfremd sind. Ist z. B. $v=r$ eine reelle ganze Zahl, so zieht die Gleichung $ga+hr=1$, die andere

$$N(g).N(a) = N(1-hr) = 1+N(h).r^2-(h+h')r$$

nach sich, aus welcher hervorgeht, daß $N(a)$ und $N(r)=r^2$ keinen gemeinsamen Primfactor haben können.

Nach dem ersten Theil des vorstehenden Satzes darf bei der Aussage: die beiden Quaternionen a und v seien theilerfremd oder nicht, der Zusatz „rechtsseitig" oder „linksseitig" fortgelassen werden.

§ 6. Gerade und ungerade Quaternionen. Primäre Quaternionen.

Bezeichnet v irgend eines der Quaternionen $r\varepsilon, r\xi\varepsilon$, die mit der Gesammtheit der ganzen Quaternionen vertauschbar sind, so soll die Congruenz

$$a \equiv b \pmod{v} \tag{1}$$

ausdrücken, daß die Differenz $a-b$ der beiden ganzen Quaternionen a und b durch v theilbar ist. Solche Congruenzen dürfen wie Gleichungen addirt und subtrahirt werden, und die beiden Seiten können mit demselben ganzen Quaternion sowohl linksseitig, wie rechtsseitig multiplicirt werden. Auch besteht zugleich mit (1) stets die Congruenz

$$a' \equiv b' \pmod{v}, \tag{2}$$

wo a', b' wie gewöhnlich die zu a und b conjugirten Quaternionen bedeuten.

In diesem Paragraphen betrachte ich nur Congruenzen nach den Moduln $v=\xi=1+i_1$, $v=2$, $v=2\xi$.

Da $i_1 \equiv i_2 \equiv i_3 \equiv 1 \pmod{1+i_1}$, so ist jedes ganze Quaternion, wie aus (2) in § 3 hervorgeht, einem der Quaternionen $0, 1, \varrho, \varrho+1 \equiv \varrho^2 \pmod{1+i_1}$ congruent. Es bilden also

$$0,\ 1,\ \varrho,\ \varrho^2$$

ein vollständiges Restsystem nach dem Modul $\xi=1+i_1$. Hieraus ergeben sich die folgenden Sätze:

„Ein Quaternion gehört stets und nur dann dem Bereiche J_0 an, d. h. es besitzt stets und nur dann ganzzahlige Componenten, wenn es congruent 0 oder 1 nach $1+i_1$ ist."

Ein Quaternion, dessen Norm gerade ist, ist durch $\xi = 1 + i_1$ theilbar, und weiter:

Ist $N(a)$ durch 2^r, aber durch keine höhere Potenz von 2 theilbar, so hat man

$$a = (1+i_1)^r . b,$$

wo b eine ungerade Norm besitzt und also zu $1+i_1$ theilerfremd ist.

Zur Abkürzung will ich ein solches Quaternion b von ungerader Norm ein „ungerades Quaternion“ nennen.

Nach dem Modul $v = 2$ durchläuft $g = k_0\varrho + k_1 i_1 + k_2 i_2 + k_3 i_3$ ein vollständiges Restsystem, wenn k_0, k_1, k_2, k_3 unabhängig von einander jeden der Werthe 0, 1 erhalten. Hieraus folgert man leicht:

Die 12 Einheiten

$$1,\ i_1,\ i_2,\ i_3,\ \frac{1 \pm i_1 \pm i_2 \pm i_3}{2}$$

und die 4 Quaternionen

$$0,\ 1+i_1,\ 1+i_2,\ 1+i_3$$

bilden ein vollständiges Restsystem (mod. 2).

Die genannten 12 Einheiten bilden für sich offenbar ein vollständiges System zu 2 theilerfremder Reste (mod. 2).

Sei nun b ein beliebiges ungerades Quaternion. Dann lassen sich dem vorstehenden Satze zufolge die Einheiten ε und ε_1 so bestimmen, daß

$$b\varepsilon \equiv \varepsilon_1 b \equiv 1 \pmod 2$$

wird. Diese Einheiten sind bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt. Da nun ferner jedes Quaternion, welches $\equiv 1 \pmod 2$ ist, nach dem Modul $2(1+i_1)$ einem der Quaternionen

$$1,\quad 1+2 \equiv -1,\quad 1+2\varrho,\quad 1+2\varrho^2 \equiv -1-2\varrho$$

congruent ist, so erkennt man, daß auch die Vorzeichen von ε und ε_1 bestimmt sind, falls man verlangt, daß $b\varepsilon$ und $\varepsilon_1 b$ einem der beiden Quaternionen $1,\ 1+2\varrho \pmod{2(1+i_1)}$ congruent werden sollen. Ich führe jetzt die folgenden weiteren Benennungen ein:

„Unter einem primären Quaternion sei ein solches verstanden, welches entweder zu 1 oder zu $1+2\varrho$ nach dem Modul $2(1+i_1)$ congruent ist.“

„Zwei ganze Quaternionen heißen rechtsseitig (linksseitig) associirt, wenn sie sich nur um einen rechts (links) stehenden Einheitsfactor unterscheiden.“

Die vorstehende Betrachtung lehrt dann:

„Unter den 24 zu einem ungeraden Quaternion b rechtsseitig (linksseitig) associirten Quaternionen giebt es stets eines und nur eines, welches primär ist."

Für die primären Quaternionen gelten folgende leicht zu beweisende Sätze:

Das Produkt zweier primären Quaternionen ist ebenfalls primär.

Jedes primäre Quaternion hat ganze Componenten, gehört also dem Bereiche J_0 an.

Bezeichnet b ein primäres Quaternion, so ist b' oder $-b'$ primär, je nachdem $b \equiv 1$ oder $\equiv 1+2\varrho$ (mod. $2(1+i_1)$) ist.

§ 7. Die ganzen Quaternionen nach einer ungeraden Zahl als Modul.

Die allgemeine Gestalt des ganzen Quaternions, wie sie durch die Gleichung (3) in § 2 gegeben wird, zeigt, daß, unter m eine positive ungerade Zahl verstanden, die m^4 Quaternionen

$$(1) \qquad q = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3 \quad (q_0, q_1, q_2, q_3 = 0, 1, 2, \ldots m-1)$$

ein vollständiges Restsystem (mod. m) bilden. Die Anzahl der (mod. m) betrachteten ganzzahligen binären Substitutionen

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} x_1' &\equiv \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2' &\equiv \gamma x_1 + \delta x_2 \end{aligned}\right\} \text{(mod. } m) \quad (S)$$

beträgt ebenfalls m^4. Und es besteht nun der folgende Satz, welcher einer der bemerkenswerthesten dieser Theorie ist:

„Die m^4 Quaternionen q lassen sich den m^4 Substitutionen S eindeutig umkehrbar so zuordnen, daß für irgend zwei einander zugeordnete q und S die Congruenz

$$N(q) \equiv \alpha\delta - \beta\gamma \text{ (mod. } m)$$

gilt und daß ferner, wenn q und S sowie $\bar{q}$ und $\bar{S}$ einander zugeordnet sind, dem Quaternion $q\bar{q}$ die zusammengesetzte Substitution $S\bar{S}$ zugeordnet ist."

Dabei sind natürlich $q\bar{q}$ und $S\bar{S}$ (mod. m) zu nehmen.

Zu dem Beweise dieses Satzes gebrauche ich den folgenden Hülfssatz[1]):

---

1) Der Hülfssatz rührt von Lagrange her. Vgl. Serret, Cours d'algèbre supérieure (t. II No. 329—330) und Hermite, l. c. pag. 343.

„Die ganzen Zahlen r und s lassen sich so bestimmen, daß

$$1+r^2+s^2 \equiv 0 \pmod{m} \tag{3}$$

wird."

Es genügt, dieses für den Fall zu beweisen, wo m eine ungerade Primzahl, $m = p$, ist. Denn durch bekannte Schlüsse folgt sodann successive die Lösbarkeit der Congruenz (3) für den Fall, wo m Potenz einer ungeraden Primzahl und endlich für den Fall, wo m eine beliebige ungerade Zahl ist.

Wenn nun $m = p$ eine ungerade Primzahl ist, so leuchtet die Lösbarkeit der Congruenz (3) unmittelbar ein, falls -1 quadratischer Rest von p ist. Im anderen Falle sei a der erste quadratische Rest von p, welcher sich in der Reihe $p-1, p-2, p-3, \ldots$ findet. Dann ist $a+1 = b$ quadratischer Nichtrest, und folglich kann man r und s so bestimmen, daß $a \equiv r^2$, $b \equiv -s^2 \pmod{p}$ wird, worauf dann $1+r^2+s^2 \equiv 0 \pmod{p}$ ist. Dies vorausgeschickt, mögen nun r und s der Congruenz (3) gemäß gewählt werden. Dann ist offenbar

$$q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 \equiv \{q_0^2-(rq_2+sq_3)^2\}-\{(sq_2-rq_3)^2-q_1^2\} \pmod{4}, \tag{4}$$

wenn q_0, q_1, q_2, q_3 vier beliebige ganze Zahlen bezeichnen. Durch die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv q_0-rq_2-sq_3 \\ \delta &\equiv q_0+rq_2+sq_3 \\ \beta &\equiv q_1-sq_2+rq_3 \\ \gamma &\equiv -q_1-sq_2+rq_3 \end{aligned}\right\} \pmod{m}, \tag{5}$$

deren Umkehrungen

$$\left.\begin{aligned} &2q_0 \equiv \alpha+\delta, \quad 2q_1 \equiv \beta-\gamma \\ &2q_2 \equiv r(\alpha-\delta)+s(\beta+\gamma), \quad 2q_3 \equiv s(\alpha-\delta)-r(\beta+\gamma) \end{aligned}\right\} \pmod{m} \tag{6}$$

lauten, werden daher die Quaternionen (1) den Substitutionen (2) eindeutig umkehrbar so zugeordnet, daß

$$N(q) \equiv \alpha\delta-\beta\gamma \pmod{m} \tag{7}$$

ist. Nun lassen sich ferner die Congruenzen (6) in die eine Congruenz

$$2q \equiv \alpha\xi_1+\beta\xi_2-\gamma i_1\xi_1+\delta\xi_1' \pmod{m} \tag{8}$$

zusammenziehen, wenn zur Abkürzung

$$\xi_1 = 1+ri_2+si_3, \quad \xi_2 = i_1+si_2-ri_3 = \xi_1 i_1 = i_1\xi_1'$$

gesetzt wird, und wie gewöhnlich ξ_1', ξ_2' die zu ξ_1, ξ_2 bez. conjugirten

Quaternionen bezeichnen. Wenn jetzt neben (8) die Congruenz

$$(\bar{8}) \qquad 2\bar{q} \equiv \bar{\alpha}\xi_1 + \bar{\beta}\xi_2 - \bar{\gamma} i_1 \xi_1 + \bar{\delta}\xi_1' \pmod{m}$$

besteht, so ergiebt eine leichte Rechnung, daß

$$2q\bar{q} \equiv (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\gamma})\xi_1 + (\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\delta})\xi_2 - (\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\gamma}) i_1 \xi_1 + (\gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\delta})\xi_1' \pmod{m}$$

wird, womit nun der oben aufgestellte Satz vollständig bewiesen ist[1]).

Es mögen hier nur die nächstliegenden Folgerungen aus diesem Satze Platz finden.

Ein Quaternion (1) heiße „primitiv" nach m, wenn der größte gemeinsame Theiler seiner Componenten q_0, q_1, q_2, q_3 theilerfremd zu m ist. Bestimmt man nun, was leicht geschieht, die Anzahl der incongruenten Lösungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Congruenz $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0 \pmod{m}$, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, m$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen sollen, so ergiebt sich:

„Die Anzahl der (mod. m) incongruenten Quaternionen q, die nach m primitiv sind und der Bedingung

$$N(q) \equiv 0 \pmod{m}$$

genügen, beträgt:

$$m^3 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

wo das Produkt über alle Primfactoren p von m zu erstrecken ist."

Ist insbesondere $m = p$ eine Primzahl, so wird diese Anzahl $(p^3 - 1)(p + 1)$. Ferner folgt aus dem obigen Satze:

„Die Anzahl der (mod. m) incongruenten ganzen Quaternionen, deren Norm $\equiv 1 \pmod{m}$ ist, beträgt

$$N = m^3 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Diese Quaternionen bilden eine Gruppe G_m, welche

---

1) Die ganzzahligen binären Substitutionen lassen sich auffassen als ein System von Zahlen, welche mit vier Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4 gebildet sind, wobei die Multiplication durch die Gleichung

$$(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4)(\bar{\alpha} e_1 + \bar{\beta} e_2 + \bar{\gamma} e_3 + \bar{\delta} e_4)$$
$$= (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\gamma}) e_1 + (\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\delta}) e_2 + (\gamma\bar{\alpha} + \delta\bar{\gamma}) e_3 + (\gamma\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}) e_4$$

definirt ist. (Vgl. Frobenius, über lineare Substitutionen und bilineare Formen. Crelle's Journal Bd. 84.) Der Satz des Textes besagt nun, daß, nach einer ungeraden ganzen Zahl m als Modul betrachtet, dieses Zahlensystem mit dem System der ganzen Quaternionen identisch ist.

der Gruppe der homogenen binären unimodularen ganzzahligen Substitutionen (mod. m) holoedrisch isomorph ist."

Die Darstellung der letzteren Gruppe, welche bekanntlich in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen eine wichtige Rolle spielt, durch die Quaternionen kann mit Nutzen für die Untersuchung der in der Gruppe enthaltenen Untergruppen verwendet werden. Insbesondere kann diese Quaternionendarstellung die Einführung der Galois'schen Imaginären ersetzen [1]).

Ist $m = 3$, so ergiebt sich $N = 24$, und da die 24 Einheiten in Bezug auf 3 (wie in Bezug auf jede ganze Zahl > 2) incongruent sind, so folgt:

„Die Gruppe der 24 Einheiten (die in jeder Gruppe G_m als Untergruppe enthalten ist) ist zu der Gruppe der homogenen Tetraedersubstitutionen holoedrisch isomorph."

Schließlich bemerke ich noch, daß in Bezug auf die Potenzen von 2 als Moduln ein ähnlicher Satz wie der Hauptsatz dieses Paragraphen nicht besteht. Dies erhellt schon aus dem Vergleich der folgenden Anzahlen:

„Die Anzahl der (mod. 2^λ) incongruenten ganzen Quaternionen g, welche den Bedingungen

$$N(g) \equiv 0 \pmod{2^\lambda} \quad \text{resp.} \quad N(g) \equiv 2^\nu . u \pmod{2^\lambda}$$

genügen, beträgt $2^{3\lambda}$ resp. $2^{3\lambda-\nu-1} . 3$. Dabei bezeichnet in der zweiten Congruenz u eine gegebene ungerade Zahl und ν einen gegebenen der Reihe $0, 1, 2, \ldots \lambda-1$ angehörenden Exponenten."

Die Anzahl der (mod. 2^λ) incongruenten Lösungen der Congruenzen

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0 \pmod{2^\lambda} \quad \text{resp.} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 2^\nu . u \pmod{2^\lambda}$$

beträgt dagegen $2^{3\lambda-1}(3 . 2^\lambda - 1)$ resp. $3 . 2^{3\lambda-\nu-2}(2^{\nu+1} - 1)$.

§ 8. Die Primquaternionen.

Ein ganzes Quaternion π, welches keine Einheit ist, heiße ein Primquaternion, wenn dasselbe nur solche Darstellungen als Produkt zweier ganzen Quaternionen gestattet, bei welchen einer der beiden Factoren eine Einheit ist. Hieraus folgt zunächst:

Ist die Norm von π eine Primzahl, so ist π ein Primquaternion. Weil nämlich aus $\pi = ab$, die Gleichung

1) Vgl. Klein-Fricke, „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen" (Leipzig 1890 Bd. I pag. 387—491), wo sich auch die weitere hier in Betracht kommende Litteratur angegeben findet.

$N(\pi) = N(a).N(b)$ folgt, so muß entweder $N(a)$ oder $N(b) = 1$ sein, falls $N(\pi)$ Primzahl ist. Um auch die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, zeige ich zuerst, daß eine Primzahl, aufgefaßt als ein reelles Quaternion, niemals ein Primquaternion ist. Für die Primzahl 2 folgt dies aus der Gleichung $2 = (1+i_1)(1-i_1)$. Ist p eine ungerade Primzahl, so kann man (nach § 7) ein Quaternion q bestimmen, dessen Componenten nicht sämmtlich durch p theilbar sind, während $N(q) \equiv 0 \pmod{p}$ ist. Sei δ der größte rechtsseitige gemeinsame Theiler von p und q (welcher nach § 5 keine Einheit ist), so ist etwa $p = \delta_1\delta$, $q = \delta_2\delta$. Hier kann nun δ_1 keine Einheit sein, weil sonst δ und p associirt wären und daher p in allen Componenten von $q = \delta_2\delta$ aufgehen müßte. Aus der Zerlegung $p = \delta_1\delta$ folgt, daß p kein Primquaternion ist. Dies vorausgeschickt, ist es nun leicht die Umkehrung des vorhergehenden Satzes zu beweisen:

Ist π ein Primquaternion, so ist die Norm von π eine Primzahl.

In der That: sei π ein Primquaternion und p ein Primfactor von $N(\pi)$. Dann haben π und p einen gemeinsamen Theiler, der von einer Einheit verschieden ist. Da π Primquaternion ist, muß p durch π theilbar, also $p = \pi\pi_1$ sein. Folglich ist $p^2 = N(\pi)N(\pi_1)$ und, weil π_1 keine Einheit sein kann (denn sonst würde $p = \pi\pi_1$ Primquaternion sein), schließlich $N(\pi) = N(\pi_1) = p$.

Nach dem Vorstehenden stimmen die Primquaternionen mit den Factoren der Primzahlen überein. Was nun zunächst die Primzahl 2 angeht, so ist, abgesehen von Einheitsfactoren, $\xi = 1 + i_1$ das einzige Primquaternion, welches Factor von 2 ist. Denn aus $2 = aa'$ folgt $a = (1+i_1)\varepsilon$ (nach § 6). Indem ich zur Bestimmung aller in einer bestimmten ungeraden Primzahl p aufgehenden Primquaternionen übergehe, bemerke ich zunächst, daß es offenbar genügt, die primären unter ihnen zu betrachten. Denn aus diesen gehen alle übrigen durch Multiplication mit Einheiten hervor.

Nach dem vorigen Paragraphen giebt es unter den p^4 Quaternionen eines vollständigen Restsystems (mod. p) außer dem Quaternion 0 noch $(p^2-1)(p+1)$, deren Norm durch p theilbar ist. Diese Quaternionen will ich generell mit dem Buchstaben f bezeichnen und ich will annehmen, daß für jedes einzelne $N(f)$ durch p aber nicht durch p^2 theilbar sei. Letztere Annahme ist erlaubt, da

$$(f_0 + t\,p)^2 + (f_1 + t_1 p)^2 + (f_2 + t_2 p)^2 + (f_3 + t_3 p)^2 \equiv N(f) + 2p(t_0 f_0 + t_1 f_1 + t_2 f_2 + t_3 f_3) \pmod{p^2}$$

durch geeignete Wahl der ganzen Zahlen t_0, t_1, t_2, t_3 offenbar durch

p^2 untheilbar gemacht werden kann. Jedes Quaternion f hat nun (nach § 5) mit p einen größten rechtsseitigen gemeinsamen Theiler π, der keine Einheit und überdies völlig durch die Forderung bestimmt ist, daß er primär sein soll. Aus jedem Quaternion f entspringt hiernach vermöge der Gleichungen

$$f = \alpha\pi, \quad p = \pi'\pi \tag{1}$$

ein bestimmtes primäres Quaternion π, dessen Norm, wie leicht zu sehen, gleich p ist. Umgekehrt wird jedes primäre Primquaternion π von der Norm p mindestens aus einem der Quaternionen f in dieser Weise hervorgehen, nämlich sicher aus demjenigen f, welches $\equiv \pi \pmod{p}$ ist.

Bildet man also für jedes einzelne Quaternion f die Gleichungen (1), so findet man alle primären Primquaternionen π von der Norm p. Jedes solche Primquaternion entsteht aber auf diese Weise (p^2-1) Mal. Um dieses einzusehen, frage man zunächst, unter welcher Bedingung f und $f^{(1)}$ zu demselben Quaternion π Anlaß geben. Man erkennt leicht, daß hierzu nothwendig und hinreichend ist, daß die Congruenz

$$f^{(1)} \equiv qf \pmod{p} \tag{2}$$

durch ein ganzes Quaternion q sich befriedigen läßt. In der That, wenn $f = \alpha\pi$, $f^{(1)} = \alpha^{(1)}\pi$ ist, so sind $N(\alpha)$ und $N(\alpha^{(1)})$ prim zu p und folglich läßt sich q aus der Congruenz $q\alpha \equiv \alpha^{(1)} \pmod{p}$ bestimmen. Es ist dann $f^{(1)} \equiv qf \pmod{p}$. Umgekehrt: wenn $f^{(1)} \equiv qf \pmod{p}$ und $f = \alpha\pi$ ist, so hat man

$$f^{(1)} = q\alpha\pi + q^{(1)}.p = (q\alpha + q^{(1)}\pi')\pi.$$

Nunmehr bezeichne f ein bestimmtes Quaternion und q das allgemeine Glied eines vollständigen Restsystemes $(\mathrm{mod.}\ p)$. Unter den p^4 Quaternionen qf mögen sich ε nach dem Modul p incongruente befinden. Da nun die Congruenz

$$qf \equiv q^{(1)}f \pmod{p} \text{ mit } (q-q^{(1)})f \equiv 0 \pmod{p}$$

gleichbedeutend ist, so ist $\frac{p^4}{\varepsilon}$ die Anzahl der incongruenten Lösungen x der Congruenz

$$xf \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3}$$

Die letztere Anzahl beträgt aber p^2, wie sich leicht ergiebt, wenn man vermöge der Sätze des letzten Paragraphen von den Quaternionen zu den linearen Substitutionen übergeht. Daher ist $\varepsilon = p^2$. Abgesehen von 0 giebt es also unter den Quaternionen qf im

Ganzen p^2-1 incongruente, woraus nun weiter folgt, daß immer je p^2-1 der Quaternionen f zu demselben Quaternion π Anlaß geben.

Da die Gesammtzahl der Quaternionen f $(p^2-1)(p+1)$ beträgt, so erkennt man nunmehr:

„Es giebt genau $p+1$ primäre Primquaternionen, deren Norm gleich der ungeraden Primzahl p ist.

Jedes ungerade Quaternion geht aus einem bestimmten primären durch rechtsseitige Multiplication mit einer Einheit hervor. Daher giebt es im Ganzen $24(p+1)$ verschiedene in p aufgehende Primquaternionen. Unter diesen befinden sich $8(p+1)$ mit ganzen Componenten, da nur die Multiplication mit den 8 Einheiten ± 1, $\pm i_1, \pm i_2, \pm i_3$ aus einem primären Quaternion Quaternionen mit ganzen Componenten entstehen läßt.

§ 9. Der Zerlegungssatz[1]).

Jedes ganze Quaternion a läßt sich nach § 6 in die Form bringen

$$a = (1+i_1)^r . b,$$

wo b ein ungerades Quaternion bezeichnet. Man braucht daher nur die Zerlegung ungerader Quaternionen zu betrachten und zwar darf man sich dabei noch auf primäre Quaternionen beschränken, da jedes ungerade Quaternion durch Multiplication mit einer Einheit in ein primäres Quaternion verwandelt werden kann. Sei nun b ein primäres Quaternion und m der größte gemeinsame Theiler der Componenten von b (die ganze Zahlen sind). Dieser Theiler m werde mit einem solchen Vorzeichen genommen, daß $m \equiv 1 \pmod 4$ ist. Man hat dann

$$b = mc,$$

wo c ein primäres Quaternion ist, dessen Componenten keinen gemeinsamen Theiler haben. Ein solches Quaternion c, werde zur Abkürzung „primitiv“ genannt. Nach dieser Festsetzung ist ein primitives Quaternion immer auch „primär“. Für die primitiven Quaternionen gilt nun folgender Zerlegungssatz: Es sei c ein primitives Quaternion und

$$N(c) = pqr \ldots, \tag{1}$$

wo $p, q, r, \ldots$ die sämmtlichen (gleichen oder ungleichen)

1) Man vergleiche zu diesem Paragraphen die Sätze von Herrn Lipschitz, l. c. pag. 48, 50 u. 52.

Primfactoren von $N(c)$, in eine beliebige aber bestimmte Reihenfolge gebracht, bezeichnen. Dann ist c, und zwar nur auf eine Weise, in der Form darstellbar

$$c = \pi\varkappa\varrho\ldots, \tag{2}$$

wo $\pi, \varkappa, \varrho, \ldots$ primäre Primquaternionen bedeuten, deren Normen der Reihe nach gleich $p, q, r, \ldots$ sind.

Nachdem man nämlich $N(c)$ in die Factoren $pqr\ldots$ aufgelöst hat, bestimme man den größten primären linksseitigen gemeinsamen Theiler π von c und p. Dann ist $c = \pi c_1$, wo c_1 wieder primitiv und $N(c_1) = qr\ldots$ ist. In entsprechender Weise findet man $c_1 = \varkappa c_2$, $N(c_2) = r\ldots$, wo $\varkappa$ den größten primären linksseitigen gemeinsamen Theiler von c_1 und q bezeichnet. So fortfahrend, erhält man c in der Form $\pi\varkappa\varrho\ldots$ dargestellt, und diese Darstellung ist nur auf eine Weise möglich, weil $\pi, \varkappa, \varrho, \ldots$ successive als größte gemeinsame Theiler eindeutig bestimmt sind. Der folgende specielle Fall des vorstehenden Satzes verdient besonders hervorgehoben zu werden:

„Bezeichnet c ein primitives Quaternion und ist

$$N(c) = p^k q^k \ldots,$$

unter $p, q, \ldots$ verschiedene Primzahlen verstanden, so läßt sich c, und zwar nur auf eine Weise, in die Form setzen

$$c = \pi_1\pi_2\ldots\pi_k\,\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_k\ldots, \tag{4}$$

wo $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_k$ primäre Primquaternionen von der Norm p, ferner $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_k$ solche von der Norm q u. s. w. bezeichnen."

Es ist klar, daß in der Darstellung (4) des primitiven Quaternions c niemals zwei conjugirte Primquaternionen nebeneinanderstehen können. Umgekehrt gilt nun der Satz:

„Ein Produkt von primären Primquaternionen

$$\pi_1\pi_2\ldots\pi_k\,\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_k\ldots,$$

in welchem $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_k$ die Norm p, ferner $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_k$ die Norm q u. s. w. haben, unter $p, q, \ldots$ von einander verschiedene Primzahlen verstanden, stellt immer ein primitives Quaternion dar, wenn nirgends zwei conjugirte Primquaternionen nebeneinander stehen."

Ich nehme an, dieser Satz sei für Produkte aus n Factoren schon bewiesen und zeige, daß aus dieser Annahme seine Gültigkeit für Produkte aus $n+1$ Factoren folgt. Da der Satz für $n = 1$ offenbar richtig ist, so ist er dann als allgemein gültig

nachgewiesen. Sei also

$$\pi_1 \pi_2 \ldots . \pi_h \varkappa_1 \varkappa_2 \cdots = \pi_1 c$$

ein Produkt aus $n+1$ primären Primquaternionen. Wäre dasselbe nicht primitiv, so hätte man $\pi_1 c \equiv 0$ und also auch

$$\pi_1' \pi_1 c = N(\pi_1) c \equiv 0 \pmod{P},$$

wo P eine Primzahl bezeichnet. Hieraus folgt $N(\pi_1) = p = P$, weil sonst $c \equiv 0 \pmod{P}$ sein müßte. Somit wäre

$$\pi_1 \pi_2 \ldots . \pi_h \varkappa_1 \varkappa_2 \cdots = p.C = \pi_1 \pi_1' C$$

und also

$$c = \pi_2 \ldots . \pi_h \varkappa_1 \varkappa_2 \cdots = \pi_1' C.$$

Da aber die Zerlegung von c eindeutig ist, müßte $\pi_2 = \pm \pi_1'$ sein, was der Voraussetzung, daß keine zwei conjugirten Factoren nebeneinander stehen, widerspricht.

Nach diesem und dem vorhergehenden Satze erhält man alle primitiven Quaternionen c von der Norm $p^h q^k \ldots$ aus der Gleichung (4), indem man für π_1 der Reihe nach jedes der $p+1$ primären Primquaternionen nimmt, die in p aufgehen, jedes einzelne π_1 mit jedem der p von $\pm \pi_1'$ verschiedenen Primquaternionen combinirt u. s. w. Hieraus folgt nun:

„Ist $m = p^h q^k \ldots$ eine beliebige ungerade Zahl, so giebt es

$$\psi(m) = m\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\cdots = p^{h-1}(p+1)\, q^{k-1}(q+1)\ldots$$

primitive Quaternionen, deren Norm gleich m ist."

Die Anzahl aller primären Quaternionen, deren Norm gleich m ist, beträgt offenbar $\sum \psi\left(\frac{m}{\delta^2}\right)$, wo die Summe sich auf alle Quadrate δ^2 bezieht, die in m aufgehen. Die Berechnung dieser Summe führt zu dem Ergebniß:

Ist m eine beliebige ungerade Zahl, so giebt es

$$f(m) = \sum d$$

primäre Quaternionen, deren Norm gleich m ist. Dabei erstreckt sich die Summe auf alle Divisoren d von m.

Aus diesem Satze ergiebt sich durch einfache Schlüsse das bekannte Jacobi'sche Theorem:

Die Anzahl der Darstellungen einer ganzen positiven Zahl als Summe von vier Quadraten beträgt, je nachdem die darzu-

stellende Zahl ungerade oder gerade ist, das 8-fache oder 24-fache der Summe der ungeraden Divisoren der Zahl.

§ 10. Ein Problem von Euler.

Legendre erwähnt im zweiten Bande seiner Théorie des nombres (unter No. 470) ein von Euler herrührendes Problem und bemerkt dabei, daß es schwierig sein dürfte, die von Euler zur Lösung des Problems befolgte und nicht veröffentlichte Methode wiederherzustellen. Die allgemeine Lösung ergiebt sich aber, wie ich zum Schluß zeigen möchte, leicht und in einer sehr einfachen Form auf Grund der vorstehenden Untersuchungen. Das Euler'sche Problem kann folgendermaßen ausgesprochen werden:

Man soll alle ganzzahligen linearen Substitutionen:

$$y_\alpha = a_{0\alpha}x_0 + a_{1\alpha}x_1 + a_{2\alpha}x_2 + a_{3\alpha}x_3 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$

bestimmen, welche der Bedingung

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = M(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{2}$$

genügen, also die Form $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ in ein Multiplum von sich selbst überführen.

Ich bemerke sogleich, daß man sich auf die Herstellung aller Substitutionen (1) mit positiver Determinante beschränken darf, da eine Vertauschung irgend zweier der Variabeln y_α eine Veränderung des Vorzeichens der Determinante bewirkt. Zunächst sehe ich nun von der Forderung, daß die Coefficienten $a_{\beta\alpha}$ ganze Zahlen sein sollen, ab und betrachte also die Substitutionen (1) mit beliebigen reellen Coefficienten, welche der Bedingung (2) genügen. Derartige Substitutionen lassen sich auf folgende Weise bilden:

Es seien a und b irgend zwei von Null verschiedene Quaternionen und es werde

$$x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3,$$
$$y = y_0 + y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_3$$

gesetzt. Dann stellt die Gleichung

$$y = axb \tag{3}$$

eine Substitution (1) mit reellen Coefficienten dar, welche der Bedingung (2) genügt und eine positive Determinante hat.

In der That ergiebt der Uebergang zu den Normen die Gleichung $N(y) = N(ab).N(x)$ und eine leichte Rechnung zeigt, daß die Determinante der linearen Functionen von x_0, x_1, x_2, x_3, welche die Componenten von axb bilden, den positiven Werth $[N(ab)]^2$ besitzt. Nun läßt sich weiter zeigen, daß die Gleichung (3) die allgemeinste Substitution (1) von positiver Determinante vorstellt, welche die Bedingung (2) befriedigt. Um dieses nachzuweisen, nehme ich an, es liege irgend eine bestimmte Substitution (1) vor, und frage nun, welche Bedingungen die Quaternionen

$$a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3,$$
$$b = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3$$

befriedigen müssen, wenn die Gleichung (3) auf die vorliegende Substitution (1) führen soll. Da die Gleichungen (1) sich in die eine Gleichung

$$y = A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 \tag{4}$$

zusammenfassen, wo zur Abkürzung

$$A_\alpha = a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} i_1 + a_{\alpha 2} i_2 + a_{\alpha 3} i_3 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{5}$$

gesetzt worden ist, so erkennt man, daß die fraglichen Bedingungen lauten:

$$ab = A_0, \quad a i_1 b = A_1, \quad a i_2 b = A_2, \quad a i_3 b = A_3. \tag{6}$$

Seien jetzt u_0, u_1, u_2, u_3 Unbestimmte und

$$u' = u_0 - u_1 i_1 - u_2 i_2 - u_3 i_3; \tag{7}$$

dann ist der reelle Theil von $u'a$ offenbar $a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$, und da der reelle Theil eines beliebigen Quaternions q durch den Ausdruck $\frac{1}{4}(q - i_1 q i_1 - i_2 q i_2 - i_3 q i_3)$ dargestellt wird, so ergiebt sich aus den Gleichungen (6):

$$4(a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) b = u' A_0 - i_1 u' A_1 - i_2 u' A_2 - i_3 u' A_3 \equiv \mathfrak{A}, \tag{8}$$

wo $\mathfrak{A}$ zur Abkürzung für die rechte Seite der Gleichung (8) dient. Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$v' = v_0 - v_1 i_1 - v_2 i_2 - v_3 i_3, \tag{9}$$

unter v_0, v_1, v_2, v_3 neue Unbestimmte verstanden, so ergiebt sich endlich:

$$4(a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3)(b_0 v_0 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) = \mathfrak{R}\{\mathfrak{A} v'\}, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{R}\{\mathfrak{A} v'\}$ den reellen Theil von $\mathfrak{A} v'$ bedeutet. Dieser ist eine bilineare Function der Unbestimmten $u_0, \ldots u_3$, $v_0, \ldots v_3$, deren

Coefficienten ganzzahlige lineare Functionen der Substitutionscoefficienten $a_{\beta\alpha}$ sind. Die Gleichung (10) ist eine Folge der Gleichungen (6) und daher jedenfalls eine nothwendige Bedingung dafür, daß die Gleichung (3) die vorgeschriebene Substitution (1) darstellt. Eine eingehendere Betrachtung, die ich Kürze halber übergehe, zeigt aber, daß die aus irgend einer Substitution (1) abgeleitete Form $\mathfrak{N}\{\mathfrak{U}v'\}$ vermöge der Bedingung (2) eine Produktzerlegung der Gestalt (10) zuläßt und daß sodann die Gleichung (10) die Gleichungen (6) zur Folge hat. Auf diese Weise erkennt man nicht nur, daß die Gleichung (3) die allgemeinste Substitution (1) darstellt, sondern daß auch die Componenten der Quaternionen a und b sich wie ganzzahlige lineare Functionen der Substitutionscoefficienten $a_{\beta\alpha}$ verhalten.

Beiläufig bemerkt ist eine unmittelbare Folge aus diesem Ergebniß der Satz:

„Jede orthogonale Substitution bei vier Variabeln mit der Determinante $+1$ läßt sich durch die Gleichung

$$y = axb$$

darstellen, wo a und b Quaternionen von der Norm 1 bezeichnen. Diese Darstellung ist nur auf eine Weise möglich, wenn man von einer simultanen Vorzeichenänderung von a und b absieht."

Da die vorstehende Gleichung dann und nur dann $y_0 = x_0$ ergiebt, wenn $ab = 1$, also $b = a^{-1}$ ist, so folgt, daß die allgemeinste orthogonale Substitution bei drei Variabeln mit der Determinante $+1$ durch die Gleichung

$$(y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_3) = a(x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) a^{-1}$$

dargestellt wird, unter a ein Quaternion von der Norm 1 verstanden.

Was nun die Euler'sche Aufgabe betrifft, so geht aus dem Vorstehenden hervor, daß die zu bestimmenden Substitutionen jedenfalls in der Form

$$y = r\alpha x\beta \tag{11}$$

darstellbar sind, wo α, β ganze Quaternionen und r eine reelle rationale Zahl bezeichnen. Der Zähler von r darf gleich 1 vorausgesetzt werden, weil man ihn andernfalls mit einem der Quaternionen α, β vereinigen könnte. Aus entsprechendem Grunde darf man annehmen, daß der Nenner von r keinen Primfactor p besitzt, der in α oder β aufgeht. Ich behaupte, daß dann r entweder

gleich 1 oder gleich $\frac{1}{2}$ ist. Denn wäre p zunächst ein ungerader Primfactor des Nenners von r, so würde

$$(12)\quad \alpha\beta \equiv 0,\quad \alpha i_1\beta \equiv 0,\quad \alpha i_2\beta \equiv 0,\quad \alpha i_3\beta \equiv 0 \pmod{p}$$

und daher auch

$$(13)\quad 4(\alpha_0u_0+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3)(\beta_0v_0+\beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3v_3) \equiv 0 \pmod{p}$$

sein müssen, wobei $u_0, \ldots v_3$ Unbestimmte und $\alpha_0, \ldots \beta_3$ die Componenten von α bez. β bezeichnen. Die Congruenz (13) zieht nun nach sich, daß entweder die Componenten von α oder die Componenten von β sämmtlich durch p theilbar sind, was der Voraussetzung widerspricht. Nach dem Modul $p = 2$ bestehen aber die Congruenzen (12), falls weder α noch β durch 2 theilbar ist, stets und nur dann, wenn sowohl α wie β den Factor $1+i_1$ besitzt. Die Gleichung (11) hat daher eine der beiden Gestalten

$$(14)\qquad y = \alpha x\beta,\quad y = \tfrac{1}{2}\alpha(1+i_1)x(1+i_1)\beta,$$

unter α, β ganze Quaternionen verstanden. Die letzte Gleichung läßt sich, da

$$\tfrac{1}{2}(1+i_1)x(1+i_1) = -x_1+x_0i_1+x_2i_2+x_3i_3$$

ist, auch in die Form setzen

$$(15)\qquad y = \alpha.\bar{x}.\beta,$$

wobei $\bar{x}$ durch die Gleichung

$$(16)\qquad \bar{x} = -x_1+x_0i_1+x_2i_2+x_3i_3$$

definirt ist. Versteht man unter α, β irgend zwei ganze Quaternionen, so stellt die erste Gleichung (14), sowie die Gleichung (15) eine ganzzahlige Substitution vor, sobald die Produkte $\alpha\beta$, $\alpha i_1\beta$, $\alpha i_2\beta$, $\alpha i_3\beta$ ganze Componenten haben, also zu 0 oder 1 (mod. $1+i_1$) congruent sind. Hierzu ist erforderlich und hinreichend, daß $\alpha\beta$ zu 0 oder 1 (mod. $1+i_1$) congruent ist. Somit wird die Lösung der Euler'schen Aufgabe durch folgenden Satz gegeben:

Die ganzzahligen Substitutionen von positiver Determinante, welche die Form $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ in ein Multiplum von sich selbst überführen, werden durch die Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{cases} y = \alpha x\beta, \\ y = \alpha\bar{x}\beta \end{cases}$$

dargestellt, wo α und β irgend zwei ganze Quaternionen bezeichnen, welche der Bedingung

$$\alpha\beta \equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod{(1+i_1)} \tag{18}$$

unterworfen sind.

Die Bedingung (18) ist stets erfüllt, wenn α und β ganzzahlige Componenten haben. Da ferner ein ganzes Quaternion stets und nur dann durch $1+i_1$ theilbar ist, wenn seine Norm gerade ist, so läßt sich die Bedingung (18) auch dahin aussprechen, daß entweder $N(\alpha\beta)$ oder $N(\alpha\beta-1)$ gerade sein muß.

Um ein Beispiel zu geben, betrachte ich die Gleichung

$$y = (5+5i_1+9i_2)\,x\,(6-4i_1-2i_2+3i_3).$$

Die Ausrechnung der rechten Seite ergiebt, daß diese Gleichung die Substitution mit dem folgenden Coefficientensystem darstellt:

$$\begin{array}{rrrr} 68, & 17, & -59, & 11 \\ 37, & 32, & 61, & 49 \\ 29, & 31, & 28, & -77 \\ 41, & -79, & 23, & -8. \end{array}$$

Es ist dieses im Wesentlichen dasselbe von Euler aufgestellte System, welches Legendre in seiner Théorie des nombres am angegebenen Orte mittheilt.

Zürich, December 1896.

Einige kinetische Betrachtungen, die mit der Theorie der Verdampfung und verwandter Vorgänge im Zusammenhang zu stehen scheinen.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. November 1896.

Die Schwierigkeiten, welche einer kinetischen Theorie der Materie aus der Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen den Molekülen erwachsen, verschwinden bekanntlich in den zwei Fällen, daß der mittlere Abstand der Moleküle entweder sehr groß, oder aber sehr klein gegen den Radius ihrer Wirkungssphäre ist. In dem ersten Falle können bei der Ableitung der Bewegung eines Moleküles die Wechselwirkungen vernachlässigt werden, weil sie im Mittel verschwindende Intensität haben, in dem letzteren, weil sie sich im Mittel zu Null compensiren. Ausnahmen bilden die sogenannten Stöße, bei denen zwei Moleküle sich einander bis zu einer Entfernung nähern, die von der Größenordnung ihrer Dimensionen ist; aber wenn man sich die Moleküle etwa als kleine feste Körper vorstellt, so haben diese Stöße nur die Wirkung, Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung zwischen den Molekülen auszutauschen, ohne den mittleren Zustand merklich zu ändern.

Wenn man den ersteren Fall als bei den sogenannten idealen Gasen erfüllt annimmt, so kann man sich dabei auf zahlreiche Uebereinstimmungen zwischen den Resultaten der Erfahrung und der Theorie stützen. Dagegen spricht noch nichts dafür, daß man den letzteren Fall mit dem Verhalten einer tropfbaren Flüssigkeit in Vergleich stellen dürfe, ja man weiß nicht einmal Sicheres über die Stabilität eines solchen Systemes. Trotzdem hat es ein gewisses Interesse, diese specielle Vorstellung von dem inneren Verhalten einer Flüssigkeit theoretisch zu verfolgen; denn die analytische Behandlung allgemeinerer Annahmen über ihre Con-

stitution scheint in wirklich befriedigender Weise zunächst noch nicht möglich, und die Theorie jener idealen Flüssigkeiten kann immerhin Resultate liefern, die qualitativ und, in glücklichen Fällen, auch angenähert quantitativ mit den Erfahrungen an wirklichen Flüssigkeiten übereinstimmen.

Die folgenden Untersuchungen haben manche Berührungspunkte mit zwei Arbeiten von Herrn G. Jäger[1]), die ich durch einen Zufall erst nach Fertigstellung des Manuscriptes kennen lernte; sie weichen aber in den Resultaten durchaus von ihnen ab. Einerseits wird im Nachstehenden die kinetische Hypothese weitergehend verwerthet, als in Herrn Jäger's Abhandlungen, andrerseits liegen dort Abweichungen vor, die ich als Fehler ansehen muß. Wenn in der ersten citirten Arbeit die Dampfspannung bei verschiedener Temperatur einfach der Anzahl der während der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit in den Dampfraum austretenden Moleküle proportional gesetzt wird, so kann ich dem nicht beistimmen und halte, abgesehen von anderen Einwänden, schon deshalb die so gewonnene, der Beobachtung merkwürdig entsprechende Gleichung für die Dampfspannung nicht für kinetisch begründet. Nicht minder anfechtbar scheint mir in der zweiten Arbeit das Verfahren, die aus der Flüssigkeit in den Dampfraum austretende Masse gleich $\varrho u'$ zu setzen, wobei ϱ die Dichte der zum Austreten fähigen Theile in der Flüssigkeit, u' ihre zur Grenze normale Geschwindigkeit im Dampfraum bezeichnet.

Mit diesen Grundlagen dürften aber alle Resultate der beiden Arbeiten hinfällig werden. —

I. Wir unterwerfen der Betrachtung einen cylindrischen Raum, der durch eine den Grundflächen parallele Ebene ($z = 0$) in zwei Theile geschieden ist; der eine von ihnen, ($z < 0$) oder (i), mag mit Flüssigkeit in dem vorgenannten idealen Zustande, der andere, ($z > 0$) oder (a), mit ihrem Dampf in dem gleichfalls idealen Zustande angefüllt sein. Die Moleküle erfahren merkliche molekulare Fernwirkungen nur dann, wenn sie sich der Grenzfläche $z = 0$ bis auf einen gegen die Dimensionen des Gefäßes unmerklichen Abstand nähern; findet dies statt, so erleiden sie eine zur Grenze normale Kraft. Es gilt somit das System Gleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

wobei Z unmerklich ist, sowie z einen merklichen Werth hat.

1) G. Jäger, Wien. Ber. Bd. 99 S. 679 u. 860, 1890.

Integriren wir die letzte dieser Formeln nach Multiplication mit $(dz/dt)\,dt = dz$ von einem innerhalb der Flüssigkeit gelegenen Punkte (i) bis zu einem äußeren (a), die sich beide in merklicher Entfernung von der Grenzfläche $z = 0$ befinden, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2} m(w_a^2 - w_i^2) = \int_{(i)}^{(a)} Z\,dz = -mS, \qquad 1)$$

wobei die rechts stehende Function S, die Arbeit, die an der austretenden Masseneinheit gewonnen wird, bei einer gegebenen Temperatur der Flüssigkeit individuell ist. Da nun nur solche Massenpunkte die Flüssigkeit verlassen, für welche $w_a > 0$ ist, so zeigt die letzte Formel, daß nur diejenigen aus der Flüssigkeit auszutreten vermögen, die innerhalb derselben eine Geschwindigkeit nach der Z-Axe besitzen, größer als ein gewisser der Flüssigkeit bei gegebener Temperatur individueller Grenzwerth c, welcher bestimmt ist durch

$$c^2 = 2S. \qquad 2)$$

Die oben eingeführte Function S steht in einem gewissen Zusammenhang mit dem ganzen capillaren Druck K, unter dem sich die Flüssigkeit im Contact mit ihrem Dampfe und bei der gegebenen Temperatur befindet[1]). Für K gilt nämlich, falls ϱ die Dichte der Substanz (Flüssigkeit, resp. Dampf) in dem Abstand z von der Grenze bezeichnet,

$$-\frac{1}{m}\int_{(i)}^{(a)} \varrho\, Z dz = K; \qquad 3)$$

hierbei ist ϱ als sehr schnell, aber stetig von der normalen Dichte ϱ_i der Flüssigkeit zu der normalen Dichte ϱ_a des Dampfes übergehend zu betrachten. Das Gesetz, nach welchem dieser Uebergang stattfindet, ist unbekannt; wenn es sich aber nur darum handelt, die Größenordnung von K auszuwerthen, so wird man den schnellen stetigen Uebergang durch einen sprungweisen ersetzen dürfen und bei Einführung des Zeichens (=) für gleiche Größenordnung schreiben

$$K\ (=)\ -\frac{1}{m}\left(\varrho_i \int_{(i)}^{0} Z dz + \varrho_a \int_0^{(a)} Z dz\right). \qquad 4)$$

---

1) Aehnlich bei J. Stefan, Wied. Ann. 29, 655, 1886.

In dem vorausgesetzten Falle ist aber, wie schon Laplace[1]) bemerkt hat, die Komponente Z für positive und für negative gleiche ε von gleicher Größe. In der That, ist $\varepsilon = +\zeta$, wo $\zeta > 0$ ist, so übt eine Schicht des Dampfes von der Dicke 2ζ, ist $\varepsilon = -\zeta$, so übt eine Schicht der Flüssigkeit von gleicher Dicke nach Symmetrie eine Wirkung auf den Massenpunkt nicht aus, und in beiden Fällen wirkt nur die Flüssigkeit, die sich jenseits einer Ebene im Abstand $-\zeta$, und der Dampf, der sich jenseits einer Ebene im Abstand $+\zeta$ von der betrachteten Stelle befindet.

Zieht man dies in Betracht, so ergiebt sich aus (4)

$$K\ (=)\ \tfrac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) S, \qquad 5)$$

und aus (2)

$$c^2\ (=) \frac{4K}{\varrho_1 + \varrho_2}. \qquad 6)$$

II. Nun möge die Anzahl aller Moleküle in der Volumeneinheit, die eine Geschwindigkeit in der Richtung der $+Z$-Axe zwischen w und $w + dw$ besitzen, durch $\alpha_1(w)\,dw$ bezeichnet werden; dann ist die Gesammtzahl der nach $+Z$ wandernden Moleküle

$$A_1 = \int_0^\infty \alpha_1(w)\,dw \qquad 7)$$

zugleich die Hälfte der überhaupt in der Volumeneinheit vorhandenen, während die Zahl der zum Austreten aus der Flüssigkeit befähigten

$$a_1 = \int_c^\infty \alpha_1(w)\,dw \qquad 8)$$

beträgt.

Nehmen wir die Geschwindigkeiten parallel X, Y und Z als von einander unabhängig, so sind die Mittelwerthe ihrer Quadrate U_1^2, V_1^2, W_1^2 einander gleich, und zwar gilt

$$A_1 W_1^2 = \int_0^\infty w^2 \alpha_1(w)\,dw. \qquad 9)$$

Die lebendige Kraft aller nach $+Z$ gehenden Theile der Volumeneinheit ist dann

---

1) Laplace, Mécanique céleste Tome IV, p. 404 1806.

$$mA_i \Psi_i = \tfrac{1}{2} mA_i (U_i^2 + V_i^2 + W_i^2) = \tfrac{3}{2} mA_i W_i^2, \qquad 10)$$

die allein der zum Austreten aus der Flüssigkeit befähigten Theile

$$ma_i \psi_i^0 = ma_i W_i^2 + \tfrac{1}{2} m \int_c^\infty w^3 \alpha_i(w)\, dw; \qquad 11)$$

hier bezieht sich Ψ_i und ψ_i^0 je auf die Masseneinheit.

Nach unserer Grundvorstellung sind die zum Austreten aus der Flüssigkeit überhaupt befähigten Moleküle durch nichts gehindert, die Flüssigkeit auch factisch zu verlassen; verlieren sie durch einen Zusammenstoß mit anderen Molekülen diese Fähigkeit, so treten nur jene an ihre Stelle. Gleichgewicht zwischen der Flüssigkeit und ihrem Dampfe findet statt, wenn sowohl die austretende Masse, als ihre lebendige Kraft durch die eintretenden Theilchen compensirt wird.

Da die Geschwindigkeit w bis $w + dw$ der Anzahl $\alpha_i(w)\, dw$ Theilchen jeder Volumeneinheit eignet, so ist die Anzahl der von dieser Gattung pro Zeit und Flächeneinheit austretenden gleich $w\, \alpha_i(w)\, dw$. Hieraus folgt als Bedingung der Gleichheit der in positiver und der in negativer Richtung durch die Grenzfläche tretenden Massen die Formel

$$\int_c^\infty w\, \alpha_i(w)\, dw = \int_0^\infty w\, \alpha_a(w)\, dw; \qquad 12)$$

in ihr entspricht $\alpha_a(w)$ der Function $\alpha_i(w)$ für den äußeren Raum, ebenso, wie später, A_a der Zahl A_i. Aus demselben Grunde folgt als Bedingung für die Gleichheit der im Dampfraum in positiver und in negativer Richtung durch die Grenzfläche gehenden lebendigen Kräfte die Formel

$$\tfrac{1}{2} \int_c^\infty w\, \alpha_i(w)\, (w^2 - c^2 + 2 W_i^2)\, dw = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty w\, \alpha_a(w)\, (w^2 + 2 W_a^2)\, dw; \qquad 13)$$

in ihr ist bereits berücksichtigt, daß nach (1) und (2) in der Grenzfläche selbst die lebendige Kraft jedes Theilchens um $\pm \tfrac{1}{2} mc^2$ springt; W_i^2 und W_a^2 sind die Mittelwerthe der Quadrate der Geschwindigkeitscomponenten in der Flüssigkeit und im Dampf.

Gleichung (13) gestattet eine ganz allgemeine Folgerung, falls man über die noch unbestimmten Functionen $\alpha(w)$ nur als von vornherein plausibel annimmt, daß sie je mit der Anzahl der überhaupt vorhandenen Moleküle A proportional und im Uebrigen Func-

tionen der Temperatur allein sind. Da nämlich auch c nur mit der Temperatur variirt, und da die A den Dichten ϱ proportional sind, so ergiebt (13), daß das Verhältniß der Dichten ϱ_i/ϱ_a für das im Gleichgewicht stehende Paar, Flüssigkeit und Dampf, eine Function der Temperatur allein ist, was bekanntlich eine der Grundthatsachen der Verdampfung darstellt. —

III. Zu einem Ausdruck für die specifische Verdampfungswärme einer idealen Flüssigkeit kann man auf zwei verschiedenen Wegen gelangen.

Fährt von den zum Austreten befähigten Theilchen die Masse dM durch die Grenze ($z = 0$) in den Dampfraum, d. h., geht sie in Dampf über, so verliert dabei die Flüssigkeit einen Betrag an Energie, gleich dem Werthe der lebendigen Kraft, den die Masse im Innern der Flüssigkeit besaß und der beiläufig gleich ist dem Werthe der lebendigen Kraft derselben Masse im Dampfraum plus der potentiellen Energie, die sie beim Durchgang durch die Sphäre der Molekularwirkungen gewonnen hat. In Folge dieses Verlustes sinkt die Temperatur der Flüssigkeit. Bezeichnet also Ψ_i die mittlere lebendige Kraft der Masseneinheit vor, Ψ_i' nach dem Austritt der Masse dM, und ψ_i diejenige von dM, so gilt

$$\Psi_i M - \psi_i dM = \Psi_i'(M - dM),$$

und um die vorige mittlere lebendige Kraft Ψ_i, resp. die vorige Temperatur wiederherzustellen ist — falls die thermische Dilatation der Flüssigkeit ignorirt werden darf, was wir annehmen — nichts, als eine Wärmemenge dq nöthig, bestimmt durch

$$\mathfrak{A} dq = (\Psi_i - \Psi_i')(M - dM) = (\psi_i - \Psi_i) dM = \mathfrak{A} D_0 dM,$$

wobei $\mathfrak{A}$ das mechanische Wärmeäquivalent bezeichnet. D_0 hat hierin die Bedeutung der specifischen Verdampfungswärme der Flüssigkeit im engern Sinne des Wortes, d. h., sie umfaßt kein calorisches Aequivalent für bei der Verdampfung geleistete äußere Arbeit; sie würde demnach direct zur Wirkung nur da gelangen, wo diese Arbeit überhaupt fehlt, also bei der Verdampfung in den leeren Raum, — vorausgesetzt, daß der hier stattfindende Mangel eines äußern Druckes ohne Belang ist, wie das factisch in allen Fällen stattfindet, wo der capillare Druck K den Gleichgewichtsdruck des Dampfes weit übertrifft.

Das in den vorstehenden Formeln auftretende ψ_i ist keineswegs mit dem durch Gleichung (11) bestimmten ψ_i^0 identisch; es wird vielmehr durch den Quotienten der linken Seiten von Formel

(13) — nach Weglassung von c^2 — und (12) gegeben. Benutzt man diesen Werth, so ergiebt sich in

$$\mathfrak{A}D_0 = \frac{\int_c^\infty w^3 \alpha_i(w)\,dw}{2\int_c^\infty w\,\alpha_i(w)\,dw} - \tfrac{1}{2} W_i^2 \qquad 14)$$

ein erster Ausdruck für die specifische Verdampfungswärme.

Einen zweiten Ausdruck gewinnen wir am besten durch die Betrachtung des Vorganges der Condensation.

Wir denken uns durch Verkleinerung des Volumens eine Masse dM des Dampfes genöthigt, in den flüssigen Zustand überzugehen, d. h. lassen die Masse dM von Theilchen mehr aus dem Dampfraum in den Flüssigkeitsraum treten, als umgekehrt. Ist Ψ_a die lebendige Kraft der Masseneinheit des mit der Flüssigkeit im Gleichgewicht stehenden Dampfes, so kommt mit dem Eintritt der Masse dM eine lebendige Kraft $(\Psi_a + \frac{1}{2}c^2)\,dM$ der Flüssigkeit zu Gute, und deren mittlere lebendige Kraft Ψ_i steigt auf Ψ_i'', gegeben durch

$$\Psi_i''(M + dM) = \Psi_i M + (\Psi_a + \tfrac{1}{2}c^2)\,dM.$$

Um den ursprünglichen Zustand herzustellen, ist somit eine Wärmemenge dq zu entziehen, gegeben durch

$$\mathfrak{A}dq = (\Psi_i'' - \Psi_i)(M + dM) = (\Psi_a - \Psi_i + \tfrac{1}{2}c^2)\,dM = \mathfrak{A}D\,dM,$$

wobei D ähnlich definirt ist, wie oben D_0.

Bilden wir den mit (10) analogen Ausdruck für Ψ_a, so ergiebt sich in

$$\mathfrak{A}D = \tfrac{1}{2}\left(3(W_a^2 - W_i^2) + c^2\right) \qquad 15)$$

ein Werth für die bei der Condensation der Masseneinheit frei werdende Wärme. Dieselbe Formel läßt sich auch durch Betrachtung des umgekehrten Vorganges, d. h. der Entwickelung gesättigten Dampfes gewinnen, und D stellt somit einen zweiten Werth der specifischen Verdampfungswärme im engern Sinne des Wortes dar.

Die beiden Werthe (14) und (15) sind einander nicht gleich, ja sie erscheinen zunächst als einander nicht einmal ähnlich.

Der Grund der stattfindenden Differenz ist leicht erkennbar. Bei der Verdampfung in den leeren Raum gehen der Flüssigkeit in höherem Maaße die schnelleren Moleküle verloren, als bei der

Entwickelung gesättigten Dampfes, und demgemäß sind die mit der Masseneinheit ihr entführten mittleren lebendigen Kräfte in beiden Fällen verschieden.

In der That ist die lebendige Kraft ψ_a der Masseneinheit der ausgetretenen Theilchen gegeben durch

$$\psi_a = \psi_i - \tfrac{1}{2}c^2 = \frac{\int_c^\infty w\,\alpha_i(w)\,(w^2 - c^2 + 2W_i^2)\,dw}{2\int_c^\infty w\,\alpha_i(w)\,dw},$$

und dies ist im Allgemeinen verschieden von der mittleren lebendigen Kraft Ψ_a des mit der Flüssigkeit im Gleichgewicht stehenden Dampfes, die definirt ist durch

$$\Psi_a = \frac{3\int_0^\infty w^2\,\alpha_a(w)\,dw}{2\int_0^\infty \alpha_a(w)\,dw} = \tfrac{3}{2}\,W_a^2.$$

Daß die Verschiedenheit der beiden Werthe D_0 und D factisch auf der Verschiedenheit von ψ_a und Ψ_a beruht, erkennt man leicht, indem man bildet

$$\mathfrak{A}\,(D_0 - D) = \psi_i - \tfrac{1}{2}c^2 - \Psi_a = \psi_a - \Psi_a. -$$

Es bietet nun ein gewisses Interesse, den Zustand des in den leeren Raum entwickelten Dampfes genauer zu untersuchen.

Da alle aus der Flüssigkeit ausfahrenden Moleküle nothwendig eine positive Geschwindigkeitscomponente w besitzen müssen, so ist der Dampf in mechanischer Bewegung, und seine parallel $+Z$ liegende Schwerpunktsgeschwindigkeit Ω besitzt den Werth

$$\Omega = \frac{\int_0^\infty w^2\,\alpha_a(w)\,dw}{\int_0^\infty w\,\alpha_a(w)\,dw} = \frac{W_a^2}{W_a'};$$

in dieser Formel bezeichnet W_a' das arithmetische Mittel der Geschwindigkeitscomponenten w aller nach $+Z$ fortschreitenden Moleküle im gesättigten Dampf, W_a^2 ist, wie früher, das Mittel ihrer Quadrate.

Berücksichtigt man, daß die gesammte lebendige Kraft eines Punktsystemes gleich der Summe der lebendigen Kräfte seiner innern

und seiner Schwerpunktsbewegung ist, so stellt $\psi - \frac{1}{2}\mathfrak{Q}^2$ die lebendige Kraft der Wärmebewegung für die Masseneinheit des betrachteten Dampfes dar, und die Differenz $\psi_a - \frac{1}{2}\mathfrak{Q}^2 - \Psi_a$ wird proportional mit der Differenz seiner Temperatur und der des gesättigten Dampfes, und somit der Flüssigkeit zu setzen sein. —

Welche von den beiden Größen D_0 und D mit der Verdampfungswärme der allgemeinen Thermodynamik in Verbindung steht, kann nicht zweifelhaft sein, wenn man sich daran erinnert, daß es sich in jener Theorie stets um die Uebergänge zwischen coexistirenden Phasen handelt. Indessen pflegt man dort eine Größe zu benutzen, die sich von dem hier eingeführten D durch das calorische Aequivalent der Arbeit unterscheidet, welche dem System bei Verdampfung oder Condensation der Masseneinheit unter constantem Drucke zugeführt werden muß. Sonach ist nicht D, sondern, falls, wie zumeist zulässig ist, ϱ_a neben ϱ_i vernachlässigt wird, $D + p_a/\varrho_a \mathfrak{A} = Q$ mit der gewöhnlich benutzten Verdampfungswärme zu identificiren, und man erkennt leicht, daß auch die gebräuchlichen Beobachtungsmethoden auf diese Größe führen. Denn wenn dabei auch der entwickelte Dampf von der Flüssigkeit hinweggeführt wird, so bleibt er doch jedenfalls lange genug mit ihr in Berührung, um nahezu jenen Gleichgewichtszustand zu erreichen, der bei der Ableitung des Werthes von D vorausgesetzt ist.

Der constatirte Unterschied zwischen den beiden Verdampfungswärmen D_0 und D hat überhaupt wohl nur theoretische Bedeutung. —

IV. Um weiter zu gehen, müssen wir das Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung, d. h. die Functionen α_i und α_a wirklich einführen. Unsere Voraussetzungen sind derart, daß sowohl für den Dampf, als für die Flüssigkeit das Maxwell'sche Gesetz eingeführt werden darf, und wir wählen demgemäß

$$\alpha_i(w) = \frac{2A_i}{G_i\sqrt{\pi}} e^{-(w/G_i)^2}, \quad \alpha_a(w) = \frac{2A_a}{G_a\sqrt{\pi}} e^{-(w/G_a)^2}, \qquad 16)$$

wobei G_i und G_a die wahrscheinlichsten Werthe der Molekular-Geschwindigkeiten in der Flüssigkeit und im Dampf bezeichnen.

Indessen bleibt noch eine Schwierigkeit zu heben. Eine strenge Erfüllung des Maxwell'schen Gesetzes ist nämlich in unserem Falle nur dann möglich, wenn dies Gesetz auch für die die Grenzfläche $\varepsilon = 0$ durchsetzenden Theilchen trotz ihrer Geschwindigkeitsänderung bestehen bleibt, falls es zuvor gültig war. Dies scheint aber auf den ersten Blick keineswegs der Fall zu sein.

In der That, hat für die Flüssigkeits-Moleküle, deren Geschwindigkeit nach der $+Z$-Axe zwischen c und ∞ liegt, $\alpha_i(w)$ den obigen Werth, und wird beim Austritt w^2 um c^2 ermäßigt, so gilt, wenn $w_a^2 = w^2 - c^2$ ist, für die Anzahl der Theilchen mit Geschwindigkeiten zwischen w und $w + dw$

$$\alpha_i(w)\,dw = \alpha_i(\sqrt{w_a^2 + c^2})\frac{w_a\,dw_a}{\sqrt{w_a^2 + c^2}} = \frac{2A_i w_a\,dw_a}{G_i\sqrt{\pi(w_a^2 + c^2)}}\,e^{-(w_a^2 + c^2)/G_i^2},$$

und dieser Ausdruck ist keineswegs gleich $\alpha_a(w_a)\,dw_a$; ein entsprechendes Resultat ergiebt die Umformung von $\alpha_a(w)\,dw$ bei Vertauschung von w^2 mit $w_i^2 - c^2$.

Aber die Frage ist im Vorstehenden garnicht richtig gestellt. Denn hier ist vernachlässigt, daß, — wie schon bei der Ableitung der Formeln (12) und (13) benutzt, — die Theilchen, welche verschiedene Geschwindigkeitscomponenten w besitzen, während gleicher Zeiten in verschiedener Zahl die Grenze durchsetzen. So ist innerhalb der Flüssigkeit die Anzahl der während der Zeiteinheit die Grenze ($z = 0$) erreichenden und somit austretenden Moleküle mit Geschwindigkeiten zwischen w und $w + dw$ nicht gleich $\alpha_i(w)\,dw$, sondern gleich $w\,\alpha_i(w)\,dw$, und ebenso beträgt die Anzahl der im Dampfraum während der Zeiteinheit die Grenze verlassenden Theile mit Geschwindigkeiten zwischen w_a und $w_a + dw_a$ in Wahrheit $w_a\,\alpha_a(w_a)\,dw_a$.

Das Maxwell'sche Gesetz wird daher beim Uebergang der Theile aus dem Flüssigkeits- in den Dampfraum erhalten bleiben, wenn die Gleichung

$$w\,\alpha_i(w)\,dw = w_a\,\alpha_a(w_a)\,dw_a$$

bei Einsetzen der Werthe (16) für $\alpha_i(w)$ und $\alpha_a(w)$ und bei Benutzung der Beziehung $w_a^2 = w^2 - c^2$ sich identisch erfüllt erweist. Daß dem in der That so ist, erkennt man, wenn man mit der letzten Formel auf der vorigen Seite die weiter unten aus dem als gültig angenommenen Maxwell'schen Gesetz gewonnenen Resultate (20) verbindet. Man erhält nämlich so

$$w\,\alpha_i(w)\,dw = \frac{2A_a w_a\,dw_a}{G_a\sqrt{\pi}}\,e^{-(w_a/G_a)^2},$$

und das ist gleich $w_a\,\alpha_a(w_a)\,dw_a$. Die Betrachtung des Eintrittes der Theilchen aus dem Dampf- in den Flüssigkeitsraum giebt dasselbe Resultat.

Die Zulässigkeit der gleichzeitigen Annahme des Maxwell'schen Gesetzes für Dampf und Flüssigkeit ist hierdurch nachgewiesen. —

Führen wir die Werthe (16) ein und setzen $w/G = \omega$, $c/G = \gamma$ so nimmt wegen

$$\int_c^\infty w\,\alpha_i(w)\,dw = \frac{A_i G_i}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma_i}^\infty e^{-\omega_i^2} d\omega_i^2 = \frac{A_i G_i}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma_i^2},$$

und wegen $$\int_0^\infty w\,\alpha_a(w)\,dw = \frac{A_a G_a}{\sqrt{\pi}}$$

die Formel (12) die Gestalt an

$$A_i G_i e^{-\gamma_i^2} = A_a G_a; \tag{17}$$

wegen

$$\int_c^\infty w^2\,\alpha_i(w)\,dw = \frac{A_i G_i^3}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma_i}^\infty \omega_i^2 e^{-\omega_i^2} d\omega_i^2 = \frac{A_i G_i^3}{\sqrt{\pi}} (1+\gamma_i^2) e^{-\gamma_i^2}$$

und wegen $$\int_0^\infty w^2\,\alpha_a(w)\,dw = \frac{A_a G_a^3}{\sqrt{\pi}}$$

lautet (13)

$$(G_i^2 + 2W_i^2) A_i G_i e^{-\gamma_i^2} = (G_a^2 + 2W_a^2) A_a G_a. \tag{18}$$

Nach der Definition (9) ist aber sowohl für den Raum (i), als für (a)

$$AW^2 = \int_0^\infty w^2 \alpha(w)\,dw = \frac{AG^3}{\sqrt{\pi}} \int^\infty \omega\, e^{-\omega^2} d\omega^2$$

$$= \frac{AG^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\omega^2} d\omega = \frac{AG^3}{2}, \tag{19}$$

also $2W^2 = G^2$, und die Kombination der beiden Formeln (17) und (18) liefert

$$G_i = G_a, \quad A_i e^{-\gamma_i^2} = A_a. \tag{20}$$

Bedenkt man, daß $2mA$ die Dichte ϱ darstellt, so giebt dies auch, indem man die neuen Bezeichnungen G und γ einführt,

$$G_i = G_a = G, \quad \varrho_i e^{-\gamma^2} = \varrho_a, \quad c/G = \gamma. \tag{21}$$

Nach der ersten dieser Formeln ist die wahrscheinlichste Molekular-Geschwindigkeit G in einer idealen Flüssigkeit und in dem mit ihr im Gleichgewicht stehenden idealen Dampfe gleich groß;

dasselbe gilt dann von den Mittelwerthen der Geschwindigkeiten und denen ihrer Potenzen, somit auch von der mittleren lebendigen Kraft der im Dampf und in der Flüssigkeit gleich angenommenen Moleküle. Für das Temperaturgleichgewicht zwischen einer idealen Flüssigkeit und ihrem gleichfalls im idealen Zustande befindlichen Dampfe gilt somit dieselbe Bedingung, wie für dasjenige zwischen zwei idealen Gasen.

Die zweite Formel (21) bringt die Grenzgeschwindigkeit c in einen überaus einfachen Zusammenhang mit G und den Dichten ϱ_i und ϱ_a; Gleichung (2) stellt weiter die Verbindung dieser Größen mit der Arbeit S, und (6) diejenige mit dem Kapillardruck K her.

V. Führen wir nun auch in die Gleichung (14) für $\alpha_i(w)$ das Maxwell'sche Gesetz ein und berücksichtigen die daraus oben gezogenen Folgerungen, so erhalten wir

$$D_0 = \frac{G^2(1+\gamma^2) - W^2}{2\mathfrak{A}} = \frac{G^2(\gamma^2+\frac{1}{2})}{2\mathfrak{A}}; \qquad 22)$$

aus (15) ergiebt sich noch einfacher

$$D = \frac{G^2\gamma^2}{2\mathfrak{A}} = \frac{S}{\mathfrak{A}}; \qquad 23)$$

hieraus folgt bei Benutzung der Relation $G^2 = 2BT$, in der B die Constante des Boyle-Gay-Lussacschen Gesetzes bezeichnet,

$$\mathfrak{A}(D_0 - D) = \tfrac{1}{2} W^2 = \tfrac{1}{4} G^2 = \tfrac{1}{2} BT. \qquad 24)$$

Diese Resultate zeigen, wie nach dem S. 7 Gesagten zu erwarten war, daß die Verdampfungswärme D_0 bei der Verdampfung in den leeren Raum stets größer ist, als die D, welche der Entwickelung gesättigten Dampfes entspricht, und daß ihre Differenz sich sehr einfach ausdrückt.

Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{Q}$ des in den leeren Raum entwickelten Dampfes erhält man aus dem Maxwell'schen Gesetz, da sich $W_a' = G/\sqrt{\pi}$ ergiebt, nach S. 348

$$\mathfrak{Q} = \frac{G\sqrt{\pi}}{2} = W\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

und für seine Temperaturdifferenz τ gegen die Flüssigkeit folgt nach derselben Stelle

$$B\tau = \psi_a - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Q}^2 - \Psi_a = -\frac{\pi-2}{4} W^2 = -\frac{\pi-2}{2} BT,$$

d. h. $\tau = \frac{1}{2}(\pi - 2)\, T$. Die Seite 349 erwähnte und im allgemeinen unbedenkliche Definition der Temperatur führt somit in dem vorliegenden speciellen Falle zu dem paradoxen Resultat, daß der in den streng leeren Raum entwickelte Dampf außerordentlich viel kälter ist, wie die Flüssigkeit, aus der er entsteht. Indessen würde diese niedrige Temperatur sich an einem Meßinstrument nur dann geltend machen, wenn dasselbe sich mit dem Dampfe bewegte, also die Geschwindigkeit $\mathfrak{Q}$ besäße. An einem ruhenden würden durch das Anprallen der Moleküle fremde thermische Wirkungen entstehen. —

Verbindet man mit (23) die Gleichung (5), so ergiebt sich für die Größenordnung von D noch die Beziehung

$$D\ (=)\ \frac{2K}{\mathfrak{A}(\varrho_i + \varrho_a)}. \qquad 25)$$

Hierdurch wird eine gewisse Verbindung zwischen unseren kinetischen Entwickelungen und den von J. Stefan[1]) ohne specielle Berücksichtigung der Molekularbewegung erhaltenen Resultaten hergestellt. Letztere gehen aus den vorstehenden hervor, wenn man mit Stefan ϱ_a neben ϱ_i vernachlässigt und — was recht bedenklich ist — das Zeichen (=) für gleiche Größenordnung mit dem = für wirkliche Gleichheit vertauscht, nämlich einen sprungweisen Uebergang zwischen Flüssigkeit und Dampf annimmt. Außerdem fehlt, wie schon Herr Ostwald[2]) auf einem ganz anderen, als unserm, Wege hat hervortreten lassen, bei Stefan der Factor 2 im Zähler.

Anders ist das Verhältniß der Gleichung (25) zu der durch die Herren Bakker[3]) und Nernst[4]) aus der van der Waals'schen Gleichung gezogenen, auch nicht völlig sicheren Folgerung, daß

$$\mathfrak{A}D = \frac{K_i}{\varrho_i} - \frac{K_a}{\varrho_a}$$

sein muß, wobei K_i den Kapillardruck an der Grenze Flüssigkeit — leerer Raum und K_a die gleiche Größe für die Grenze Dampf — leerer Raum bezeichnet. Hier liegt nämlich eine wirkliche Gleichheit vor, und die Formel ist daher von ganz andrer Natur,

1) J. Stefan l. c. p. 658.
2) Ostwald, Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. I, S. 46, 1887.
3) Bakker ebenda Bd. X, S. 558, 1892.
4) W. Nernst, Theoretische Chemie, Leipzig 1893, S. 204.

als die aus unserer Entwickelung folgende Aussage über die Grössenordnung von D. Für verschwindend kleines ϱ_a und K_a/ϱ_a steht sich gegenüber

$$\mathfrak{A}D \;(=)\; 2K_i/\varrho_i, \quad \mathfrak{A}D = K_i/\varrho_i,$$

was aber einen Widerspruch keineswegs nothwendig enthält.

Für die vollständige Verdampfungswärme Q erhält man aus der S. 349 erwähnten Beziehung

$$\mathfrak{A}Q = \mathfrak{A}D + p_a/\varrho_a \qquad 26)$$

und aus der für ideale Dämpfe geltenden Formel

$$p_a/\varrho_a = \tfrac{1}{3}G^2, \qquad 27)$$

unter Heranziehung von (23)

$$\mathfrak{A}Q = \tfrac{1}{3}G^2(\gamma^2+1), \qquad 28)$$

worin man nach (21) auch

$$\gamma^2 = l\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_a}\right) \qquad 29)$$

setzen kann. —

Es ist in der Einleitung ausdrücklich hervorgehoben worden, daß die benutzte Hypothese von der Möglichkeit einer idealen Flüssigkeit den wirklichen Verhältnissen wahrscheinlich sehr wenig entspricht, daß also numerische Uebereinstimmungen der Resultate mit der Beobachtung nicht zu erwarten sind. Trotzdem werden einige Zahlenangaben Interesse erwecken.

Nehmen wir, wie bei Wasser von 0° C, $\varrho_i/\varrho_a = 205000$, so folgt hieraus $\gamma^2 = 12{,}25$ $\gamma = 3{,}50$. Es sind sonach in diesem Falle nur solche Moleküle, deren Geschwindigkeit nach der Normale auf der Grenzfläche das 3,50-fache der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit G übersteigt, zum Austreten befähigt. Dies ist nicht einmal der 1000000ste Theil aller Moleküle.

Für die ganze Verdampfungswärme Q ergiebt hier die Formel (28) unter Benutzung des für Wasserdampf von 0° C geltenden Werthes $G = 50200$ cm rund 400 Cal., für den Kapillardruck folgt aus (6) etwa 7800 Atm.; der erste Zahlwerth beträgt genau zwei Drittel des bei Wasser beobachteten, der zweite steht in demselben Verhältniß zu dem von van der Waals auf einem ganz anderen, übrigens auch unsicheren Wege abgeleiteten K_i.

Die Zahlen $\varrho_i/\varrho_a = 9{,}5$, $G = 32000$ cm, welche Kohlensäure bei 0° C entsprechen, führen auf $\gamma^2 = 2{,}26$, $\gamma = 1{,}50$, $Q = 40$ cal., $K = 600$ Atm.; hier findet sich Q um ein Viertel kleiner als der

beobachtete, K aber erheblich kleiner als der van der Waals'sche Werth für K_t. Letzteres ist begreiflich, denn bei Annäherung an den kritischen Punkt wird unser K zu Null, während K_t endlich bleibt.

Diese Resultate dürften zeigen, daß sich mit Hülfe der Formel (28) ein angenäherter Werth der Verdampfungswärme Q auf eine neue und höchst einfache Weise berechnen läßt. —

VI. Es ist von verschiedenen Autoren betont worden, daß die Methoden der allgemeinen Thermodynamik sich den kinetischen Theorien vielfältig überlegen zeigen. Auch das vorstehend Entwickelte fordert dieses Urtheil heraus, denn so einfache Grundannahmen hier gewählt sind, es gelingt nicht, einen der bekannten auf Verdampfung bezüglichen thermodynamischen Sätze kinetisch zu begründen oder zu verificiren.

Wählen wir als Beispiel die Clausius'sche Gleichung

$$\mathfrak{A}Q = T\frac{dP}{dT}\left(\frac{1}{\varrho_a} - \frac{1}{\varrho_l}\right), \qquad 30)$$

worin P den der absoluten Temperatur T entsprechenden Gleichgewichtsdruck bezeichnet, so würde die Aufgabe sein, unter Benutzung der Werthe

$$P = p_a = \tfrac{1}{2}\varrho_a G^2, \quad 2BT = G^2, \quad \mathfrak{A}Q = \tfrac{1}{2}G^2(\gamma^2+1)$$

die Formel als eine identische zu erweisen. Man gelangt bei Vernachlässigung von $\frac{\varrho_a}{\varrho_l}$ neben Eins ohne Weiteres zu der einfachen Beziehung

$$\gamma^2 = \frac{T}{\varrho_a}\frac{d\varrho_a}{dT} = \frac{dl(\varrho_a)}{dl(T)}, \qquad 31)$$

aber zur Herstellung eines Zusammenhanges zwischen γ^2 und ϱ_a oder T liegen in unserer Entwickelung anscheinend keine Hülfsmittel.

Ist also die Clausius'sche Formel aus der kinetischen Theorie bisher nicht reconstruirbar, so kann man sie doch umgekehrt zur Ergänzung jener Theorie heranziehen, indem man die Beziehungen benutzt, welche sie an die Hand giebt. So enthält die letzte Formel, falls man ϱ_a als Function von T bestimmt denkt, bereits eine merkwürdige Aussage über die Zahl γ, welche die Befähigung der Flüssigkeitstheilchen zum Austreten in den Dampfraum bestimmt. Mit Hülfe einfacher Umformungen gestattet sie noch andere ähnliche Beziehungen abzuleiten.

So erhält man z. B. unter Rücksicht auf $\gamma^2 = c^2/G^2$ und $G^2 = 2BT$ aus (31)

$$c^2 = -2B\frac{dl(\varrho_a)}{d(1/T)} \tag{32}$$

und damit einen neuen Ausdruck für die Grenzgeschwindigkeit c selbst.

Interessanteres noch giebt die Einführung des Werthes (29) für γ^2 in (31); hier resultirt

$$2\,l(\varrho_i)\,dl(T) = d((l\varrho_a))^2, \tag{33}$$

und damit, sowie die Dichte ϱ_i der Flüssigkeit als Function von T gegeben ist, ein merkwürdiges Gesetz für die Dichte ϱ_a des gesättigten Dampfes, welches, abgesehen von einer Integrationsconstanten, keine andern Parameter enthält, als der Ausdruck für ϱ_i. Setzt man $\varrho_i = \varrho_0(1-\beta t)$, wo t die von einem beliebigen Anfangspunkt T_0 aus gerechnete Temperatur bezeichnet, so kann man innerhalb mäßiger Bereiche von t eine ziemlich einfache Formel für ϱ_a herstellen. Sie erhält die Gestalt

$$(l(\varrho_a))^2 = A + Bt + Cl(T), \tag{34}$$

worin A, B, C Constanten sind. —

Auch die bekannten Gesetze für die Erniedrigung des Gleichgewichtsdruckes und für die Erhöhung der Gleichgewichtstemperatur, die bei der Auflösung eines nicht im Dampfe auftretenden Körpers in der Flüssigkeit entstehen, kann man in ähnlicher Weise, wie die Clausius'sche Formel benutzen.

Verstehen wir weiterhin unter P_0 und T_0 Gleichgewichtsdruck und -temperatur für das reine Lösungsmittel und seinen Dampf, unter π die Aenderung des Gleichgewichtsdruckes bei Zufügung von ν' Grammmolekülen der löslichen, aber nicht mit verdampfenden Substanz zu ν_i Grammmolekülen der Flüssigkeit, so lautet das erstere Gesetz bekanntlich

$$\pi = -\frac{B\,T_0\,\nu'}{\left(\frac{1}{\varrho_a}-\frac{1}{\varrho_i}\right)\nu_i} = -\frac{P_0\,\varrho_i\,\nu'}{(\varrho_i-\varrho_a)\,\nu_i}. \tag{35}$$

Nun gilt aber nach den Formeln (21) und (27), die wir auch jetzt noch als gültig ansehen können, ganz allgemein

$$P = p_a = \tfrac{1}{2}\,\varrho_i\,G^2 e^{-\gamma^2}, \tag{36}$$

dazu ist $\varkappa = \frac{\partial P}{\partial (\nu'/\nu_i)} (\nu'/\nu_i)$; sieht man also bei ungeänderter Temperatur, indem man ϱ_i constant nimmt, von einer Contraction der Flüssigkeit durch den Zusatz ab, und denkt man auch G davon unberührt, was keinen innern Widerspruch enthalten dürfte, so wird

$$\frac{\partial P}{\partial (\nu'/\nu_i)} = - P \frac{\partial \gamma^2}{\partial (\nu'/\nu_i)},$$

und die Vergleichung mit (35) giebt, da P gegen P_0 fortgehoben werden darf,

$$\frac{\partial \gamma^2}{\partial (\nu'/\nu_i)} = \frac{\varrho_i}{(\varrho_i - \varrho_a)}, \tag{37}$$

oder, bei Vernachlässigung von ϱ_a neben ϱ_i, schließlich

$$\frac{\partial \gamma^2}{\partial (\nu'/\nu_i)} = 1. \tag{38}$$

Hieraus würde folgen, wenn γ_0 den Werth von γ für $\nu' = 0$, d. h. für die unvermischte Flüssigkeit bezeichnet

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 + \frac{\nu'}{\nu_i}, \tag{39}$$

und diese Formel enthält eine weitere interessante Aussage über das Verhalten jener fundamentalen Zahl γ.

Verstehen wir endlich unter τ die Erhöhung der Gleichgewichtstemperatur unter den oben vorausgesetzten Bedingungen, so lautet das zweite Gesetz

$$\tau = + \frac{B T_0^2 \nu'}{\mathfrak{A} Q \nu_i}, \tag{40}$$

oder wegen

$$\tau = \frac{\partial T}{\partial (\nu'/\nu_i)} (\nu'/\nu_i) \text{ und } 2BT_0 = G^2,\ \mathfrak{A}Q = \tfrac{1}{2} G^2 (1 + \gamma_0^2)$$

auch

$$\frac{\partial T}{\partial (\nu'/\nu_i)} = \frac{T_0}{1 + \gamma_0^2}. \tag{41}$$

Diese Gleichung giebt aber keinen wesentlichen Aufschluß über γ^2 und ist daher von einer andern Art, als die frühern. —

Wie vorstehend einige thermodynamische Sätze, so kann man auch ein Resultat der Capillaritätstheorie, das sich auf den Druck in gekrümmten Oberflächen bezieht, zur Erweiterung der Theorie

benutzen; dies soll aber wegen der Unbestimmtheit der hierfür maßgebenden Gleichung (6) unterbleiben.

VII. Die bisher benutzte Annahme, daß die Moleküle bei den Zusammenstößen im Mittel nur allein ihre Bewegungszustände austauschen, ist keine wesentlich beschränkende, und die fundamentalen Gleichungen (12) und (13) resultiren auch, wenn man in der z. B. bei der Theorie der Gasreibung üblichen Weise die Zusammenstöße wirklich in Rechnung zieht. Dies kommt in letzter Instanz daher, daß sowohl die Flüssigkeit, als der Dampf homogen angenommen sind.

Diese Bemerkung gestattet, unsere Entwickelungen noch auf andere Fälle anzuwenden, bei denen die vereinfachende Darstellung Bedenken begegnen würde, so z. B. auf die Vertheilung eines gelösten und nicht dissociirten Körpers zwischen zwei nicht mischbare Lösungsmittel. Hier ist dann unter ϱ_a und ϱ_i die Dichte des gelösten Körpers in der minder und in der mehr concentrirten Lösung zu verstehen, S ist die bei Ueberführung seiner Masseneinheit aus der Lösung (i) in die Lösung (a) gewonnene Arbeit, K der gegen den gelösten Körper wirkende von (a) nach (i) hin positiv gerechnete Kapillardruck. Die Ueberführungswärme D_0 hat in unserm Falle kaum einen Sinn, da derselbe ein Analogon zur Verdampfung in den leeren Raum nicht liefert; D aber gewinnt die Bedeutung der bei dem Uebergang der Masseneinheit des gelösten Körpers aus (i) nach (a) behufs Erhaltung der Temperatur zuzuführenden Wärme; da hierbei eine Arbeit nicht geleistet wird, so stellt D jetzt den ganzen Aufwand dar, und ein Analogon zu dem S. 349 eingeführten Q existirt nicht.

Sind die Lösungen so verdünnt, daß man die gelöste Substanz in beiden wie ein ideales Gas behandeln kann, so braucht man garnicht das Maxwell'sche Gesetz für die Geschwindigkeiten vorauszusetzen, um die Gleichheit der mittleren lebendigen Kräfte der gelösten Moleküle in beiden Lösungen zu beweisen; dieselbe, und dadurch auch die Beziehung $W_i = W_a = W$, ergiebt sich hier bekanntlich direct. Ferner erhält man für die osmotischen Drucke p_i und p_a in den beiden Lösungen:

$$p_i = W^2 \varrho_i, \quad p_a = W^2 \varrho_a, \tag{42}$$

und bei Combination dieser Werthe mit der Formel

$$K\ (=)\ \frac{c^2}{4}(\varrho_i + \varrho_a)$$

auch:

$$K\ (=)\ \frac{c^2}{4W^2}(p_i + p_a). \qquad 43)$$

Setzt man jetzt noch für die Geschwindigkeiten der gelösten Moleküle das Maxwell'sche Gesetz voraus, so wird

$$2W^2 = G^2,\ \varrho_i e^{-\gamma^2} = \varrho_a,\ \gamma^2 = c^2/G^2, \qquad 44)$$

also

$$K\ (=)\ \tfrac{1}{2}\gamma^2(p_i + p_a) = \tfrac{1}{2}(p_i + p_a)\,l\left(\frac{p_i}{p_a}\right), \qquad 45)$$

und dies giebt eine sehr merkwürdige Beziehung zwischen K und den beiden osmotischen Drucken. Für kleine Differenzen zwischen p_i und p_a folgt hieraus

$$K\ (=)\ p_i - p_a; \qquad 46)$$

im Allgemeinen gilt aber keineswegs etwa die Gleichung $K = p_i - p_a$, deren Bestehen man vielleicht vermuthen könnte.

Um auch hier einen Zahlenwerth anzugeben, wollen wir benutzen, daß nach Beobachtungen von Berthelot und Jungfleisch[1]) Bernsteinsäure sich zwischen Wasser und Aether so theilt, daß

$$\varrho_i/\varrho_a = 5{,}2$$

ist. Hieraus folgt $\gamma^2 = 1{,}67$, $\gamma = 1{,}29$, und demgemäß ist ungefähr der 13. Theil aller Moleküle zum Uebergang aus der wässerigen in die ätherische Lösung befähigt. Unter Benutzung einer der Formel $C_4H_8O_4$ entsprechenden Molekulargröße $\mu = 58{,}9$ erhält man $G = 19600$ cm und D gleich ca. 8 cal., K gleich 1,6 Atm. —

Es hindert offenbar nichts, an Stelle des einen Lösungsmittels den leeren Raum zu setzen und somit zu dem Fall der Gasabsorption in einer nicht merklich verdampfenden Flüssigkeit überzugehen. Da γ^2 für eine gegebene Combination Gas-Flüssigkeit eine Function der Temperatur allein ist, so drückt die aus

$$p_i = \tfrac{1}{2}G^2\varrho_i,\ p_a = \tfrac{1}{2}G^2\varrho_a,\ \varrho_i e^{-\gamma^2} = \varrho_a$$

folgende Beziehung

$$\varrho_i = \frac{2p_a e^{\gamma^2}}{G^2} \text{ oder } p_i = p_a e^{\gamma^2} \qquad 47)$$

das Henry'sche Absorptionsgesetz aus, wobei $e^{\gamma^2} = L$ die kinetische Deutung des Löslichkeitscoefficienten L enthält.

1) Berthelot u. Jungfleisch Ann. de chim. (4) 26 p. 396, 1872.

Die Größe K ist auch in unserm Falle gleich dem ganzen capillaren Drucke gegen das Gas in der Lösung; Q gewinnt die Bedeutung der Absorptionswärme, wenn der Vorgang sich bei constant erhaltenem p_a vollzieht, und die Formel

$$\mathfrak{A}Q = \tfrac{1}{2} G^2 (1 + \gamma^2) = BT(l(L) + 1) \qquad 48)$$

giebt ihren Werth durch lauter leicht bestimmbare Größen.

Während Beobachtungen über die Wärmetönung beim Uebergang einer Substanz von einem Lösungsmittel in ein anderes, damit in Berührung stehendes, mir nicht bekannt sind, so giebt es deren über die Absorptionswärme in großer Zahl. Eine versuchsweise Berechnung einiger von ihnen nach der vorstehenden Formel ergab viel zu kleine Werthe Q, was um so auffallender scheint, als sich die mit (48) correspondirende Formel (28) im Falle der Verdampfung recht gut bewährt hat. Die bisher zu Grunde gelegte einfache Vorstellung scheint also hier nicht mehr ausreichend zu sein, um eine ungefähre quantitative Uebereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie zu gewinnen.

Man kann den Grund der Abweichung vermuthen und darauf eine Correction der Formel basiren.

Bisher ist immer vorausgesetzt, daß die gegen die Grenzfläche zwischen den Räumen (a) und (i) fliegenden Moleküle diese auch sämmtlich durchsetzen, oder daß wenigstens der Effect derselbe wäre, als wenn dies stattfände. Dies hat selbst bei merklicher Größe der Moleküle nichts Bedenkliches, wenn die Räume (i) und (a) von derselben Substanz erfüllt sind, denn ein von (a) gegen die Grenze fahrendes und reflectirtes Theilchen wird nach unserer Grundannahme dann jederzeit vertreten durch ein von (i) aus gegen die Grenze kommendes und gleichfalls reflectirtes.

Wenn aber die Substanzen in (i) und (a) verschiedenartig sind, so wird bei merklicher Größe der Moleküle die Reflexion nicht in dieser Weise compensirt, und die Ableitung der Fundamentalformeln (17) und (18) erleidet eine leichte Aenderung. Bezeichnet nämlich β den für das Gas und das Lösungsmittel characteristischen Bruchtheil der von (a) auf die Grenze auffallenden Moleküle, der unreflectirt in (i) eindringt, so tritt leicht ersichtlicher Weise an ihre Stelle nunmehr

$$A_i G_i e^{-\gamma_i^2} = \beta A_a G_a,$$

$$(G_i^2 + 2W_i^2) A_i G\, e^{-\gamma_i^2} = \beta (G_a^2 + 2W_a^2) A_a G_a,$$

woraus statt (21) folgt

$$G_i = G_a = G, \quad \varrho_i e^{-\gamma^2} = \beta \varrho_a, \quad c/G = \gamma. \qquad 49)$$

Es bleiben sonach die früheren Resultate für die Gasabsorption gültig, nur hat der Löslichkeitscoefficient L jetzt die Bedeutung

$$L = \beta e^{\gamma^2}; \qquad 50)$$

demgemäß tritt an Stelle von (48) die Gleichung

$$\mathfrak{A}Q = BT\left(l\left(\frac{L}{\beta}\right)+1\right), \qquad 51)$$

welche bei bekanntem Q zur Berechnung von β dienen kann. $1/\beta$ findet sich hieraus, soweit ich die Rechnung angestellt habe, ungeheuer groß; es treten also von den auffallenden Gastheilchen nur verschwindend wenige in die Flüssigkeit ein, und die bei weitem meisten werden in der Oberflächenschicht reflectirt. —

Handelt es sich um die Vertheilung eines Körpers zwischen zwei Lösungsmittel (i) und (a), so wird für jedes von ihnen ein characteristischer Factor β_i resp. β_a einzuführen sein, und ihr Verhältniß β_i/β_a nimmt dann die Stelle von β in den letzten Entwickelungen ein. Der Effect ist derselbe, als wären in der Fundamentalformel (44) die factischen Dichten ϱ_i und ϱ_a mit $\varrho_i \beta_a$ und $\varrho_a \beta$ vertauscht. Obgleich die β_i und β_a sehr klein sein werden, kann ihr Verhältniß doch nahe bei Eins liegen, ja es können in speciellen Fällen die oben unter der Annahme $\beta = 1$ abgeleiteten Formeln merklich strenge gelten.

Beobachtungen, die Schlüsse hierüber gestatten, liegen meines Wissens noch nicht vor. Vermuthen darf man, daß die β_i und β_a mit den anderweit bestimmten Anzahlen der Stöße, welche je ein Molekül der gelösten Substanz innerhalb der betreffenden Lösungsmittel während der Zeiteinheit erfährt, in Beziehung stehen; indessen sind sie durch jene bisher nicht ausdrückbar, da es sich bei der Bestimmung der Stoßzahlen um beliebige Ablenkungen der gestoßenen Moleküle handelt, hier aber um solche von einer derartigen Größe, daß das Molekül von der Grenzfläche eben zurückprallt. Jedenfalls ist jedes β_A eine der Combination des gelösten Körpers und des Lösungsmittels, an dessen Grenze die Reflexion geschieht, individuelle Function der Temperatur. —

VIII. Wenn mehrere Körper gleichzeitig in den beiden in Berührung stehenden Flüssigkeiten gelöst sind, so verhalten sie sich,

soweit die Grundannahmen erfüllt sind, genau so, als wäre jeder für sich allein vorhanden, und die Gleichung

$$\beta_a \varrho_i = \beta_i \varrho_a e^{\gamma^2} \quad \text{oder} \quad \varrho_i = \beta \varrho_a e^{\gamma^2} \tag{52}$$

gilt für einen jeden von ihnen mit den ihm individuellen Zahlenwerthen von β und γ^2.

Ueber den Werth von γ^2 kann man allgemein stets dann etwas aussagen, wenn die gleichzeitig vorhandenen Körper gleiche Zusammensetzung und nur verschiedene Molekulargröße haben. Denn es gilt $\gamma^2 = c^2/G^2$, und c^2 bestimmt sich durch die doppelte Arbeit, die beim Uebergang von (i) nach (a) durch die von den beiden Flüssigkeiten ausgehenden Kräfte an der Masseneinheit der gelösten Substanz geleistet wird, hängt also von der Molekulargröße nicht ab; G^2 dagegen ist der Molekulargröße indirect proportional, da bei gleicher Temperatur μG^2 für alle Molekülarten den gleichen Werth hat. Somit ist $\gamma^2 = \mu \cdot \Gamma$, worin Γ eine der gelösten Substanz individuelle Function der Temperatur bezeichnet, und die μten Wurzeln aus den Verhältnissen L/β für die verschiedenen Molekülgattungen sind unter einander gleich. Aber diese Beziehung gilt nur, wenn die Moleküle beim Durchgang durch die Grenze zwischen beiden Lösungen ungeändert bleiben, d. h., wenn sie sich beim Eintritt in die andere Flüssigkeit weder dissociiren noch polymerisiren. Der entgegengesetzte Fall erfordert andersartige Ueberlegungen, als sie oben angestellt sind, und soll daher hier ausgeschlossen sein. —

Um schließlich noch ein Beispiel zu geben, so mögen nur zwei Molekülgattungen gleicher Zusammensetzung vorhanden sein, deren Molekulargewichte μ' und μ'' sich wie $1:2$ verhalten.

Dann ist, wenn kurz $e^{\mu' \Gamma} = \varepsilon$ gesetzt wird, für diese

$$\varrho_i' = \beta' \varrho_a' \varepsilon, \quad \varrho_i'' = \beta'' \varrho_a'' \varepsilon^2,$$

also

$$\frac{\varrho_i'^2}{\varrho_i''} = \frac{\varrho_a'^2 \beta'^2}{\varrho_a'' \beta''} = k, \tag{53}$$

wobei nach der Theorie der Dissociation k eine Function der Temperatur allein bezeichnet. Fügt man hierzu die Definitionen der Gesammtdichten des gelösten Körpers in (i) und (a):

$$\varrho_i = \varrho_i' + \varrho_i'', \quad \varrho_a = \varrho_a' + \varrho_a'', \tag{54}$$

so hat man fünf Gleichungen, aus denen man die vier Partial-

dichten ϱ_i', ϱ_i'', ϱ_a', ϱ_a'' eliminiren kann. Das Resultat läßt sich schreiben

$$1-\sqrt{1+\frac{4\varrho_i}{k}}=\frac{\varepsilon\beta''}{\beta'}\left(1-\sqrt{1+\frac{4\beta'^2\varrho_a}{k\beta''}}\right) \qquad 55)$$

und stellt für unsern Fall das Gesetz der Vertheilung für den gelösten Körper in kinetischer Deutung dar.

Dasselbe nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn $4\beta'^2\varrho_a/k\beta''$ groß, $4\varrho_i/k$ klein neben Eins ist, was eine starke Verschiedenheit von ϱ_a und ϱ_i und zugleich ϱ_a''/ϱ_a' groß, ϱ_i''/ϱ_i' klein gegen 0,2 voraussetzt. Dann erhält man in erster Annäherung

$$\varrho_i=\varepsilon\sqrt{k\beta''}\varrho_a \text{ oder } \varrho_i^2=\varrho_a\beta''k\varepsilon^2; \qquad 56)$$

es ist hier also nicht, wie früher, ϱ_i/ϱ_a, sondern ϱ_i^2/ϱ_a eine Function der Temperatur allein. Herr Nernst[1]) hat dies Gesetz für den Fall der Vertheilung von Benzoesäure zwischen Wasser und Benzol, wo zwei Molekülgattungen der vorausgesetzten Art aus anderen Gründen wahrscheinlich sind, bestätigt gefunden; doch braucht deshalb bei jener Combination die oben eingeführte Annahme, daß die Moleküle beim Uebergang von (*i*) nach (*a*) ihre Constitution nicht ändern, immerhin noch nicht nothwendig erfüllt gewesen zu sein. —

IX. Eine fernere Erweiterung der vorstehenden Entwickelungen ist nach verschiedenen Richtungen möglich. Hier sei nur noch der Fall erwähnt, daß zwei sich gegenseitig in begrenztem Maaße lösende ideale Flüssigkeiten nach demselben Raume hin verdampfen.

Dann haben wir drei Phasen vor uns, zwei Lösungen (*i*) und (*k*) und einen Dampf (*a*), der mit beiden im Gleichgewicht stehen muß. Daß unsere Formeln diese letzte Folgerung gestatten, ist leicht erkennbar.

Unterscheiden wir die beiden Componenten durch obere Indices, so gilt jedenfalls

$$G_i'=G_k'=G_a'=G',\ G_i''=G_k''=G_a''=G'', \qquad 57)$$

wobei G' und G'' neue Bezeichnungen sind. Ferner gelten für die bei den Ueberführungen der Masse Eins gewonnenen Arbeiten S_{ia}, S_{ka}, S_{ai}, da bei einem Kreisproceß durch alle drei Phasen Arbeit nicht gewonnen werden kann, die Beziehungen

---

1) W. Nernst, Zeitschr. für phys. Chemie, 8, S. 110, 1891.

$$S'_{ik} + S'_{ke} + S'_{ei} = 0, \quad S''_{ik} + S''_{ke} + S''_{ei} = 0. \qquad 58)$$

Die fundamentale Bedingung (52) liefert hier aber bei wiederholter Anwendung für jede der beiden Componenten drei Gleichungen von der Form

$$\frac{2S_{ik}}{G^2} = l\left(\frac{\varrho_i \beta_k}{\varrho_k \beta_i}\right), \quad \frac{2S_{ke}}{G^2} = l\left(\frac{\varrho_k \beta_e}{\varrho_e \beta_k}\right), \quad \frac{2S_{ei}}{G^2} = l\left(\frac{\varrho_e \beta_i}{\varrho_i \beta_e}\right), \qquad 59)$$

und deren Summe ergiebt links nach (58), rechts dagegen identisch Null. Hiermit ist aber gezeigt, daß nach unserer Theorie der entwickelte Dampf in der That mit beiden Lösungen im Gleichgewicht zu stehen vermag. —

Alle die in dieser Arbeit erhaltenen Gesetze sind bewiesen nur für die vorausgesetzten in der Einleitung definirten idealen Flüssigkeiten und Dämpfe. Soweit sie aber mit Beobachtungen an wirklichen, — vielleicht sehr verschieden constituirten — Körpern übereinstimmen, kann die entwickelte Theorie doch wenigstens zur Veranschaulichung des Mechanismus jener Vorgänge dienen.

Göttingen, November 1896.

Mitteilung zweier Druckfehler in Band II von Gauss' Werken.

(Aus einem an den vorsitzenden Secretär gerichteten Briefe.)

Von

Viceadmiral **von Jonquières** in Paris.

Vorgelegt in der Sitzung vom 19. December 1896.

J'ai l'honneur de vous signaler deux fautes typographiques qui se sont glissées dans le mémoire de Gauss „Solutio congruentiae $x^n - 1 \equiv 0$", inséré au tome II de ses oeuvres complètes dans l'édition de Göttingue, 1863, et qui n'ont pas été relevées à l'Errata de ce volume.

Dans cette question difficile, rédigée par Gauss avec une extrême concision, et où il recommande expressément (§ 240 et 252) de suivre ses idées sur les exemples qu'il donne à l'appui de la théorie, un lecteur non averti risquerait d'être arrêté par des fautes matérielles, auxquelles d'ailleurs il ne doit pas s'attendre, ayant une pleine confiance dans la correction habituellement irréprochable d'une édition si justement appréciée par les géomètres.

Errata*).

Page 210 — ligne 17, *au lieu de*

$5(5 * 3) \equiv (5 * 0)^4 - 2(5 * 0)^3$, *lisez*:

$5(5 * 3) \equiv (5 * 0)^4 - 2(5 * 0)^3 - 6(5 * 0)^2 + 2(5 * 0) - 10,$

et même page, ligne 18, *au lieu de*

$5(5 * 4) \equiv -2(5 * 0)^4 + 4(5 * 0)^3$, *lisez*:

$5(5 * 4) \equiv -2(5 * 0)^4 + 4(5 * 0)^3 + 17(5 * 0)^2 - 14(5 * 0) - 10.$

*) il est très probable que les trois derniers termes qui manquent dans chacune des deux lignes fautives, ont (d'après le terme consacré en imprimerie) *sauté* lors de la mise en pages.

Paris, 7 décembre 1896.

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Geschäftliche Mittheilungen

aus dem Jahre 1896.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Verlagsbuchhandlung.
1896.

Inhalt.

Bericht des abtretenden Sekretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1895/96 . . . . . S. 1
Bericht über die Wedekindsche Preisstiftung . . . . . „ 8
Verzeichnis der im Jahre 1895/96 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen . . . . . „ 15
Verzeichnis der Mitglieder der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften „ 21
Verzeichnis der im Tauschverkehr eingegangenen Druckschriften . . . „ 31
Preisvertheilung der Benekeschen Preisstiftung und neu von ihr gestellte Preisaufgabe . . . . . „ 67
Bericht über die öffentliche Sitzung der Gesellschaft am 7. November . „ 71
P. Kehr: Ueber den Plan einer kritischen Ausgabe der Papsturkunden bis Innocenz III. . . . . „ 72
Adresse der K. Gesellschaft an Lord Kelvin . . . . . „ 87
Adresse der K. Gesellschaft an Wilhelm Hittorf . . . . . „ 90
Verzeichnis der neugewählten Mitglieder der K. Gesellschaft . . . . „ 92

Bericht des abtretenden Secretärs über das Geschäftsjahr 1895/96.

Die Gesellschaft hat in dem abgelaufenen Geschäftsjahre 1895/96 1 außerordentliche, 15 ordentliche und 2 öffentliche Sitzungen gehalten. Ueber die darin gemachten Mittheilungen giebt die weiterhin abgedruckte Zusammenstellung Auskunft. In 7 Commissionssitzungen wurden geschäftliche Angelegenheiten vorbereitet oder erledigt.

Die Nachrichten von der K. G. d. W. sind in beiden Klassen für das Jahr 1895 mit Heft 4 abgeschlossen; der neue Jahrgang ist im Erscheinen.

Von den Abhandlungen ist Bd. 40 in beiden Abtheilungen abgeschlossen und ausgegeben. Die im vorjährigen Bericht erwähnte Umgestaltung dieser Publication ist mittlerweile zur Ausführung gekommen. Die Abhandlungen erscheinen nunmehr im Verlage der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin; Format und Druck sind unverändert. Die von den beiden Klassen der Gesellschaft herausgegebenen Abhandlungen werden sofort nach der Drucklegung einzeln mit selbständiger Paginirung ausgegeben; zu geeigneter Zeit zu einem Bande vereinigt. Die Bände werden in neuer Folge von 1 ab gezählt; im Bande tragen die Einzelabhandlungen laufende Nummern. Von der philologisch-historischen Klasse sind als Neue Folge Bd. 1 No. 1 P. Kehr: Ueber eine römische Papyrusurkunde des marburger Archivs und No. 2 W. Meyer: Ueber Lauterbachs und Aurifabers Sammlungen der Tischreden Luthers ausgegeben.

Die Göttingischen gelehrten Anzeigen, die wie früher unter der Aufsicht der Gesellschaft erscheinen, sind vom Jahre 1896 ab ebenfalls in den Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin übergegangen. Die Redaction übernahm im Herbst 1895 an Stelle

des nach Halle übergesiedelten langjährigen verdienten Redacteurs Prof. Bechtel Herr Dr. G. Wentzel hier. Es sind Vorkehrungen getroffen, die Gesellschaft in eine engere Verbindung mit der Leitung der Anzeigen, als es bisher der Fall war, zu bringen.

Der Schriftenaustausch ist regelmäßig vollzogen; die Gesellschaft ist gerne auf eine Anzahl von Tauschangeboten, die ihr von gelehrten Gesellschaften gemacht wurden, eingegangen. Die Nachrichten der mathematisch-physikalischen Klasse sind an 209, die der philologisch-historischen Klasse an 156 Stellen abgegeben; Band 40 der Abhandlungen an 31 gelehrte Körperschaften.

Das Verzeichnis der Schriften, die die Gesellschaft im Austausch oder als Geschenke erhalten hat, ist unten gegeben. Die Gesellschaft dankt auch an dieser Stelle für alle ihr gemachten literarischen Zuwendungen. Wo nicht im Tauschverkehr sofort auf besonderen Wunsch eine Empfangsbescheinigung über gemachte Zuwendungen gegeben wurde, bittet die Gesellschaft, die nachstehende Veröffentlichung der Eingänge als solche anzusehen.

Die im Auftrage der Gesellschaft von den Herren Schönflies und Pockels besorgte Ausgabe der wissenschaftlichen Aufsätze von Julius Plücker ist vollendet und in zwei Bänden bei J. B. Teubner in Leipzig erschienen.

Durch Bewilligung von Seiten des vorgesetzten hohen Ministeriums war die Gesellschaft in der Lage, mit dessen Zustimmung wissenschaftliche Untersuchungen und Arbeiten zu unterstützen. Danach sind zugewiesen:

an Herrn Prof. Dr. Wirtinger in Innsbruck zur Drucklegung seiner mit dem Beneke-Preise der hiesigen philosophischen Facultät gekrönten Arbeit: Untersuchungen über die allgemeinen Theta-Functionen . . . . . 300 M.

Herrn A. Peter für floristisch-biologische Untersuchungen . . . . . 800 M.

Herrn A. von Koenen für die Darstellung der Structur der Erdrinde auf topographischen Karten . . 1500 M.

Herren F. Leo und U. v. Wilamowitz zur Herausgabe antiker Scholien . . . . . 800 M.

Es sind die Scholien zu Lukian in Angriff genommen und Herr J. Graeven in Rom hat das Material so weit zusammengebracht, daß die Festsetzung des Textes in naher Aussicht steht.

Herrn U. v. Wilamowitz für Herrn Dr. M. Wellmann zur Fortführung der Ausgabe des Dioscorides . 800 M.

Herrn W. Schur als zweiter Beitrag zu den Kosten des Druckes der „Praesepe“ . . . . . 1000 M.

In der Commission für den Thesaurus linguae Latinae war die Gesellschaft wie bisher durch Herrn F. Leo vertreten.

Die Verhandlungen der im Cartell stehenden Akademien von Wien und München, sowie der gelehrten Gesellschaften von Leipzig und Göttingen bezogen sich auf die Untersuchungen über Erdschwere und die Herausgabe einer mathematischen Encyclopädie. Ein Abschluß darüber ist noch nicht erfolgt.

Den Herren Beyrich und Weierstrass in Berlin sandte die Gesellschaft zur Feier des achtzigsten Geburtstages Glückwunschschreiben; Herrn R. Leuckart in Leipzig überbrachte zur Feier seines fünfzigjährigen Doctorjubiläums Herr F. Merkel im Namen der Gesellschaft mit einer Zuschrift ihre Glückwünsche.

Der kaiserlich russischen Gesellschaft für Geographie in St. Petersburg wurde zur fünfzigjährigen Stiftungsfeier ein Gratulationsschreiben zugestellt.

Für das Jahr 1895 war von der Gesellschaft als Preisaufgabe eine Arbeit gestellt, welche die Schriften Kästners, die nicht in den Bereich seiner eigentlichen Berufswissenschaft fallen, vollständig verzeichnet, ordnet und kritisch untersucht. In Bewerbung um den dafür ausgesetzten Preis ist rechtzeitig und ordnungsmäßig bei dem vorsitzenden Secretär eine umfangreiche Arbeit eingeliefert mit dem Kennspruche: Ich habs gewagt. Das Urtheil darüber lautet:

Der Verf. der mit dem Kennspruch „Ich habs gewagt“ eingereichten Arbeit ist mit sichtlicher Sammellust, mit grossem Fleiß, Geschick und Glück Kästners Dichtungen, schönwissenschaftlichen Aufsätzen, Recensionen und Briefen, wie sie auf Bibliotheken und im Privatbesitz zerstreut waren, nachgegangen und hat einen überraschend großen Ertrag eingeerntet. Und seine Funde sind dem Sammler nicht totes Material geblieben. Er hat es verstanden, darauf in knappster Form, mit kundiger Umsicht eine Datierung und Erklärung zumal der Kästnerschen „Sinngedichte“ aufzubauen, die trotz einzelnen Misgriffen einen sehr erfreulichen Fortschritt

in unsrer Kenntnis des Dichters bedeutet. Auch die übersichtliche Anordnung des Materials entspricht im Wesentlichen durchaus den Wünschen der Gesellschaft; gewisse Mängel des Briefverzeichnisses werden leicht zu verbessern sein. Guten Blick bewährt der Verf. endlich auch in der Entscheidung der Echtheitsfragen und in der Abschätzung des kritischen Wertes von Drucken und Handschriften, aber freilich mehr guten Blick als methodische Schärfe; und ehe er die kritische Ausgabe ausführt, als deren Grundlage die vorliegende Arbeit gedacht ist, wird es noch einer genauen Revision des in ihr gegebenen Variantenapparats und einer consequenten sprachlich-stilistischen Detailuntersuchung bedürfen. Daß der Verf. sich diesen weiteren Aufgaben nicht entziehe, wünscht die Gesellschaft um so mehr, je wärmer sie das in beschränkter Zeit Geleistete anerkennt. Die Gesellschaft sieht in der Arbeit eine recht befriedigende Lösung der gestellten Aufgabe und erteilt ihr gerne den Preis.

Durch Eröffnung des mit dem Kennspruche „Ich habs gewagt" bezeichneten Couverts ergiebt sich als Verfasser

Dr. C. Scherer, Bibliothekar in Cassel,

dem somit der Preis zuerkannt worden ist.

Die Preisaufgabe für das Jahr 1897 lautet:

Die Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften wünscht eine anatomische Untersuchung und Beschreibung der Körperhöhlen (Schädel-, Brust-, Bauch- und Beckenhöhle) des neugeborenen Kindes und ihres Inhaltes im Vergleich mit denjenigen des Erwachsenen. Sie wünscht, daß die Art und Weise, wie sich die eine Form in die andere umbildet, thunlichst berücksichtigt werde.

Der Preis beträgt 500 Mark.

Die Preisaufgabe für das Jahr 1899 lautet:

Was an Schriften des Apollinaris von Laodicea erhalten ist, soll untersucht, kritisch bearbeitet und für die Darstellung seiner Theologie verwerthet werden.

Der Preis beträgt 1000 Mark.

Die Bewerbungsschriften müssen bis zum 1. Februar 1897 oder 1899 eingeliefert werden. Sie sollen mit einem Spruch versehen und von einem verschlossenen Brief begleitet sein, der außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen den Namen und Wohnort des Verfassers.

Die Gesellschaft verlor durch Weggang von Göttingen

von ordentlichen Mitgliedern:

Herrn Heinrich Weber, correspondierendes Mitglied seit 1875, ordentliches Mitglied seit 1892;

von Assessoren:

Herrn Friedrich Bechtel, Assessor seit 1882;

durch den Tod

ihr Ehrenmitglied:

Herrn Giuseppe Fiorelli in Neapel am 29. Januar 1896, Ehrenmitglied seit 1873;

von auswärtigen Mitgliedern:

in der mathematisch-physikalischen Klasse:

Herrn Franz Neumann in Königsberg am 23. Mai 1895, auswärtiges Mitglied seit 1856;

Herrn Carl Ludwig in Leipzig am 24. April 1895, auswärtiges Mitglied seit 1885, zuvor Correspondent seit 1861;

in der philologisch-historischen Klasse:

Herrn Heinrich von Sybel in Berlin am 1. August 1895, auswärtiges Mitglied seit 1871, zuvor Correspondent seit 1863;

Herrn Rudolf von Roth in Tübingen am 23. Juni 1895, auswärtiges Mitglied seit 1872, zuvor Correspondent seit 1853;

von Correspondenten:

in der mathematisch-physikalischen Klasse:

Herrn Thomas H. Huxley in London am 29. Juni 1895, Correspondent seit 1862;

Herrn Karl Hermann Knoblauch in Halle (S.) am 30. Juni 1895, Correspondent seit 1864;

Herrn William Crawford Williamson in Haslemere am 23. Juni 1895, Correspondent seit 1885;

Herrn Sven Lovén in Stockholm am 3. September 1895, Correspondent seit 1886;

in der philologisch-historischen Klasse;

Herrn Reginald Stuart Poole in London am 8. Februar 1895, Correspondent seit 1876;

Herrn Eduard Winkelmann in Heidelberg am 10. Februar 1896, Correspondent seit 1881.

Die Gesellschaft beklagt den am 27. Januar 1896 erfolgten plötzlichen Tod ihres Archivars Steup, dessen unermüdliche Thätigkeit die Führung der Geschäfte bei der Neuordnung der Gesellschaft wesentlich erleichterte.

Herr Heinrich Weber trat mit seiner Uebersiedelung von hier nach Straßburg in die Reihe der auswärtigen Mitglieder der mathematisch-physikalischen Klasse.

Die Gesellschaft wählte am 22. Juni 1895

zu ordentlichen Mitgliedern

der mathematisch-physikalischen Klasse

Herrn Daniel Hilbert;

der philologisch-historischen Klasse

Herrn Paul Kehr;

zum auswärtigen Mitgliede

der philologisch-historischen Klasse

Herrn Friedrich Bechtel in Halle (S.).

Die allerhöchste Bestätigung dieser Wahlen durch Seine Majestät den König erfolgte am 30. Juni 1895.

Die Gesellschaft wählte am 22. Juni 1895

zu correspondierenden Mitgliedern

der philologisch-historischen Klasse

Herrn Eugen Hultzsch in Bangalore (Indien),
„ Elias Steinmeyer in Erlangen,
„ Eduard Meyer in Halle,
„ Otto Seeck in Greifswald.

Der Bericht über die mit der Gesellschaft verbundenen Stiftungen gedenkt an erster Stelle einer der Gesellschaft gemachten Zuwendung zur Gründung einer neuen Stiftung.

Im Namen von Freunden de Lagardes hat Herr Professor Georg Hoffmann in Kiel der Gesellschaft ein Capital von etwa 5100 Mark angeboten, um damit eine „Stiftung der Freunde Paul de Lagardes“ ins Leben zu rufen. Diese Stiftung soll aus ihren Einkünften nach gegebenen Statuten unter der Verwaltung der königlichen Gesellschaft Beihülfe für die Aufgaben der Lagarde-

schen Stiftung leisten. Die Gesellschaft hat beschlossen, mit wärmstem Danke gegen die hochherzigen Geber die Stiftung anzunehmen. Die allerhöchste Genehmigung zur Annahme ist noch nicht erfolgt.

Bei der Lagardeschen Stiftung ist beschlossen, eine Anzahl von Schriften de Lagardes, die seit längerer Zeit im Buchhandel fehlen und verlangt werden, neu auszugeben; und zwar zunächst die Aegyptiaca und die Gesammelten Abhandlungen.

Ueber die Wedekindsche Preisstiftung für deutsche Geschichte erstattet deren Director nachstehenden Bericht.

Bericht über den fünften Verwaltungszeitraum der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte

erstattet

von dem zeitigen Direktor **F. Frensdorff.**

Der fünfte die Jahre 1886—1896 umfassende Verwaltungszeitraum ist der letzte, aus dem über ein Decennium zu berichten ist. Gemäß den neuen Ordnungen der Stiftung, die unter dem 4. Januar 1895 von dem Herrn Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinalangelegenheiten bestätigt sind und mit dem heutigen Tage in Kraft treten, werden die Preisaufgaben von nun ab für einen Zeitraum von fünf Jahren ausgeschrieben, und wird damit hoffentlich um die von der Stiftung gestellten Aufgaben ein lebhafterer Wettbewerb entstehen, als die Berichte des Verwaltungsraths vom J. 1876 und 1886 zu verzeichnen hatten und auch der heutige zu verzeichnen hat.

Das letzte Preisausschreiben hatte für den ersten Preis der Stiftung gefordert: eine Ausgabe der von dem Mainzer Eberhard Windeck verfaßten Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigmunds. Die Wiederholung dieser schon für den Verwaltungszeitraum von 1876—1886 gestellten Aufgabe ist ohne Bewerber geblieben.

Dasselbe gilt von der für den zweiten Preis verlangten: Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts.

Es war demnach, ebenso wie schon im Jahre 1886, nur der dritte in den Ordnungen § 21 vorgesehene Preis zu vertheilen. Der Verwaltungsrath erbat sich entsprechend der statutenmäßigen Vorschrift über die Bildung des Preisgerichts (§ 24) die Mitwirkung zweier auswärtiger Historiker aus den Angehörigen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften. Die Herren Geh. Rath

von Hegel in Erlangen und Professor Dr. Schäfer in Tübingen haben bereitwillig die Wahl angenommen und durch ihre Gutachten das Preisgericht in seiner Arbeit auf das Dankenswertheste unterstützt.

Zwei bei dem Verwaltungsrath eingelaufene Schriften, die sich um den dritten Preis bewarben, konnten bei dem Vorhandensein darstellender Geschichtswerke, die den vom Stifter in erster Linie gestellten Anforderungen entsprachen, bei der Zuerkennung des Preises nicht berücksichtigt werden.

Bei der Auswahl unter der reichen Litteratur der deutschen Geschichte, die aus dem letzten Jahrzehnt in Betracht kam, hat sich das Preisgericht die zwiefache Beschränkung auferlegt, von der Krönung verstorbener Autoren abzusehen ebenso wie von der nochmaligen Krönung solcher Werke, die bereits durch andere Preise ausgezeichnet worden sind. Unter den übrig bleibenden Geschichtswerken hat das Preisgericht einmal das Buch von Friedrich von Bezold, Professor der Geschichte in Erlangen, Geschichte der deutschen Reformation, Berlin 1887—90 (dritte Hauptabthlg. Bd. I von Oncken, Allgem. Geschichte in Einzeldarstellungen) ausgewählt. Es entspricht dem, was die Stiftung fordert, vollauf. Sind auch durch den Charakter der Sammlung, deren Bestandtheil das Buch bildet, die Nachweise aus den Quellen ausgeschlossen, so beruht es doch auf einer so gründlichen Kenntniß und Durcharbeitung des Materials, auf eigener Forschung und der kritischen Verwerthung der Ergebnisse der neuern Untersuchungen, und hat in einer so anziehenden Darstellung seinen Stoff vorzutragen verstanden, daß Bezolds Werk mit Ehren seinen Platz neben Rankes deutscher Geschichte im Zeitalter der Reformation einnimmt.

Das zweite von dem Preisgericht ausgewählte Werk ist die Kirchengeschichte Deutschlands von Albert Hauck, Professor der Kirchengeschichte in Leipzig, von der bisher drei Theile (Leipz. 1887—96) erschienen sind, die das Thema bis zum Wormser Vertrage von 1122 führen. Der Verfasser hat den weit zerstreuten Quellenstoff aufs neue durchforscht und mit eindringender Kritik glänzende Darstellung verbunden. Neben der Geschichte der Kirche im fränkischen und im deutschen Reiche, ihres Verhältnisses zum Staate und seiner Entwicklung hat das Werk die geistige Cultur, wie sie in der theologischen und weltlichen Litteratur und den Schöpfungen der Kunst hervortritt, eingehend berücksichtigt. Mit außerordentlicher Gelehrsamkeit verbindet der Verfasser selbständiges und unbefangenes Urtheil und

fördert die lebendige historische Erkenntniß des Mittelalters in hervorragender Weise.

Da bereits veröffentlichte Werke nach den Ordnungen der Stiftung (§ 21[3]) nur die Hälfte des dritten Preises empfangen können, so hat das Preisgericht beschlossen, den beiden Werken von v. Bezold und Hauck den Preis von 3300 Mark zu gleichen Theilen zuzuerkennen.

Göttingen, den 14. März 1896.

Preisaufgabe
der
Wedekindschen Preisstiftung
für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath der Wedekindstiftung macht hierdurch die erste Aufgabe bekannt, die gemäß den neuen Ordnungen der Stiftung, die mit dem 14. März 1896 in Geltung getreten sind, für einen fünfjährigen Zeitraum gestellt wird.

Der Verwaltungsrath verlangt:

eine archivalisch begründete Geschichte der innern Verwaltung des Kurfürstenthums Mainz unter Emmerich Joseph (1763—1774) und Friedrich Karl Joseph (1774—1802). Besonderer Werth wird auf die Ermittlung der Theilnahme von Johannes Müller gelegt.

1. **Form und Einsendung der Bewerbungsschriften.** Bewerbungsschriften müssen vor dem 1. August 1900 an den Direktor des Verwaltungsraths der Stiftung eingesandt werden und aller äußern Zeichen entbehren, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist ihr ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

2. **Preisgericht.** Das Preisgericht besteht aus dem Verwaltungsrathe der Stiftung und sovielen von ihm aus den übrigen Angehörigen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, den ordentlichen, den auswärtigen Mitgliedern und den Correspondenten, hinzu erwählten anerkannt sachkundigen und unparteilichen Männern, daß die Gesammtzahl sieben ist. Die Mitglieder des Preisgerichts können nicht an der Bewerbung Theil nehmen.

Die übrigen Mitglieder der Königlichen Gesellschaft dürfen sich wie jeder andere um den Preis bewerben.

3. **Urtheil.** Das Urtheil des Preisgerichts wird am 14. März 1901 in einer Sitzung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften bekannt gemacht und in deren „Nachrichten" in der Abtheilung: Geschäftliche Mittheilungen veröffentlicht.

4. **Preis.** Der Preis beträgt 3300 Mark und muß ganz oder kann gar nicht zuerkannt werden. Ist der Verfasser der Preisschrift bereits verstorben, so fällt der Preis seinen Erben zu.

Der Verfasser der gekrönten Schrift oder dessen Erben werden noch besonders durch den Direktor von dem ihnen zugefallenen Preise benachrichtigt und können diesen bei der Königlichen Universitätscasse zu Göttingen auf Anweisung des Direktors gegen Quittung erheben.

5. **Druck der Preisschrift.** Die gekrönte Schrift geht in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselbe einer Buchhandlung in Verlag geben oder auf Kosten der Stiftung drucken lassen.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Kapitale der Stiftung zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Gesellschaft auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Gesellschaft fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser, oder, falls er nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll sodann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder falls er verstorben ist, für dessen Erben und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Gesellschaft festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekind'schen Preise gekrönt und herausgegeben.

6. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, die die Stiftung herausgiebt, erhält der Verfasser zehn Freiexemplare, der Verwaltungsrath ebenfalls zehn zu freier Verfügung.

7. **Zurückforderung nicht gekrönter Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

Göttingen, den 14. März 1896.

Bericht über den Verwaltungszeitraum 1895/96.

In der Ordnung der Stiftung sind im verflossenen Jahre zwei wichtige Aenderungen eingetreten. Es sind die neuen Statuten der Stiftung, deren wichtigste Abweichungen von den früher geltenden im vorjährigen Bericht aufgezählt sind, mit dem 14. März 1896 in Kraft getreten, und es ist die Finanzverwaltung der Stiftung diesen neuen Statuten entsprechend geregelt worden. Zu dem Ende sind die Capitalien des Stammfonds der Stiftung im Betrage von 36300 Mark in das Staatsschuldbuch über die 3 % Buchschuld und zwar auf den Namen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften eingetragen und das übrige Vermögen der Stiftung der Königlichen Universitätscasse übergeben, welche seit dem 1. Juli 1895 die Rechnungsführung besorgt.

Von den wissenschaftlichen Unternehmungen der Stiftung ist die Ausgabe der Chronica novella des Hermann Korner im verflossenen Jahre zum Abschluß gelangt. Nachdem wiederholte Preisausschreiben, die mit dem Jahre 1856 beginnen, ohne den gewünschten Erfolg geblieben waren, hat die Wedekindstiftung im J. 1889 auf Anregung ihres damaligen Directors, Geh. Reg.-Raths Prof. Sauppe, und unter Beirath von Prof. Weiland die Herausgabe der für die spätere mittelalterliche Geschichte und Geschichtschreibung des deutschen Nordens gleich wichtigen Chronik des Lübecker Dominikaners Hermann Korner († 1438) selbst in die Hand genommen. Die Schwierigkeit der Edition, die namentlich

in der Mannichfaltigkeit der die Chronik überliefernden Recensionen enthalten war, zu erleichtern, hatte die Stiftung unter der Direction von G. Waitz, der seit Beginn seiner wissenschaftlichen Thätigkeit die Kornersche Chronik nicht aus den Augen gelassen hat — schon 1838 hat er in einem Aufsatze des Archivs für ältere deutsche Geschichtskunde sich mit ihr beschäftigt —, von drei der wichtigsten Handschriften, der Wolfenbüttler, der Danziger und der Linköpinger, in den J. 1865—67 Abschriften anfertigen lassen und auf der hiesigen Bibliothek niedergelegt. Seitdem es dann der Stiftung durch die Vermittlung von Professor Weiland gelang, in Herrn Dr. phil. Schwalm einen Gelehrten zu finden, der zur Uebernahme der materiell und formell gleich mühsamen Editionsaufgabe geeignet und geneigt war, kam die Arbeit in Fluß. Mit dem August 1889 ist Dr. Schwalm, dessen Zeit zugleich durch die Mitarbeiterschaft an den Monumenta Germaniae historica in Anspruch genommen war, mit der Aufgabe beschäftigt gewesen. Ueber den Fortschritt seiner Arbeit ist wiederholt in den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften berichtet worden (1893 S. 753, 1895 I S. 8). Zu Ende October 1895 konnte die Verlagshandlung von Vandenhoeck und Ruprecht, die durch Vertrag vom 31. October 1892 den Verlag übernommen hatte, das 86 Bogen in Quart umfassende Werk (81½ B. Text incl. der 6½ B. starken Register und 4½ B. Einleitung) in solider, geschmackvoller Ausstattung dem Publicum übergeben. Der Wedekindstiftung gereicht es zur Genugthuung, eine von der deutschen Geschichtsforschung lange begehrte Quelle in einer den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechenden Gestalt allgemein zugänglich gemacht und die ihr anvertrauten Mittel zu einem Zwecke verwendet zu haben, der nach Gegenstand und Ausführung recht eigentlich dem entsprach, was der Stifter als eine der Hauptaufgaben seiner Stiftung bezeichnet hat. Wenn dieser Erfolg erreicht ist, so hat ihn die Stiftung vor allem dem Fleiß, der Umsicht und der treuen Hingabe zu danken, mit der Dr. Schwalm die von ihm übernommene Aufgabe ausgeführt hat. Sie wird aber zugleich der stetigen Förderung eingedenk bleiben, mit der unser verewigter College Weiland das schwierige Werk, das jetzt endlich nach vierzigjährigen Bemühungen fertig vorliegt, unterstützt hat.

Ueber die am 14. März dieses Jahres fällig gewordenen Preise und ihre Vertheilung ist zur Zeit ausführlich berichtet; desgleichen auch die neue Preisaufgabe für den Verwaltungszeitraum 1896 bis 1901 verkündet worden. Es bleibt hier nur noch zu berichten übrig, daß der Verwaltungsrath von den am Schlusse des zehn-

jährigen Verwaltungszeitraums verfügbaren Mitteln der Stiftung nach eingeholter Genehmigung des Königlichen Curators der Universität 800 Mark dem Justizrath Dr. Stein in Schweinfurt in Anerkennung seiner Arbeiten über die Geschichte Frankens und 2000 Mark dem Hansischen Geschichtsverein zur Fortsetzung seiner Editionsarbeiten überwiesen hat.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Verzeichnis der im Jahre 1895/96 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen.

Öffentliche Sitzung vom 27. April 1895.

U. v. Wilamowitz: Bericht über die Thätigkeit und den Stand der Gesellschaft im abgelaufenen Geschäftsjahre. (Gedr. in den Geschäftl. Mittheil. H. 1.)

F. Frensdorff: Bericht über die Wedekindsche Preisstiftung. (Geschäftl. Mitteil. H. 1.)

G. Cohn: Gedächtnisrede auf G. Hanssen. (Geschäftl. Mittheil. H. 1.)

M. Lehmann: Gedächtnisrede auf L. Weiland. (Geschäftl. Mittheil. H. 1.)

Sitzung vom 11. Mai 1895.

Der vorsitzende Secretär legt vor: R. Dedekind (Braunschweig), Ueber eine Erweiterung der Symbole (a. b) in der Theorie der Moduln. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 2.)

A. von Koenen: Ueber Fischreste des norddeutschen und böhmischen Devons. (Abhandlungen Bd. 40.)

O. Wallach: Ueber Arbeiten aus dem Universitäts-Laboratorium. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 2.)

F. Klein überreicht ein Exemplar seiner autographierten Vorlesung: Ueber lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

Derselbe legt vor: F. Netto (Giessen), Ueber die Structur der Resultanten binärer Formen. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 2.)

U. v. Wilamowitz legt vor: Fr. Hultsch (Dresden), Erläuterungen zu dem Berichte des Jamblichos. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 3) und Fr. Krebs (Berlin), Eine griechische Inschrift aus Aegypten.

Derselbe: Hephaistos. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 3.)

F. Kielhorn legt vor: B. Liebich (Breslau), Ueber die Cândra Grammatik. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 3.)

Sitzung vom 25. Mai 1895.

F. Kielhorn berichtet über 21 neue Kupferplatten der Könige von Kanauj und legt Abklatsche der Asoka-Inschriften von Delhi vor.

U. v. Wilamowitz legt vor: E. Bethe (Rostock), Die Ueberlieferung des Onomastikon von Julius Pollux. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 3) und berichtet über: M. Wellmann, Eine pneumatische Schule. (Philolog. Untersuchungen XIV.)

N. Bonwetsch: Die altslavische Uebersetzung der Schrift Hippolyts: Vom Antichrist. (Abhandlgn. Bd. 40.)

F. Klein legt vor: O. Hölder (Tübingen), Die Gruppen mit quadratfreier Ordnungszahl. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 2.)

Sitzung vom 15. Juni 1895.

Der vorsitzende Secretär legt vor: O. Hurwitz (Zürich), Ueber einen Fundamentalsatz der arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 2.)

A. v. Könen: Ueber die Entwicklung von Dadocrinus gracilis und die Beziehungen dieser Art und von Halocrinus zu älteren und jüngeren Crinoiden. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

W. Schur macht vorläufige Mittheilungen über die Pendelbeobachtungen. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 2.)

F. Klein legt vor: Sommerfeld, Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 n = 0$ auf Riemannschen Flächen. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

W. Voigt: Zur Erinnerung an Franz Neumann. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 2.)

F. Klein überreicht ein Manuskript J. Plückers.

U. v. Wilamowitz giebt einen Nachtrag zu den Mittheilungen von Fr. Krebs über eine ägyptische Inschrift.

H. Wagner: Die hysographische Curve der Erdkruste und die Romieuxschen Relationen. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

W. Meyer: Der Berliner Annalist von 1434. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 3.)

Sitzung vom 6. Juli 1895.

U. v. Wilamowitz legt vor: B. Keil (Straßburg), Das Gottesurtheil von Mantineia. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 3.)

G. Roethe: Ueber Goethes „Mädchen von Oberkirch". (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 4.)

J. Wellhausen legt vor: Dr. Konrad Trieber (Frankfurt a/M.), Zur Kritik des Josephus Gorionides. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 4.)

F. Leo: Bemerkungen über plautinische Wortstellungen und Wortgruppen. (Nachr. phil.-hist. Klasse H. 4.)

F. Klein überreicht eine von Prof. Wirtinger in Innsbruck eingesendete Abschrift eines Briefes von Gauss aus dem J. 1797.

E. Riecke legt vor: Prof. Paschen (Hannover), Ueber Gesetzmäßigkeit in den Spektren fester Körper, und: Ueber eine neue Bestimmung der Sonnentemperatur. Mit 2 Tafeln. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

Sitzung von 20. Juli 1895.

W. Schur überreicht ein Exemplar seiner Abhandlung über das Göttinger Heliometer und die Praesepe.

O. Wallach: Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium. II. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

J. Orth: Bericht über die aus dem pathologischen Institut der Universität Göttingen im Etatsjahre 1894/95 veröffentlichten wissenschaftlichen Arbeiten. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

U. v. Wilamowitz legt vor: J. A. Heikel, Ueber die Handschriften von Eusebius Vita Constantini, Laus Constantini und Constantini Oratio ad sanctum coetum. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 4.)

F. Leo: Die Publication von Ciceros Briefen an Atticus. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 4.)

Derselbe legt vor: Bericht der Commission für den Thesaurus linguae latinae über die Pfingstconferenz zu München am 2. und 3. Juni 1895.

G. Cohn: Zur Morphologie der Production. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 4.)

Sitzung vom 19. October 1895.

Der vorsitzende Secretär legt vor:

O. Bütschli (Heidelberg), Ueber den Bau quellbarer Körper und die Bedingungen der Quellung. (Abhandlgn. Bd. 40.)

A. Hurwitz (Zürich), Zur Theorie der algebraischen Zahlen. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

A. Hurwitz (Zürich), Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlenkörper. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

F. Klein: Ueber eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

Derselbe legt vor: R. Fricke (Braunschweig), Ueber die Discontinuitätsbereiche der Gruppen reeller linearer Substitutionen einer complexen Variabeln. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

Ph. Furtwängler, Zur Begründung der Idealtheorie. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 3.)

F. Orth: Bericht über die im Sommerhalbjahre 1895 im pathologischen Institut in Göttingen fertig gestellten wissenschaftlichen Arbeiten. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 4.)

Peter berichtet über die botanischen Ergebnisse seiner mit der Unterstützung der Gesellschaft in den beiden verflossenen Jahren gemachten Reisen.

F. Kielhorn legt vor: Franke (Berlin), Zu Açokas Felsenedicten. (Nachr. phil.-hist. Kl. H. 4.)

Öffentliche Sitzung vom 2. November 1895.

F. Klein trug vor: Ueber die Arithmetisierung der Mathematik. (Geschäftl. Mitth. 1895, H. 2.)

Sitzung vom 16. November 1895.

M. Lehmann las: Fichte's Reden an die deutsche Nation vor der preussischen Censur.

N. Bonwetsch: Die handschriftliche Ueberlieferung des Daniel-Commentars Hippolyts. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1896, H. 1.)

F. Kielhorn legt vor: H. Lüders, Zu Açvagosha's Buddhacarita. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1896, H. 1.)

W. Schur: Ueber Pendelmessungen in der Nähe von Göttingen. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 4.)

A. v. Könen legt fünf neue geologische Karten des Gebietes nördlich von Göttingen vor.

Sitzung vom 30. November 1895.

E. Riecke: Ueber die in einem Blitzschlag zum Ausgleich kommenden Electricitätsmengen. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 4.)

D. Hilbert legt vor: G. Landsberg (Heidelberg), Zur Grundlegung der arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. (Nachr. math.-phys. Kl. H. 4.)

W. Schur berichtet über einen neuen Fall des Dreikörperproblems bei dem Doppelstern 70 Ophiuchi.

P. Kehr: Ueber eine römische Papyrusurkunde des Marburger Staatsarchivs. (Abhandlgn. phil.-hist. Kl. N. F. 1. 1.)

N. Bonwetsch: Das altslavische Henochbuch. (Abhandlgn. phil.-hist. Kl. N. F. 1. 3.)

F. Kielhorn legt vor: H. Jacobi, Der Ursprung des Buddhismus aus dem Sânkhya-Yoga. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1896, H. 1.)

U. v. Wilamowitz macht eine vorläufige Mittheilung über die Entdeckung des illustrierten botanischen Werkes des Krateuas durch Herrn M. Wellmann.

Sitzung vom 11. Januar 1896.

A. v. Könen: Ueber die Pendelmessungen bei Freden. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.)

F. Klein: Ueber die Bewegung des Kreisels. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.

Sitzung vom 25. Januar 1896.

F. Kielhorn: Die Sonnen- und Mondfinsternisse in den Daten indischer Inschriften. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1896, H. 1.)

K. Dilthey legt vor: August Mau (Rom), Fulcra lectorum. Testudines alveorum. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1896, H. 1.)

W. Meyer: Ueber Lauterbachs und Aurifabers Sammlungen der Tischreden Luthers. (Abhandlgn. phil.-hist. Kl. N. F. 1. 3.)

D. Hilbert: Ein neuer Beweis für den Kroneckerschen Satz über Abelsche Gleichungen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.)

Derselbe legt vor: P. Stäckel (Königsberg), Ein Brief von Gauss an Gerling. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.)

A. v. Könen legt vor: Alex. Tornquist (Straßburg), Ueber den Fund eines Ceratites nodosus ant. in der vicentinischen Trias und üder die stratigraphische Bedeutung desselben. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.)

F. Klein legt vor: G. Bohlmann, Continuirliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.)

Derselbe legt vor: H. Maschke (Chicago), Ueber die Darstellung endlicher Gruppen durch Cayleysche Farbendiagramme. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.)

E. Riecke berichtet über Röntgensche Strahlen.

Sitzung vom 8. Februar 1896.

O. Wallach: Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen. III. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.)

Sitzung vom 22. Februar 1896.

C. Dilthey: Beiträge zur Erklärung antiker Gemälde. (Erscheint in den Abhandlungen, phil.-hist. Kl.)

F. Kielhorn legt vor: E. Leumann (Straßburg), Zu Aśvaghoṣa's Buddhacarita. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1896, H. 1.)

E. Riecke: Mittheilungen über Versuche mit Röntgenschen Strahlen.

Sitzung vom 7. März 1896.

O. Wallach legt vor: F. Heusler (Bonn), Zur Theorie der Erdölbildung. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.)

D. Hilbert legt vor: Schoenflies (Göttingen), Ueber einen Satz der Analysis situs. (Nachr. math.-phys. Kl. 1896, H. 1.)

Sitzung vom 14. März 1896.

U. v. Wilamowitz: Ueber die attischen Archonten zur Zeit der 13 Phylen.

N. Bonwetsch: Das slavisch erhaltene Baruchbuch. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1896, H. 1.)

Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ende März 1896.

Sekretäre.

Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Professor, Geheimer Regierungs-Rath; vorsitzender Sekretär.
Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr. ph., Professor.

Ordentliche Mitglieder.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Georg Meissner, Dr. med., Professor, Geh. Medicinalrath, seit 1861.
Ernst Schering, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath seit 1862. (Zuvor Assessor, seit 1860.)
Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1874. D. z. Sekretär.
Eduard Riecke, Dr. ph., Professor, seit 1879. (Zuvor Assessor seit 1872.)
Adolf von Koenen, Dr. ph., Professor, Geh. Bergrath, seit 1881.
Woldemar Voigt, Dr. ph., Professor, seit 1883.
Friedrich Merkel, Dr. med., Professor, seit 1885.
Theodor Liebisch, Dr. ph., Professor, seit 1887.
Felix Klein, Dr. ph., Professor, seit 1877. (Zuvor Assessor, seit 1871, Correspondent seit 1872.)
Gottfried Berthold, Dr. ph., Professor, seit 1887.
Albert Peter, Dr. ph., Professor, seit 1889.
Otto Wallach, Dr. ph., Professor, seit 1890.
Johannes Orth, Dr. med., Professor, seit 1893.
Wilhelm Schur, Dr. ph., Professor, seit 1893.
David Hilbert, Dr. ph., Professor, seit 1895.

Philologisch-historische Klasse.

Ferdinand Wüstenfeld, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungs-Rath, seit 1856. (Zuvor Assessor, seit 1841.)

Hermann Wagner, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1880.
Ferdinand Frensdorff, Dr. jur. und Dr. ph., Professor, Geh. Justizrath, seit 1881.
Franz Kielhorn, Dr. ph., Professor, seit 1882.
Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr. ph., Professor, seit 1892. D. z. Sekretär.
Karl Dilthey, Dr. ph., Professor, seit 1892.
Wilhelm Meyer, Dr. ph., Professor, seit 1892.
Julius Wellhausen, Dr. th. und Dr., Professor, seit 1892.
Max Lehmann, Dr. ph., Professor, seit 1893.
Gustav Cohn, Dr. ph., Professor, seit 1893.
Nathanael Bonwetsch, Dr. th., Professor, seit 1893.
Friedrich Leo, Dr. ph., Professor, seit 1893.
Gustav Roethe, Dr. ph., Professor, seit 1893.
Paul Kehr, Dr. ph., Professor, seit 1895.

Assessor.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Bernhard Tollens, Dr. ph., Professor, seit 1884.

Ehren-Mitglieder.

Adolf Frhr. von Nordenskiöld, zu Stockholm, seit 1879. (Zuvor Correspondent, seit 1871.)
Heinrich von Stephan, Dr., Staats-Sekretär des Reichs-Postamts, Excellenz, zu Berlin, seit 1884.

Auswärtige Mitglieder.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Robert Bunsen, Dr., Großherzogl. Bad. Geheimer Rath I. Klasse, und Professor, Excellenz, zu Heidelberg, seit 1855.
Richard Dedekind, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Braunschweig, seit 1862. (Zuvor Correspondenz, seit 1859.)
William Thomas Lord Kelvin, Professor, zu Glasgow, seit 1864. (Zuvor Correspondent, seit 1859.)
Joseph Dalton Hooker, Direktor der Königlichen Gärten, zu Sunningdale, seit 1865.
Carl Weierstrass, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1865. (Zuvor Correspondent, seit 1856.)
Carl Neumann, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1868. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Francesco Brioschi, Senator des Königreiches Italien, Direktor des kgl. technischen Instituts zu Mailand, seit 1870. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Carl Claus, Dr., Professor, Hofrath, zu Wien, seit 1873. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1871.)

Eduard Frankland, Professor der Chemie, zu Reigate, seit 1873.

Max von Pettenkofer, Dr., Geheimer Rath und Ober-Medicinalrath, Professor zu München, seit 1874.

Alex Williamson, zu London, seit 1874.

Charles Hermite, Professor, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, seit 1874. (Zuvor Correspondent, seit 1861.)

Lazarus Fuchs, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1875. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1874.)

Joh. Jap. Sm. Steenstrup, Dr., Professor, zu Kopenhagen, seit 1876. (Zuvor Correspondent, seit 1860.)

Gabriel Aug. Daubrée, Inspecteur général des Mines und Professor, zu Paris, seit 1876.

A. L. Descloizeaux, Professor der Mineralogie, zu Paris, seit 1877. (Zuvor Correspondent, seit 1885.)

Friedrich Kohlrausch, Dr., Geh. Regierungsrath, Präsident der phys.-techn. Reichsanstalt, Charlottenburg, seit 1879. (Zuvor Assessor, seit 1867.)

August Kekulé, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1880. (Zuvor Correspondent, seit 1869.)

Luigi Cremona, Professor, Senator und Direktor der Ingen.-Schule des Königreichs Italien zu Rom, seit 1880. (Zuvor Correspondent, seit 1869.)

Albert von Kölliker, Dr. ph. und Dr. med., Geheimer Rath, Professor, zu Würzburg, seit 1882. (Zuvor Correspondent, seit 1862.)

Sir Gabriel Stokes, Professor, zu Cambridge, seit 1882. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Arthur Auwers, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, beständ. Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1882. (Zuvor Correspondent, seit 1871.)

James Joseph Sylvester, Professor, zu Oxford, seit 1883. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Eugenio Beltrami, Professor, zu Rom, seit 1883. (Zuvor Correspondent, seit 1875.)

Johannes Reinke, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Kiel, seit 1885. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1882.)

Wilhelm Foerster, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1875.)

Ludwig Boltzmann, Dr., Professor, Geheimer Rath, zu Wien, seit 1887. (Zuvor Correspondent, seit 1882.)

Carl Klein, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Berlin, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1887.)

H. Graf zu Solms-Laubach, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1879.)

Gustav Wiedemann, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1888.

Rudolf Leuckart, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Leipzig, seit 1889. (Zuvor Correspondent, seit 1859.)

Ernst H. Beyrich, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Berlin, seit 1889. (Zuvor Correspondent, seit 1878.)

Victor Meyer, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1889. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1885.)

Karl Gegenbauer, Dr., Professor, Großherzogl. Bad. Geh. Rath II. Klasse, zu Heidelberg, seit 1891.

Emil du Bois-Reymond, Dr., Professor, Geh. Ober-Med. Rath, zu Berlin, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1861.)

Adolf von Bayer, Dr., Professor, Geh. Rath, zu München, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1879.)

Eduard Suess, Dr., Professor, zu Wien, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1884.)

Herm. Amandus Schwarz, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1892. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1875, Correspondent seit 1869.)

Sophus Lie, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1872.)

Henri Poincaré, Professor, zu Paris, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1884.)

Heinrich Weber, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1895. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1892, Correspondent seit 1875.)

Philologisch-historische Klasse.

Theodor Mommsen, Dr., Professor, zu Charlottenburg, seit 1867. (Zuvor Correspondent, seit 1857.)

Ernst Curtius, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath zu Berlin, seit 1868. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1856.)

Carl Hegel, Dr. ph. et jur., Professor, Geh. Rath, zu Erlangen, seit 1871. (Zuvor Correspondent, seit 1857.)

Alfred Ritter von Arneth, Dr., Hofrath, Direktor des Staatsarchivs, zu Wien, seit 1874. (Zuvor Correspondent, seit 1870.)

Adolf Kirchhoff, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1881. (Zuvor Correspondent, seit 1865.)

Theodor Nöldecke, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1883. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Leopold Delisle, Administrateur général de la bibl. nationale, zu Paris, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1866.)

Theodor von Sickel, Dr., Professor, Hofrath, zu Rom, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1868.)

Wilhelm Wattenbach, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1865.)

Julius Oppert, Professor, zu Paris, seit 1887. (Zuvor Correspondent, seit 1876.)

M. J. de Goeje, Professor, zu Leyden, seit 1888. (Zuvor Correspondent, seit 1872.)

Gaston Paris, Membre de l'institut, zu Paris, seit 1889.

Julius Ficker von Feldhaus, Dr., Professor, Hofrath, zu Innsbruck, seit 1889. (Zuvor Correspondent, seit 1866.)

Alexander Conze, Dr., Generalsekretär des archäol. Instituts, zu Charlottenburg, seit 1890. (Zuvor Correspondent, seit 1875.)

L. Duchesne, Abbé, zu Paris, seit 1891.

Max Müller, Professor, zu Oxford, seit 1891. (Zuvor Correspondent, seit 1861.)

Friedrich Bechtel, Dr., Professor, zu Halle, seit 1895. (Zuvor Assessor, seit 1882.)

Correspondenten.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Ludwig von Seidel, Dr., Professor, Geh. Rath, zu München, seit 1854.

Heinrich Limpricht, Dr. med. et ph., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Greifswald, seit 1860. (Zuvor Assessor, seit 1857.)

Wilhelm Gottlieb Hankel, Dr. ph. et med., Professor, Geheimer Rath, zu Leipzig, seit 1864.

George Quincke, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1866.

Ferdinand von Müller, Dr., Direktor des botan. Gartens, zu Melbourne, seit 1867.

Benj. Apthorp Gould, Professor, zu Cambridge, U. St., seit 1867.

Rudolf Lipschitz, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1867.

Robert Mallet, Mitglied der Royal Society zu London, seit 1869.

Elwin Bruno Christoffel, Dr., Professor a. D., zu Straßburg, seit 1869.

Wilh. Theod. Bernhard Holtz, Dr., Professor, zu Greifswald, seit 1869.

Georg Salmon, Professor, Provost des Trinity College zu Dublin, seit 1869.

Carl Friedrich Rammelsberg, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1870.

Paul Gordan, Dr., Professor, zu Erlangen, seit 1870.

Eduard Pflüger, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Bonn, seit 1872.

Adolf Mayer, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1872.

Karl Anton Bjerknes, Dr., Professor, zu Christiania, seit 1873.

Johannes Thomae, Dr., Professor, Hofrath, zu Jena, seit 1873.

Henry Enfield Roscoe, Professor, zu London, seit 1874.

Johann Strüver, Dr., Professor, zu Rom, seit 1874.

Leo Königsberger, Dr., Professor, Großh. Bad. Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1874.

Bernhard Minnigerode, Dr., Professor, zu Greifswald, seit 1874. (Zuvor Assessor, seit 1873.)

Ferdinand Frhr. von Richthofen, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1875.

William Huggins, Professor, zu London, seit 1876.

Joseph Norman Lockyer, Professor, zu London, seit 1876.

Wilhelm Waldeyer, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, best. Sekretär der K. Akademie d. Wissenschaften, zu Berlin, seit 1877.

Theodor Reye, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1877.

Franz Carl Joseph Mertens, Dr., Professor, zu Wien, seit 1877.

Gösta Mittag-Leffler, Dr., Professor, zu Stockholm, seit 1878.

Georg Cantor, Dr., Professor, zu Halle, seit 1878.

Alexander Agassiz, Professor, zu Cambridge, U. St. A., seit 1879.

Karl von Voit, Dr., Professor, Geheimer Rath und Obermedicinalrath, zu München, seit 1879.

Wilhelm Hittorf, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Münster, seit 1879.

Hugo Gyldén, Dr., Professor, zu Stockholm, seit 1879.

Friedrich Beilstein, Dr., Professor, Staatsrath, zu St. Petersburg, seit 1880.

Wilhelm His, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Leipzig, seit 1880.

Ulisse Dini, Professor, zu Pisa, seit 1880.

H. Rosenbusch, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Heidelberg, seit 1882.
R. Fittig, Dr., Professor, zu Straßburg i. E., seit 1882.
Ferdinand Lindemann, Dr., Professer, zu München, seit 1882.
Ludwig Kiepert, Dr., Professor, zu Hannover, seit 1882.
Franz Eilhardt Schulze, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1883.
Gaston Darboux, Dr., Professor, zu Paris, seit 1883.
Wilhelm Conrad Röntgen, Dr., Professer, zu Würzburg, seit 1883.
Ludwig Sylow, Dr., zu Frederickshall, seit 1883.
Gustav Tschermak, Dr., Hofrath, zu Wien, seit 1884.
Theodor Wilh. Engelmann, Dr., Professor, zu Utrecht, seit 1884.
François Felix Tisserand, Professor, zu Paris, seit 1884.
Emile Picard, Professor, zu Paris, seit 1884.
Edouard Bornet, Professor, zu Paris, seit 1885.
Wilhelm Pfeffer, Dr., Professer, Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1885.
James Hall, Professor, zu Albany (New-York), seit 1885.
Ludimar Hermann, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Königsberg, seit 1886.
Gustav Retzius, Dr., Professor, zu Stockholm, seit 1886.
Ferdinand Zirkel, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Leipzig, seit 1886.
J. Boussinesq, membre de l'institut, zu Paris, seit 1886.
Georg Frobenius, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1886.
William Lord Rayleigh, zu Witham (Essex), seit 1886.
Julius Weingarten, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1886.
Walther Flemming, Dr., Professor, zu Kiel, seit 1887.
Hermann Vogel, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Potsdam, seit 1887.
Emil Warburg, Dr. ph., Professor, zu Berlin, seit 1887.
Ernst Mach, Dr., Professor, Regierungsrath, zu Prag, seit 1887.
Hermann Vöchting, Dr., Professor, zu Tübingen, seit 1888.
Eugen Warming, Dr., Professor, zu Kopenhagen, seit 1888.
Simon Newcomb, Professor, Superintendent of the American Nautical Almanac, zu Washington, seit 1888.
Alexander Brill, Dr., Professor, zu Tübingen, seit 1888.
Karl von Kupffer, Dr., Professor, Kais. russ. Kollegienrath, zu München, seit 1889.
Archibald Geikie, zu London, seit 1889.
Otto Bütschli, Dr., Professor, Hofrath, zu Heidelberg, seit 1889.

E. W. Beneke, Dr., Professor, zu Straßburg i. E., seit 1889.
J. Willord Gibbs, Professor, zu Newhaven, seit 1889.
F. Fouqué, Membre de l'institut, zu Paris, seit 1891.
Friedrich Prym, Dr., Professor, zu Würzburg, seit 1891.
Max Bauer, Dr., Professor, zu Marburg, seit 1892.
Camillo Golgi, Professor, zu Pavia, seit 1892.
Friedrich Leopold Goltz, Dr., Professor, zu Straßburg i. E., seit 1892.
Victor Hensen, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Kiel, seit 1892.
Alexander von Karpinsky, Excellenz, Präsident des Comité geolog., zu St. Petersburg, seit 1892.
Dmitri Mendelejeff, Dr., Professor, zu St. Petersburg, seit 1892.
Simon Schwendener, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1892.
Karl von Zittel, Dr., Professor, zu München, seit 1892.
Heinrich Bruns, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1892.
J. H. van't Hoff, Dr., Professor, zu Amsterdam, seit 1892.
Henry A. Rowland, Professor, zu Baltimore, seit 1892.
Max Nöther, Dr., Professor, zu Erlangen, seit 1892.
Adolf Hurwitz, Dr., Professor, zu Zürich, seit 1892.

Philologisch-historische Klasse.

Jakob Burkhardt, Dr., Professor, zu Basel, seit 1865.
Leo Meyer, Dr., Professor, Wirkl. Staatsrath, Excellenz, zu Dorpat, seit 1865. (Zuvor Assessor, seit 1861.)
Theodor Aufrecht, Dr., Professor, zu Bonn, seit 1871.
Ulrich Köhler, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1871.
William Stubbs, D. D. Rt. Rev. Bishop of Oxford, Cuddesdon Palace near Oxford, seit 1872.
Ferdinand Justi, Dr., Professor, Geh. Regierungsrat, zu Marburg, seit 1875.
Stephanos Kumanudes, Dr., Professor, zu Athen, seit 1876.
Ludwig Hänselmann, Dr., Professor, Stadtarchivar, zu Braunschweig, seit 1878.
Adolf Michaelis, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1879.
Georg Hoffmann, Dr., Professor, zu Kiel, seit 1881.
Franz Bücheler, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1881.
Wolfgang Helbig, Dr., Professor, zu Rom, seit 1882.
Jos. G. Bühler, Dr., Professor, zu Wien, seit 1883.
Otto Benndorf, Dr., Professor, Hofrath, zu Wien, seit 1883.

Curt Wachsmuth, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1884.
Heinrich Nissen, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1884.
Adalbert Bezzenberger, Dr., Professor, zu Königsberg, seit 1884.
J. F. Fleet, Dr., zu Bombay, seit 1885.
Friedrich Hultsch, Dr., Ober-Schulrath, zu Dresden, seit 1885.
Johannes Vahlen, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, best. Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1885.
Percy Gardner, Professor, zu Oxford, seit 1886.
Friedrich Imhoof-Blumer, Dr., zu Winterthur, seit 1886.
Heinrich Kiepert, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1886.
Adolf Köcher, Dr., Professor, zu Hannover, seit 1886.
Charles Piot, Archivar, zu Brüssel, seit 1886.
Joh. Gottfried Wetzstein, Dr., Konsul a. D., zu Berlin, seit 1886.
Eugen Petersen, Dr., Professor, Sekretär des archäologischen Institus, zu Rom, seit 1887.
Hermann Usener, Dr., Professor, Geg. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1887.
Sophus Bugge, Dr., Professor, zu Christiania, seit 1887.
Ignazio Guidi, Professor, zu Rom, seit 1887.
Wilhelm Pertsch, Dr., Ober-Bibliothekar, Geh. Hofrath, zu Gotha, seit 1889.
Otto Ribbeck, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1888.
Adolf Erman, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1888.
Constantin Höhlbaum, Dr., Professor, zu Gießen, seit 1889.
Karl Koppmann, Dr., Stadtarchivar, zu Rostock, seit 1889.
Richard Pischel, Dr., Professor, zu Halle, seit 1889.
Clemens Robert Markham, Kustos im Geographical Departement des India office, zu London, seit 1890.
Hermann Oldenberg, Dr., Professor, zu Kiel, seit 1890.
Wilhelm Fröhner, Dr., zu Paris, seit 1891.
Charles Gross, Professor, zu Cambridge, Mass., U. St. A., seit 1891.
Konstantinos Kontos, Professor, zu Athen, seit 1892.
Moritz Ritter, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1892.
Goswin Freiherr von der Ropp, Dr., Professor, zu Marburg, seit 1892.
Henry Harrisse, zu Paris, seit 1892.
Ludwig Traube, Dr., Privatdocent a. d. Universität München, seit 1894.

Wilhelm von Bippen, Dr., Staatsarchivar und Senatssekretär, zu Bremen, seit 1894.
Dietrich Schaefer, Dr., Professor, zu Tübingen, seit 1894.
Edward Schröder, Dr., Professor, zu Marburg, seit 1894.
Albert Hauck, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1894.
Adolf Jülicher, Dr., Professor, zu Marburg i. H., seit 1894.
Wilhelm Wilmanns, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn a. Rh., seit 1894.
Hermann Möller, Dr., Professor, zu Kopenhagen, seit 1894.
Hermann Jacobi, Dr., Professor, zu Bonn a. Rh., seit 1894.
Heinrich Zimmer, Dr., Professor, zu Greifswald, seit 1894.
August Mau, Dr., Professor und Bibliothekar des Kgl. archäologischen Instituts, zu Rom, seit 1894.
Maxime Collignon, Dr., Professor an der faculté de lettres, Paris, seit 1894.
E. Hultsch, Dr., Governement Epigraphist, zu Bangalore, seit 1895.
Elias Steinmeyer, Dr., Professor, zu Erlangen, seit 1895.
Eduard Meyer, Dr., Professor, zu Halle a/S., seit 1895.
Otto Seeck, Dr., Professor, zu Greifswald, seit 1895.

Verzeichniss

der im Jahre 1895 eingegangenen Druckschriften[1]).

A. Gesellschaftsschriften.

Aachen. Zeitschrift des Aachener Geschichtsvereins. Bd. 17 u. Register zu Bd. 8—15, 1895.

Adelaide. Transactions of the Royal Society of South Australia. Vol. XVIII, 1894. Vol. XIX, 1895.

Albany. University of the State of New York. New York State Museum. Annual Report of the Regents. XLVII for 1893 (1894).

Altenburg. Mittheilungen der Geschichts- und Alterthumsforschenden Gesellschaft des Osterlandes. X. Bd. 4. H. 1895.

— Mittheilungen aus dem Osterlande. Hrsg. v. d. Naturforschenden Gesellschaft des Osterlandes zu Altenburg i. S.-A. VI. Bd. (d. g. R. XXV. Bd.) 1894.

Amiens. Bulletins de la Société des Antiquaires de Picardie. 1893 No. 1—4. 1894 No. 1.

Amsterdam. Jaarboek van de Koninkl. Akademie van Wetenschappen voor 1894.

— Verhandelingen der Koninkl. Akademie van Wetenschappen. (Afd. Natuurkunde:) I. Sectie, Deel III No. 1—4, 1895. II. Sectie, Deel IV No. 1—6, 1894—95. — Afd. Letterkunde: Deel I No. 4, 1895.

— Verslagen en Mededeelingen der Koninkl. Akademie van Wetenschappen. Afd. Letterkunde: Deel XI 1895.

---

1) Der Druckort ist nur dann besonders angegeben, wenn er nicht mit dem Sitz der Gesellschaft zusammenfällt. Das Druckjahr ist, wo es dem Jahrgang einer Zeitschrift nicht entspricht, in Klammern hinzugefügt.

Amsterdam. Verslagen der Zittingen van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninkl. Akademie van Wetenschappen van 26. Mai 1894 tot 18. April 1895.

— Pascoli, J., Myrmedon. Carmen praemio aureo ornatum in certamine poetico Hoeufftiano. Accedunt duo poemata laudata. 1895.

— Huygens, Christiaan: Oeuvres complètes. VI. Correspondance 1666—1669. 1895.

— Tijdschrift van het Koninkl. Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap. Ser. II Deel XI Afl. 8, 1894, Deel XII Afl. 1—6, 1895.

— Revue semestrielle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la Société Mathématique d'Amsterdam. T. III p. 1. 2. 1895.

— Wiskundige opgaven met de oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap, ter spreuke voerende: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Deel VI, Stuk 4, 6. 1895.

— Verslag van de . . . algemeene Vergadering van het Wiskundig Genootschap . . . 16. Verg. 1895.

Antwerpen. Bulletin de la Société Royale de Géographie d'Anvers. T. XIX 1894/95 fasc. 3—5. T. XX 1895/96 fasc. 1. 2.

— Mémoires de la Société Royale de Géographie d'Anvers. T. IV. 1895.

Athen. *Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας. T.* VI. *τ.* 4. 1894. *T.* VII. *τ.* 1—4. 1895.

Augsburg. Zeitschrift des Historischen Vereins für Schwaben und Neuburg. Jhrg. XXI 1894.

Baltimore. Johns Hopkins University Circulars. Vol. XIV. 1895. No. 116—122.

— Franklin, S. B., Traces of the epic influence in the tragedies of Aeschylus. Dissert. Baltimore 1895.

Barcelona. Historia de la Real Academia de Ciencias y Artes. Memoria inaugural del año académico de 1893 à 1894 leída por el Doctor D. José Balari y Jovany. 1895.

— La casà di Monistrol y la Real Academia de Ciencias y Artes. Memoria histórico-necrológia de D. José Escrivá de Romaní y Dusay . . . — A. del Romero Walsh. 1895.

Basel. Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. X. Bd. H. 2 u. 3. 1894/95. XI. Bd. 1. H. 1895.

Batavia. Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXXII Afl. 1—4. 1894. Deel XXXIII Afl. 1. 2. 1895.

— Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXXVII. Afl. 4—6. 1894. Deel XXXVIII. Afl. 1—5. 1894/95.

— Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XLVIII. Stuk 2. 1894. Deel L. Stuk 1. 1895.

— Catalogus der ethnologische verzameling van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen door J. A. van der Chijs. IV. Druk, Supplement 1894.

— Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India. Uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen van J. A. van der Chijs. Anno 1665. (1894.)

— Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811 dor J. A. van der Chijs. Uitgeg. door het Bat. G. v. K. e. W. Deel XII. 1795—1799 (1894). Deel XIII. 1800—1803 (1895).

— Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. Vol. XVI. 1893 (1894).

— Regenwaarnemingen in Nederlandsch Indië door J. P. van der Stok. Jaarg. XV. 1893 (1894).

— Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Uitgeg. door de Koninkl. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 54 (= IX, 3) 1895.

— Die Triangulation von Java ausgeführt vom Personal des geographischen Dienstes in Niederländisch Ost-Indien. 4. Abth. 1895.

Bergen. Bergens Museums Aarbog for 1893 (1894).

Berkeley. University of California. Bulletin of the Department of Geology. Vol. I. No. 8. 9. 1894—95.

— University of California. Biennial Report of the President of the University. 1893 (1894). — College of Agriculture. Report of Works of the agricult. experiment stations for the year 1891/92, 1892/93 and part of 1894. — Annual Report of the Secretary to the board of Regents for the year, ending June 30. 1894. — Library. Contents-Index. Vol. I. 1889/90. — Li-

brary Bulletin No. 9. 1887. No. 12. 1894. — Report of the viticultural works. Seasons 1887/89. Part. I. — Register of the University. 1893/94. — Alumni-Association. Adresses 17. May 1893. — Bulletin of the Department of mechanical Engineering. No. 2. 3. 1887.

Berkeley. University of California Studies. Vol. I. No. 1. 2. 1893—94.

Berlin. Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu B. aus d. J. 1894.

— Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu B. Jahrg. 1895. I—XXXVIII.

— Politische Correspondenz Friedrichs des Großen. Bd. XXI. 1894.

— Korrespondenzblatt des Gesammtvereins der deutschen Geschichts- und Alterthumsvereine. Jahrg. 43. 1895.

— Mitteilungen der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte. Jahrg. IV. H. 4. 1894. Jahrg. V. H. 1—3. 1895.

— Mittheilungen des Vereins für die Geschichte Berlins 1895. No. 1—12.

— Schriften des Vereins für die Geschichte Berlins. H. XXXII. 1895.

— Zeitschrift des Vereins für Volkskunde. Jahrg. V. 1895.

Bern. Jahrbuch für schweizerische Geschichte. Hrsg. auf Veranstaltung der Allgemeinen Geschichtsforschenden Gesellschaft der Schweiz. Bd. XX. Zürich 1895.

— Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern. Jahrg. 1894 (No. 1335—1382.) (1895).

— Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft (Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles). 71. Jahresversammlung. Solothurn 1888. 72. Jahresvers. Lugano 1889. 73. Jahresvers. Davos 1890. 74. Jahresvers. Freiburg 1891. 77. Jahresvers. Schaffhausen 1894.

— Archives des sciences physiques et naturelles. Compte rendu des travaux présentés à la 77. session de la Société Helvétique des Sciences Naturelles à Schaffhouse 1894. Genève 1894.

Bologna. Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna Ser. V. T. III. faso. 1—4. 1893.

Bonn. Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 96—98. 1895.

Bordeaux. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Sér. IV. T. III. Cahier. II. 1893. T. IV. Cah. I. II. 1894.

Boston. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. N. S. Vol. XXI. 1893—94 (1894).

— Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XXVI. p. 2. 3. 1893—94.

— Occasional Papers of the Boston Society of Natural History. IV. Geology of the Boston Basin by W. O. Crosby. Vol. I. p. 2. 1894.

Braunsberg. Monumenta historiae Warmiensis oder Quellensammlung zur Geschichte Ermlands. Bd. VI. 3. Abth. Bibliotheca Warmiensis VI. Bogen 1—10. 1894.

— Zeitschrift für die Geschichte und Alterthumskunde Ermlands. Bd. XI. H. 1 (= G. R. H. 33). 1894.

Bremen. Abhandlungen hrsg. vom Naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen. Bd. XIII. H. 2. 1894.

— Beiträge zur nordwestdeutschen Volks- und Landeskunde, hrsg. v. Naturwiss. Vereine zu Bremen. H. 1 (= Abhandlung. d. Naturw. Ver. XV, 1.) 1895.

— Bremisches Jahrbuch. Hrsg. von der historischen Gesellschaft des Künstlervereins. 8—16. Bd. 1876—92. II. Serie. Bd. 1. 2. 1885/91.

— Focke, Joh., Bremische Werkmeister aus älterer Zeit. Als Beitrag zur Nordwestdeutschen Gewerbe- und Industrie-Ausstellung in Bremen. Hrsg. von d. Histor. Gesellsch. d. Künstlervereins. 1890.

— Jungk, Herm., Die Bremischen Münzen. Münzen und Medaillen des Erzbisthums und der Stadt Bremen mit geschichtlicher Einleitung. Hrsg. von d. Histor. Gesellsch. d. Künstlervereins. 1875.

— Schumacher, H. A., Der erste Schwurgerichtshof in Bremen. Studien und Kritiken. 1864.

— — Die Stedinger. Beitrag zur Geschichte der Weser-Marschen. Von der Abth. des Künstlervereins f. Bremische Geschichte und Alterthümer gekrönte Preisschrift. 1865.

Breslau. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. 72 für 1894 (1895). Ergänzungs-H. 3. 1895.

Breslau. Schlesiens Vorzeit in Bild und Schrift. Zeitschrift des Vereins für das Museum schlesischer Altertümer. Bd. VI. H. 2. 3. 1895.

Brisbane. Proceedings of the Royal Society of Queensland. Vol. XI. Part I. 1895.

Bromberg. Jahrbuch der Historischen Gesellschaft für den Netzedistrikt zu Br. Jahrg. 1895.

Brünn. Bericht der Meteorologischen Commission des Naturforschenden Vereines in Brünn über die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. XII i. J. 1892 (1894).

— Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn. Bd. XXXII. 1893 (1894).

Brüssel. Annuaire de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 61. Annnée 1895.

— Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 64. Année. Sér. III. T. XXVIII. No. 12. 1894. 65. Année. Sér. III. T. XXIX. XXX. No. 1—8. 1895. — Classe des Lettres. Programme de concours pour l'année 1896 (1895).

— Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. LI. 1893. T. LII. 1893/94.

— Mémoires couronnés et autres mémoires publ. par l'Académie Royale des Sciences . . . de Belgique. T. XLVII. 1892/93. T. L—LII. 1895.

— Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publ. p. l'Académie Royale des Sciences . . . de Belgique. T. LIII. 1893/94.

— Collection de Chroniques Belges inédites publ. par ordre du gouvernement. Correspondance du Cardinal de Granvella publ. p. Piot. T. X. 1893. T. XI. 1894.

— Analecta Bollandiana. T. XIII. fasc. 4. 1894. T. XIV. fasc. 1—4. 1895.

— Université libre de Bruxelles. Rapport sur l'année académique 1892—93 (1894).

— Institut international de Bibliographie. Bulletin. I. Année 1895. No. 1.

Budapest. Acsády, Ignácz, Ket pénzügy-történelmi tanulmány. Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia. 1894.

— Magyar Tudományos Akadémiai Almanach polgári és csillagászati naptárral MDCCCXCIV-re (1894). MDCCCXCV-re (1895).

Budapest. Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Königl. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft redig. v. J. Fröhlich. Bd. XII. 1893—94. 1. 2. Hälfte (1895).

— Araneae Hungaricae secundum collectiones a Leone Becker pro parte perscrutatas conscriptae a Cornelio Chyzer et Ladislao Kulczyński. Edit. Academ. Scient. Hungar. T. I. 1891. T. II. pars I. 1894.

— Értekezések a mathematikai tudományok köreböl. Kiadja a Magyar Tudomán. Akadém. XV. Kötet szám 4. 5. 1894.

— Értekezések a Magyar Tudomán. Akadém. nyelv-és széptudományi osztálya köreböl. Kötet XVI. szám 4. 5. 1894.

— Értekezések a társadalmi tudományok köreböl. Kiadja a Magyar Tudom. Akadém. Kötet XI. szám 7—10. 1894—95.

— Értekezések a természettudományok köreböl. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet XXIII. szam 3—12. 1894—95.

— Értekezések a történelmi tudományok köreböl. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet XVI. szam 2—5. 1893—95.

— Archaeologiai Értesitö. A Magyar Tudom. Akad. arch. bizottságának es, az orsz. régészeti s. emb. társulatnak közlönye, szerkeszti Hampel József. Uj folyam Kötet XIII. szam 3—5. 1893. Kötet XIV. szam 1—5. 1894. Kötet XV. szam 1—3. 1895.

— Mathematikai és természettudományi Értesitö. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet XI. füz. 6—9. 1893. Kötet XII. füz 1—12. 1893—94. Kötet XIII. füz. 1. 2. 1895.

— A régibb középkor (IV—X. század) emlékei magyarhonban. Irta Hampel József. Kiadja a May. Tud. Akad. Rész I. 1894.

— Király, János, Pozsony varos joga a közép korban. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. 1894.

— Beresényi Házassága. Történeti ének 1695-böl. A Varsóban levö eredeti kéziratról közli Thaly Kálmán. Foldalek: „Actio curiosa". Magyar történeti szinjáték 1878-ból. A „Flor"-alapitványból kiadja a M. Tud. Akadémia bizottsága Köszeghy Pál. 1894.

— Archaeologiai Közlemények hazai müemlékek ismeretének elömozditására. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet XVII (= Uj folyam. Kötet XIV) 1895.

— Mathematikai és természettudományi Közlemények vonatkozólag a hazai viszonyokra. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet XXV. szam. 4. 5. 1893. Kötet XXVI. szam 1. 2. 1894.

Budapest. Nyelvtudományi Közlemények kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet XXIII. füz. 3. 4. 1893. Kötet XXIV. füz. 1—4. 1894. Kötet XXV. füz. 1. 2. 1895.

— Hunyadiok Kora Magyarországon. A Magyar Tud. Akad. történelmi bizottságának megbizásából szerkeszti Csánki Dezsö. Kötet VII. Magyarország történelmi földrajza a Hunyadiak korában. Irta Csánki Dezsö. Kötet II. 1894.

— Mátyás Király levelei. A Magyar Tudom. Akad. történelmi bizottságának gegbizásából közzéteszi Fraknói Vilmos. Külügyi osztály. Kötet I. 1458—1479. 1893.

— Szent Simon ezüstkoporsója Zarában. A Magyar Tudom. Akad. archaeol. bizottsága megbizásából irta Dr. Meyer Gotthold Alfred. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. 1894.

— Monumenta Hungariae historica. Magyar történelmi Emlékek kiadja a Magyar Tudom. Akad. történelmi bizottsága I. Osztály. Monumenta comitialia regni Transsylvanicae. Kötet XVI. (1675—1679) 1893. Kötet XVII. (1679—1682) 1894. — II. Osztály. Irók. Kötet XXXIII. 1894.

— Lexicon linguae Votjacicae. A Votják nyelv Szótára irta Munkácsi Bernat. Füzet III. (Bogen 21—30.) 1893.

— A Magyar Tudom. Akad. történelmi bizottságának Oklevelmásolotai ismerteti Óváry Lipót. Füz. II. 1894.

— Ungarische Revue. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. XIV. H. 9—10. 1894. Jahrg. XV. H. 1—7. 1895.

— A Magyar határozók. A Magyar Tud. Akadémiától Lukács Krisztina — féle Jutalommal kitüntetett pályamunka. Irta Simonyi Zsigmond. Kötet II. Fele II. 1895.

— Magyarorszagi Tanulók Kulfödön. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Irodalomtörténeti Bizottsága. III. Regestrum Bursae Hungarorum Cracoviensis. A Krakói Magyar Tanulók-Háza Lakóinak jegyzéke (1493—1558). Az eredeti kéziratból közli és Magyarázza Dr. Schrauf Károly. 1893.

— Téglas, Gabor, Ujabb adalékok az Aldunai zuhatagok sziklafeliratahoz s az Aldunai határvédelem viszonya Dacia történetéhez egészen Traianus felléptéig. (Felvastatott a Magyar Tudom. Akad. II. Osztályának 1893.) Kiadja a Magyar Tudom. Akad. 1894.

— Nyelvemlékeink a könyvnyomtatás koraig. A Magyar Tudom. Akad. megbizásából irta Zolnai Gyula. 1894.

Budapest. Jahresbericht der Königl. Ungarischen Geologischen Anstalt für 1892 (1894).

— Földtani Közlöny. Geologische Mittheilungen. Zeitschrift der Ungar. Geolog. Gesellschaft. Zugleich amtliches Organ der Königl. Ung. Geolog. Anstalt. Kötet XXIV. füz. 11—12. 1894. Kötet XXV. füz. 1—5. 1895.

— Mittheilungen aus dem Jahrbuche der Königl. Ungar. Geolog. Anstalt. Bd. IX. H. 7. 1895.

Buenos Aires. Anales de la Oficina meteorológica Argentina per su director G. G. Davis. T. IX. P. 1. 2. 1893/94.

— Anales de la Sociedad Científica Argentina. T. XXXVIII. 1894. T. XXXIX. 1895. T. XL. Entr. 1—3. 1895.

— Anuario estadistico de la ciudad de B. A. Año IV. 1894 (1895).

Buffalo. Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. V. No. 4. 1894.

Bukarest. Academia Română: Kalinderu, J., Episcopulu Melchisedec. Discursŭ de Recepţiune. 25. Martie 1894. — Ollanescu, D. C., Vasile Alecsandri. Discursu . . . 25. Mart. 1894. Naum, A., Cuvîntŭ de Primire. Rostitŭ in şedinta solemna dela 2 (14) Aprile 1894. — Xenopol, A. D., Michail Kogălniceanu. Discurs de Recepţiune. 17. Martie 1895. — Babes, V., Despre transmitera proprietătilor immunisante prin sângele animalelor immunisate. Discurs de Recepţ. 24. Martie 1895.

— Analele Academiei Romane. Partea administrativă şi desbaterile. Ser. II. T. XV. 1892—93 (1893). T. XVI. 1893—94 (1894). Memoriile secţiunei literare. Ser. II. T. XIV. 1891—92 (1893). T. XV. 1892—93 (1893). — Memoriile secţiunei scienţifica. Ser. II. T. XIV. 1892—93 (1893).

— Basmele Române in comparţiune cu legendele antice clasice şi in legătură cu Basmele popórelorŭ invecinate şi ale tuturorŭ popórelorŭ Romanice. Studiu comparativŭ de Lazăr Şăinénu. Opera premiată şi tipărită de Academia Româna. 1895.

Calcutta. Bibliotheca Indica: a Collection of Oriental Works publ. by the Asiatic Society of Bengal. N. S. No. 847—859. 1894 und 1895.

Cambridge. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. VIII. p. 4. 5. 1895.

— Annual Report of the Library Syndicate. XLI. for 1894 (1895).

Cambridge, Mass. Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XXV. No. 11—12. 1894—95. Vol. XXVI. 1895. Vol. XXVII. 1895. Vol. XXVIII. No. 1. 1895.

Cambridge, Mass. Memoirs of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XVII, 3. 1894. Vol. XVIII. 1895.

— Annual Report of the Curator of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College to the president and fellows of Harvard College for 1893—94 (1894).

Cassel. Abhandlungen und Bericht des Vereins für Naturkunde zu C. XL. 1894/95 (1895).

— Mittheilungen an die Mitglieder des Vereins für hessische Geschichte und Landeskunde. Jahrg. 1893 (1894).

— Zeitschrift des Vereins für hessische Geschichte und Landeskunde. N. F. XIX. Bd. 1894.

Charkow. Annales de l'Université Impér. de Ch. Записки императорскаго Харковскаго Университета. 1894, 4. 1895, 1—3.

— Tikhomandritzky, Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques. 1895. М. Тихомандрицкій, Теорія эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій. Приложеніе къ Запискахъ Харковскаго Университета. 1895 г. Харковъ 1895.

Charlottenburg. Wissenschaftliche Abhandlungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Bd. II. Berlin 1895.

— Die Thätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in der Zeit vom 1. März 1894 bis 1. April 1895. (S.-A. a. d. Zeitschrift f. Instrumentenk. H. 8 und 9.) Berlin 1895.

— Mittheilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Abth. I. (1.) Herstellung und Untersuchung der Quecksilber-Normal-Thermometer. (S.-A. aus d. Zeitschrift f. Instrumentenkunde. 1895. H. 1—4.) Berlin 1895.

Chemnitz. Deutsches meteorologisches Jahrbuch. 1894 = Jahrbuch d. Sächsischen Meteorol. Instituts. Jahrg. XII. 1894. I.

— Das Klima des Königreiches Sachsen. Amtliche Publication des Königl. Sächsischen Meteorol. Institutes durch den Direktor Prof. Dr. Paul Schreiber. III. H. 1895.

— Mittheilungen des Vereins für Chemnitzer Geschichte. VIII = Jahrbuch des Vereins f. 1891—94 (1895).

Chicago. The Open Court. A weekly journal devoted to the religion of science. No. 380—432 = Vol. VIII. No. 49—52. 1894. Vol. IX. No. 1—49. 1895 [The Open Court Publishing Co.].

— The Monist. A quarterly magazine. Vol. V. No. 2—4. 1895. Vol. VI. No. 1. 1895.

Christiania. Publication der Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung. — Astronomische Beobachtungen und Vergleichung der astronomischen und geodätischen Resultate. 1895.

— Die Norweg. Comm. d. Europ. Gradm. - Resultate der im Sommer 1894 in dem südlichsten Theile Norwegens ausgeführten Pendelbeobachtungen von O. E. Schiötz. 1895.

— Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania 1893. N. 1—21 (1893).

— Oversigt over Videnskabs-Selskabets Møder i 1893 (1894).

Chur. Jahresbericht der Historisch - Antiquarischen Gesellschaft von Graubünden. 24. Jahrg. 1894.

— Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Bd. XXXVIII. 1894/95 (1895). Beilage zu Bd. 38: Lorenz: Die Ergebnisse der sanitarischen Untersuchungen der Rekruten des Kantons Graubünden '(Schweiz)' in den Jahren 1875—1879. Bern 1895.

Cordoba. Boletin de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba. T. XIV. Entr. 1. 2. Buenos Aires 1894—95.

Danzig. Abhandlungen zur Landeskunde der Provinz Westpreußen. Hrsg. von der Provinzial - Kommission zur Verwaltung der Westpreußischen Provinzial-Museen. IX. H. 1895.

Dorpat. Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen der kaiserlichen livländischen gemeinnützigen und ökonomischen Sozietät für das Jahr 1892 (1893), 1893 (1894), 1894 (1895).

Dresden. Neues Archiv f. Sächsische Geschichte und Altertumskunde. Bd. XVI 1895.

— Jahresbericht des Königlich Sächs. Alterthums - Vereins über das 70. Vereinsjahr 1894/95 (1885).

— Dresdener Geschichtsblätter. Hrsg. v. Verein für Geschichte Dresdens. Jahrg. IV. 1895.

Dublin. Proceedings of the Royal Irish Academy. Ser. III. Vol. III No. 3. 1894.

— Royal Irish Academy. Cunningham Memoirs. No. X. 1894.

— Hermathena. A Series of papers on litterature, science and philosophy, by members of Trinity College. No. XXI. 1895.

Düsseldorf. Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichts-Vereins. Bd. IX. 1895.

— Jost, W., Die Schnitzwerke am Marstall des Jägerhofes zu Düsseldorf. Hrsg. vom Düsseldorfer Geschichts-Verein zum 14. August 1895.

Edinburgh. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. Vol. XIII. 1894—95.

Eichstädt. Sammelblatt des Historischen Vereins Eichstädt. Jahrgang IX. 1894 (1895).

Eisenberg. Mitteilungen des Geschichts- und Altertumsforschenden Vereins zu Eisenberg. H. X 1895.

Elberfeld. Zeitschrift des Bergischen Geschichtsvereins. Bd. XXX. N. F. XX. 1894.

Emden. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft in E. LXXIX 1893/94 (1895).

Erfurt. Jahrbücher der Königl. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu E. N. F. Heft XXI. 1895.

— Mitteilungen des Vereins für die Geschichte und Altertumskunde von E. H. XIII 1887. H. XIV 1890. H. XV 1892. H. XVI 1894.

— Oergel, G.: Das Collegium majus zu Erfurt. 1894.

Erlangen. Sitzungsberichte der Physikalisch-Medicinischen Societät in E. Heft XXVI. München 1894.

Florenz. Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1894 No. 216. 1895 No. 217—239.

Frankfurt a. M. Jahresbericht des Physikalischen Vereines zu Fr. a. M. für 1893/94 (1895).

Frauenfeld. Thurgauische Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. vom Histor. Vereine des Kantons Thurgau. H. XXXIV 1894.

Freiburg i. B. Freiburger Diöcesan-Archiv. Organ des kirchlich-historischen Vereins für Geschichte, Alterthumskunde und christliche Kunst der Erzdiöcese Freiburg. XXIV. Bd. 1895.

Genf. Bulletin de la Société d'Histoire et d'Archéologie de Genève. T. I. livr. 4. 1894.

— Mémoires et documents publ. par la Société d'Histoire et d'Archéologie de Genève. Sér. II. T. III, 4. 1894.

— Favre, Ed.: Les études orientales à la Société d'Hist. et d'Archéol. de Genève 1838—1894. 1894.

Genf. Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève. T. XXXII. p. 1 1894/95.

Giessen. Mitteilungen des Oberhessischen Geschichtsvereins. N. F. V. Bd. 1894.

— Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. XXX. 1895.

Glarus. Jahrbuch des Historischen Vereins des Kantons Glarus. Heft XXXI 1896.

Görlitz. Neues Lausitzisches Magazin. Bd. LXXI. 1895.

Göttingen. Astronomische Mittheilungen von der Königlichen Sternwarte zu G. IV. Th. 1895.

Granville, Ohio. Bulletin of the Scientific Laboratories of Denison University. Vol. VIII. P. I. II. 1893/94.

's Gravenhage. Bijdragen tot de taal- land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië uitgeg. door het Koninkl. Instituut voor de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. Volgreeks VI. Deel I. Afl. 1—4. 1895.

— Gronemann, J., De Garĕbĕg's te Ngajogyåkartå. Met Photogrammen van Cephas. Uitgeg. door het Koninkl. Instituut . . . 1895.

Graz. Mittheilungen des Historischen Vereines für Steiermark. Heft XLIII. 1895.

— Mittheilungen des Naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark. Heft XXXI. Jahrg. 1894 (1895).

Greifswald. Pommersche Genealogien. Bd. V. 1896. Vereinsschrift der Rügisch-Pommerschen Abtheilung der Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Landeskunde.

— Mittheilungen aus dem Naturwissenschaftlichen Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald. Jahrg. XXVI. 1894. Berlin 1895.

Guatemala. Censo general de la población de la República de Guatemala. Dirección general de Estadística. 1893, 26. Febr. 1894.

Haarlem. Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. IV. p. 3. 1894. p. 4 1895.

— Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. N. S. Deel XV. 1895.

Haarlem. Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles publ. par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem. T. XXVIII livr. 5. 1895. T. XXIX. livr. 1—3. 1895.

Halle. Leopoldina. Amtliches Organ der Kaiserl. Leopoldino-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XXX 21—24. 1894. Heft XXXI 1—22. 1895.

— Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Bd. XLVIII H. 4. Leipzig 1894. Bd. XLIX H. 1—3. Ebend. 1895.

— Das zweihundertjährige Jubiläum der Universität Halle-Wittenberg. Festbericht erstattet im Auftrage des academischen Senates von dem Prorector Prof. Dr. W. Beyschlag. Halle 1895.

— Berichte aus dem physiologischen Laboratorium und der Versuchsstation des landwirthschaftlichen Instituts der Universität Halle. 11. Heft 1894.

— Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu H. [von 1881 ab: Zugleich Organ des Thüringisch-Sächsischen Gesamtvereins für Erdkunde.] 1877—1895.

— Zeitschrift für Naturwissenschaften. I. A. des Naturwissenschaftlichen Vereines für Sachsen und Thüringen hrsg. von O. Lüdecke. V. Folge. Bd. V (= 67) H. 5. 6. Leipzig 1894. Bd. VI (= 68) H. 1/2. Ebend. 1895.

Hamburg. Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. III. H. 5. 1895.

— Mittheilungen des Vereins für Hamburgische Geschichte. 16. Jahrg. 1894.

— Verhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Hamburg. III. Folge. Bd. II. 1894 (1895).

— Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, hrsg. vom Naturwissenschaftlichen Verein in Hamburg. 13. Bd. 1895.

— Verhandlungen des Vereins für naturwissenschaftliche Unterhaltung zu H. VII. Bd. 1886—90 (1891). VIII. Bd. 1891—93 (1894).

Hanau. Bericht der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde zu Hanau von 1. Dezember 1892 bis 30. April 1895 (1895).

Heidelberg. Neue Heidelberger Jahrbücher hrsg. vom Historisch-Philosophischen Verein zu Heidelberg. Jahrg. V. 1895.

— Verhandlungen des Naturhistorisch-Medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. V. Heft 3. 1894.

Helsingfors. Acta Societatis Scientiarum Fennicae. T. XX. 1895.

— Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk. Utgifna af Finska Vetenskaps-Societeten. H. LIV. LV. LVI. 1894—95.

— Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XXXVI. 1893/94 (1894).

— Finlands geologiska Undersökning. Beskrifning till Kartbladen No. 25. 26. [Text u. Karten] 1894.

— Observations météorologiques publiées par la Société des Sciences de Finlande. Année 1889—90. Kuopio 1895.

— Observations publiées par l'Institut Météorologique Central de la Société des Sciences de Finlande. Vol. XII. livr. 1. Observations en 1893 (1894).

Hermannstadt. Jahresbericht des Vereines für siebenbürgische Landeskunde für 1894/95 (1895).

— Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. N. F. Bd. XXVI. H. 3. 1895.

Kasan. Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kasan. Sér. II. T. IV. No. 3. 4. 1894/95. T. V. No. 1. 2. 1895.

Kempten. Allgäuer Geschichtsfreund. Zwanglose Mittheilungen hrsg. vom Allgäuer Alterthums-Verein. Jahrg. VII. 1894.

Kiel. Zeitschrift der Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte. Bd. XXIV. 1894.

— Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen hrsg. von der Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. N. F. I. Bd. I. Heft. Kiel und Leipzig 1894.

— Schriften des Naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. X. Bd. 2. Heft. 1895.

Kiew. Записки Кіевскаго Общества естествоиспытателей. Томъ XII. Выпускъ 1. 2. 1892. T. XIII. Вып. 1. 2. 1894. T. XIV. Вып. 1. 2. 1895.

Klausenburg. Értesitö az Erdélyi Muzeum-egylet orvos-természettudományi szakosztályából. Évfolyam 19, I. füz. 1. 2. 1894. II. füz. 3. 1894. Évf. 20, I. füz. 1. 1895. II. füz. 1. 2. 1895.

Königsberg i. Pr. Sitzungsberichte der Altertumsgesellschaft Prussia. Heft XIX für 1893/95 (1895).

— Schriften der Physikalisch-Oekonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Jahrg. XXXV. 1894 (1895).

Kopenhagen. Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder. i Aaret 1894 No. 3. 1895 No. 1. 2.

— Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Histor. og philos. Afdeling. VI. Række. Bd. 4. H. 2. 1895. Naturvidensk. og math. Afdeling. VI. Række. Bd. 7. H. 10. 1894. Bd. 8. H. 1. 1895.

Krakau. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1894. No. 9—10. 1895. No. 1—8.

— Acta rectoralia almae Universitatis studii Cracoviensis inde ab a. 1469. T. I. fasc. 3. 1894.

— Archiwum do dziejów literatury i oswiaty w Polsce wydawane przez Komisyę do badań tego zakresu przez Wydział filologiczny Akadem. Umiejętn. w Krakowie powołaną. T. VIII. 1895.

— Collectanea ex archivo collegii historici. Archiwum Komisyi historycznej. T. VII. 1894.

— Corpus antiquissimorum poetarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium. Vol. IV. Nicolai Hussoviani carmina continens. Cracoviae, sumptibus Academiae litt. Cracov. 1894.

— Wydawnictwo Komisyi fizyograficznej Akadem. Umiejętn. Atlas geologiczny Galicyi. Zcęść. III. Tekst i Kart. 1894.

— Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia. Pomniki dziejowe wieków średnich do objaśnienia rzeczy polskich służące. T. XIV. Codicis epistolaris saeculi XV. T. III. 1392—1501. 1894.

— Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie. Wydział matemat.-przyrodn. T. XVIII. 3. 1894.

— Rocznik zarządu Akademii Umiejętności w Krakowie. Rok 1893/94 (1894).

— Rosprawy Akademii Umiejętności. Wydział filol. Ser. II. T. V. VI. VIII. 1894. — Wydział histor.-filozof. Ser. II. T. V. 1894. T. VI. 1895. — Wydział mat.-przyrod. Ser. II. T. VII. 1895.

— Editionum Collegii historici Academiae litter. Cracoviensis. No. 53. Scriptores rerum Polonicarum. T. XV. Analecta Romana. 1894.

Krakau. Sprawozdania Komisyi językowéj Akademii Umiejętności. T. V. 1894.
— Sprawozdanie Komisyi Fiziograficznej obejmujące pogląd na czynności dokonane w ciągu roku. T. XXIX. 1894.
— Biblioteka pisarzów polskich. T. XXIX. 1894. T. XXX. 1895.
— Zbiór wiadomości do antropologii krajowej wydawany staraniem Komisyi Antropologicznej Akademii Umiejętności w Krakowie. T. XVIII. 1895.
— Finkel, L., Bibliografia historyi Polskiej. Współnie z Henrykiem Sawczyńskiem i członkami Kółka histor. ucznego Universytetu lwow. Część II. Zeszyt I. 1895.
Laibach. Izvestja muzejskega društva z Kranjsko. Letnik 4. Seš. 1—6. 1894.
— Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. VII. 1. 2. 1894.
Landshut. Verhandlungen des Historischen Vereins für Niederbayern. Bd. XXXI. 1895.
Lausanne. Catalogue des étudiants de l'Université de Lausanne. Année univers. 1894/95. Sémestre d'hiver. No. 9. (1894).
Leiden. Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. 1893/94 (1894).
— Tijdschrift voor nederlandsche taal- en letterkunde uitg. vanwege de Maatschappij der Nederl. Letterkunde te Leiden. Deel XIV. (= N. Reeks VI) Afl. 1—4. 1895.

— Flora Batava. Afbeelding en beschrijving van Nederlandsche Gewassen. Aangevangen door Jan Kops voortgezet door F. W. van Eeden. Afl. 307—310.
Leipzig. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 29. Jahrg. H. 3. 4. 1894/95. 30. Jahrg. H. 1—3. 1895.
— Catalog der Astronomischen Gesellschaft. I. Abth. 10. Stück. 1895.

— Abhandlungen der philolog.-histor. Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. XV No. 2—4. 1895.
— Abhandlungen der mathemat. phys. Classe. Bd. XXI. No. 3—6. 1895. Bd. XXII. No. 1—5. 1895.
— Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philolog.-histor. Cl. 1894. Heft II. 1895. Heft I. II. Mathemat.-phys. Cl. 1894. Heft II—III. 1895. Heft I—IV.

Leipzig. Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu L. 19.—21. Jahrg. 1892/1894 (1895).

Lincoln. Publications of the Nebraska Academy of Sciences. IV. Proceedings 1893 (1894).

— University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. No. 43. Art. 2. 1895. — Press Bulletin No. 6. Sept. 1895.

— University Studies. Publ. by the University of Nebraska. Vol. I. No. 1—3. 1893. Vol. II. No. 1. 1894.

Liverpool. Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. IX. Sess. 1894—95 (1895).

London. Proceedings of the Royal Society of London. Vol. LVII. No. 340—346. Vol. LVIII. No. 347—352. 1895.

— Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. CLXXXV. for 1894. A. B. 1895. — Fellows of the R. S. 1894.

— Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, containing papers, abstracts of papers, and reports of the proceedings of the Society. Vol. LV. No. 2—9. 1894/95. Vol. LVI. No. 1. 1895.

— The Journal of the Linnean Society. Botany: Vol. XXX. No. 207—210. 1894. — Zoology: Vol. XXV. No. 158—160. 1894.

— Proceedings of the Linnean Society of London. Session from Nov. 1893 to June 1894 (1895).

— List of the Linnean Society 1894/95 (1894).

— Transactions of the Linnean Society of London. Botany: Vol. IV. p. 2. 1894. Vol. V. p. 1. 1895. — Zoology: Vol. VI. p. 3. 1894.

— Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. XXV. No. 495—499. 1894. Vol. XXVI. No. 500—527. 1894/95.

— List of members of the L. M. S. 8th Nov. 1894. 31. Sess. 1894—95 (1894).

— Journal of the Royal Microscopical Society. for 1894. p. 6., for 1895. p. 1. 4. 5.

— Proceedings of the Physical Society of London. Vol. XIII. P. 2—12. (No. 52—62.) 1895.

— List of officers and members of the Phys. S. April 2. 1895.

London. Proceedings of the general meeting for scientific business of the Zoological Society of London. 1894. p. 4. 1895 p. 1. 2.
— Transactions of the Zoological Society of London. Vol. XIII. p. 10. 1895.
Lübeck. Mittheilungen des Vereins für Lübeckische Geschichte und Alterthumskunde. 6. Heft. No. 1—10. 1893—94.
— Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte u. Alterthumskunde. 7. Bd. Heft 1. 2. 1894—95.
— Bericht des Vereins über d. J. 1892 (1893).
Lüttich. Annales de la Société Géologique de Belgique. T. XXI. livr. 3. 1893—94. T. XXII. livr. 1. 2. 1894/95.

— Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège. II. Sér. T. XVIII. Bruxelles 1895.
Lund. Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Arsskrift. T. XXX. Afd. 1. 2. 1893—94.
— Sveriges offentliga bibliotek. Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. — Utgifven af Kongl. Biblioteket genom E. W. Dahlgren. IX. Stockholm 1894.
Luxemburg. Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles et mathematiques. T. XXIII. 1894.
— Publications de la Section historique de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg (ci-devant „Société archéologique du Grand-Duché"). Vol. XLII. P. 2. 1895. Vol. XLIII. P. 1. 1895. Vol. XLIV. 1895.

— Ons Hémecht. Organ des Vereines für Luxemburger Geschichte, Litteratur und Kunst. Jahrg. I. 1895. No. 3.
Luzern. Der Geschichtsfreund. Mittheilungen des Historischen Vereins der fünf Orte Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden und Zug. Bd. L. Stans 1895.
Lyon. Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon. Sciences et Lettres. III. Sér. T. II. 1893.
— Collection de Documents inédits pour servir à l'histoire du Lyonnais publ. par l'Académie des Sciences . . . I. Cartulaire Lyonnais publ. par M. C. Guigue. T. II. 1893.

— Annales de la Société d'Agriculture, Histoire naturelle et Arts utiles de Lyon. Sér. VII. T. I. 1893 (1894).

Lyon. Annales de la Société Linnéenne de Lyon. N. S. Tome XXXVIII—XL. Lyon-Paris 1891—1893.

Madison, Wisc. Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. VII. Part II. 1894.

Madras. Madras Government Museum. Bulletin No. 3. 1895.

Madrid. Memorias de la Real Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid. T. XVI. 1895.

Mailand. Atti della fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi. Vol. XII. 1893—94 (1894). Vol. XIII. 1894—95 (1895).

— Memorie del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze mor. e stor. Vol. XIX. (Ser. III, 10). fasc. 2. 1894. Vol. XX. (Ser. III, 11). fasc. 1. 1895. Classe di scienze matem. e natur. Vol. XVII. fasc. 3. 4. 1894.

— Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Vol. XXVI. 1893. Vol. XXVII. 1894. — Indice generale dei lavori della fondazione all'anno 1888 per autori e per materie. 1891.

Manchester. Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. Ser. IV. Vol. VIII. No. 4. 1894. Vol. IX. No. 1–6. 1894–95.

Mannheim. Alterthumsverein Mannheim. Griechische Musik und die Apollo Hymne von Delphi von Felix Bassermann. 1894.

— Katalog der Bibliothek des Mannheimer Alterthums-Vereins. Aufgestellt von W. Caspari. 1894.

— Studien zur Geschichte der bildenden Künste in Mannheim im 18. Jahrhundert von L. Mathy mit Skizzen von Architekt Th. Walch. Vereinsgabe des Mannheimer Alterthumsvereins. I. Th. Architektur und Sculptur. 1894.

Marseille. Annales de la Faculté des Sciences de Marseille publiées sous les auspices de la municipalité. Tom. III. Supplém. 1894. T. IV. fasc. 1—3. 1895.

— Annales de l'Institut botanico-géologique colonial de Marseille publ. sous la direction de Prof. Ed. Heckel. I. Sér. I. Année. Vol. I. Paris 1893.

Meiningen. Schriften des Vereins für Meiningische Geschichte und Landeskunde. Heft XVII—XIX. 1895.

Meissen. Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Meißen. Bd. III. Heft 4. 1894. Bd. IV. Heft 1. 1895.

Melbourne. Proceedings of the Royal Society of Victoria. Vol. VII. 1895.

Melbourne. Annual Report of the Secretary for Mines to . . . Minister of Mines for Victoria, including Reports on the working of part III of Mines Act 1890 . . . during the year 1894.

Metz. Jahr-Buch der Gesellschaft für lothringische Geschichte und Altertumskunde. Jahrg. VI. 1894.

Minneapolis, Minnes. Geological and Natural History Survey of Minnesota. Report of the State Zoologist. 1. June 1892.

Mölln i. Lbg. Vaterländisches Archiv für das Herzogthum Lauenburg. N. F. Bd. VII. (= Archiv des Vereins f. d. Geschichte des Herzogthums Lauenburg. Bd. IV) Heft 3. 1895.

Montpellier. Académie des Sciences et Lettres de Montpellier. Mémoires de la Section de Médecine. II. Sér. T. I. No. 1. 1893. — Mémoires de la Section des Lettres. II. Sér. T. I. No. 1—3. 1893. — Mémoires de la Section des Sciences. II. Sér. T. I. No. 1. 2. 1893.

Moskau. Математическій сборникъ. Recueil mathématique publié par la Société Mathématique de Moscou. T. XVII. No. 4. 1895. T. XVIII. No. 1—3. 1896.

— Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou. Nouv. Sér. Année VIII. 1894. No. 3. 4. Année IX. 1895. No. 1. 2.

Mount Hamilton. Publications of the Lick Observatory of the University of California. Vol. III. Sacramento 1894.

München. Abhandlungen der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Histor. Classe. Bd. XXI. Abth. 1. 1895. — Mathem.-physikal. Classe. Bd. XVIII. Abth. 3. 1895.

— Sitzungsberichte der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München. Philos.-philol. und histor. Classe 1894. Heft. 3. Math.-physik. Classe 1894. Heft 4. 1895. Heft 1. 2.

— Lossen, M., Die Lehre vom Tyrannenmord in der christlichen Zeit. Festrede gehalten in der k. b. Akadem. d. Wiss. zu München zur Feier ihres 135. Stiftungstages am 28. März 1894.

— Sohncke, L., Ueber die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten. Festrede gehalten . . . am 15. Nov. 1894.

— Monatsschrift des Historischen Vereines von Oberbayern. Jahrgang III. No. 12. 1894. Jahrg. IV. No. 1—10. 1895.

Neapel. Atti della Reale Accademia di scienze morali e politiche. Vol. XXVII. 1894—95 (1895).

— Atti della Reale Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Vol. VII. 1895.

Neapel. Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Ser. II. Vol. VIII. fasc. 11—12. 1894. Ser. III. Vol. I. fasc. 1—11. 1895.

— Rendiconto delle tornate e dei lavori dell'Accademia di scienze morali e politiche. Anno 33. 1894.

Neuburg a. D. Neuburger Kollektaneen-Blatt für die Geschichte Bayerns, insbesondere des ehemaligen Herzogtums Neuburg, hrsg. von dem Historischen Verein Neuburg a. D. LVII. Jahrg. 1893. LVIII. Jahrg. 1894.

New Haven, Connect. Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. Vol. IX, 2. 1895.

— Obituary Record of Graduates of Yale University. Deceased during the academical year ending in June 1895.

— Report for the year 1894/95 presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University to the president and fellows. 1895.

New York. Journal of the American Geographical Society of New York. Vol. XXVI. No. 4. 1894. Vol. XXVII. No. 1—3. 1895.

— Bulletin of the American Mathematical Society. Ser. II. Vol. I. No. 3—9. 1894—95.

Nürnberg. Abhandlungen der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. X. Heft 3. 1895 (darin

— Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg für 1894).

— Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1894.

— Katalog der im Germanischen Museum vorhandenen zum Abdrucke bestimmten geschnittenen Holzstöcke vom XV.—XVIII. Jahrhundert. II. Theil. XVII. und XVIII. Jahrh. 1894.

— Mittheilungen aus dem Germanischen Nationalmuseum. Jahrgang 1894.

— Jahresbericht des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg. XVII. Vereinsjahr. 1894 (1895).

— Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg. Heft XI. 1895.

Odessa. Записки Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. T. XIX. 1. 2. 1894—95.

Osnabrück. Mittheilungen des Vereins für Geschichte und Landeskunde von Osnabrück. Bd. XIX. 1894.

— Jahresbericht des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Osnabrück. X. für die Jahre 1893 und 1894 (1895).

Ottawa, Can. Geological Survey of Canada. Annual Report. New series. Vol. VI. 1892—93 (1895). . . . Sheet No. 11. Nova Scotia und Maps No. 364—72, 379—390, 550—551. — Palaeozoic Fossils by J. F. Whiteaves. Vol. III. Part II. 1895.

Padua. Annuario della R. Università degli studî di Padova 1894—95 (1895).

Palermo. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. VIII. fasc. 6. 1894. T. IX. fasc. 1—6. 1895.

Pará, Brazil. Boletim do Museu Paraense de historia natural et ethnographia. Vol. I. No. 1. Setembro 1894. No. 2. Abril 1895.

Paris. Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures publ. sous l'autorité du Comité intern. par le directeur du Bureau. T. VIII. 1893. T. X. 1894.

— Journal de l'École polytechnique publ. par le Conseil d'Instruction de cet établissement. LXIII—LXIV. Cahier. 1893—94.

— Ministère de l'Instruction publique. Annales du Musée Guimet (Ser. in 4°) T. XXV. 1894. T. XXVI, 1. 1894. — (Ser. in 8°) Bibliothèque d'Études. T. IV. 1894.

— Annales du Musée Guimet. Revue de l'histoire des religions publ. sous la direction de J. Réville. Année XIV. 1893. T. XXVIII. Année XV. 1894. T. XXIX. XXX. Année XVI. 1895. T. XXXI. No. 1.

— Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XXII. No. 9—10. 1894. T. XXIII. No. 1—8. 1895.

Pavia. Annuario della Reale Università di Pavia. Anno scol. 1894/95.

Philadelphia. Annals of the American Academy of Political and Social Science. Vol. V. No. 4—6. 1895. Vol. VI. No. 1—3. 1895.

— Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. 1894. p. 2—3. (1895). 1895. p. 1.

Philadelphia. Proceedings of the American Pharmaceutical Association. Vol. XLII. 1894.

— Alumni Report. Publ. by the Alumni Association of the Philadelphia College of Pharmacy. Vol. XXXI. No. 9. June 1895. Vol. XXXIII. No. 1—3. October—Dec. 1895.

— Proceedings of the American Philosophical Society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. Vol. XXXIII. No. 146. 1895. Vol. XXXIV. No. 147. 1895.
— Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. New Ser. Vol. XVIII. p. 2. 1895.

— Catalogue of the University of Pennsylvania 1894/95 (1894).
— Contributions from the zoological Laboratory of the University of Pennsylvania. Vol. I. No. 2. 1895.
— Publications of the University of Pennsylvania. — Series in Philology, Literature and Archaelogy. Vol. III. No. 1. 2. 1894.
— Report of the Provost of the University of Pensylvania from October 1892, to June 1894 (1894).
— Translations and Reprints from the original sources of European History. Publ. by the Department of History of the University of Pennsylvania. Vol. I. No. 4—6. 1894. Vol. II. No. 1. 1895.
— University of Pennsylvania. Memorial Volume of the commencement week. Published by the Commencement Week Committee of 1894. Boston 1894.
— Ehrenfeld, Charles Hatch: A Study of the Chemical Behavior of Tungsten and Molybdenum and their Trioxides. Thesis presented to the Faculty of the Department of Philosophy of the University of Pennsylvania. 1894.

Pisa. Annali della Reale Scuola normale superiore di Pisa. Scienze fisiche et matematiche. Vol. VII (XVII). 1895.

— Annuarie della R. Università di Pisa. Per l'anno academ. 1894—95 (1895).

— Atti della Societa Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Processi verbali. Vol. IX. p. 133—242. 1895.

Porto. Annuario da Academia polytechnica do Porto. XVII. Anno. 1893—94 (1894).

Potsdam. Jahresbericht des Direktors des Königl. Geodätischen Instituts. 1894/95. Berlin 1895.

— Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodät. Instituts und Centralbureaus der Internat. Erdmessung. Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. Telegraphische Längenbestimmungen in den Jahren 1890, 1891 u. 1893. Berlin 1895. — Zenitdistanzen zur Bestimmung der Höhenlage der Nordsee-Inseln Helgoland, Neuwerk und Wangeroog, sowie des Leuchtturmes auf Roter Sand über den Festlandspunkten Cuxhaven und Schilling. Berlin 1895.

— Verhandlungen der vom 5. bis 12. Sept. 1894 in Innsbruck abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der Internationalen Erdmessung. Berlin und Neuchâtel 1895.

— Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. X. 1895.

Prag. Jahresbericht der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften für 1894 (1895).

— Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Cl. f. Philosophie, Geschichte und Philologie. Jahrg. 1894 (1895). Math.-naturwiss. Cl. Jahrg. 1894 (1895).

— Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Hrsg. im Auftrage der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen. Bd. II. Prag, Wien, Leipzig 1895.

— Mittheilung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen. No. 3. 4. 1895.

— Rechenschafts-Bericht erstattet vom Vorstande der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen in der Vollversammlung am 15. Dec. 1894 (1895).

— Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens auf dem Gebiete der Wissenschaft, Kunst und Litteratur. Hrsg. v. d. Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen i. J. 1893 (1895).

— Holzner, Eugen, Studien zu Euripides. Gedruckt mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft . . . in Böhmen. Prag, Wien, Leipzig 1895.

Prag. Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag i. J. 1894 (1895).

— Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der K. K. Sternwarte zu Prag. 55. Jahrg. 1895.

— Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. 33. Jahrg. 1895.

— Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft. Im Auftrag des Vereines „Lotos" hrsg. v. Ph. Knoll. N. F. XV. 1895.

Presburg. Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde zu Presburg. N. F. VIII. Heft. 1892/93 (1894).

Regensburg. Verhandlungen des Historischen Vereines von Oberpfalz und Regensburg. Bd. XLVII. (N. F. XXXIX). 1895.

Rom. Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCXCII 1894. Rendiconto dell'adunanza del 9. Giugno 1895.

— Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCXCII 1895. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Anno CCXCI 1894. Ser. V. Vol. III. fasc. 10—12. Anno CCXCII 1895. Ser. V. Vol. IV. Semest. I. fasc. 1—12. Semest. II. fasc. 1—11.

— Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Classe die scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V. Vol. III. fasc. 10—12. 1894. Vol. IV. fasc. 1—10. 1895.

— Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Parte I. Memorie. Anno CCXC 1893. Ser. V. Vol. I. 1894. Parte II. Notizie degli scavi. Anno CCXCI 1894. Vol. II. Novembre—Dec. 1894. Anno CCXCII 1895. Vol. III. Gennaio—Settembre 1895. — Classe di scienze fisiche, matem. e natur. Memoire. Ser. IV. Anno CCLXXXVII 1890. Vol. VII. 1894.

— Ministero di agricoltura, industria e commercie (Direzione generale della Statistica). Statistica delle Biblioteche. Parte I. 1893. Parte II. 1894.

Rostock. Beiträge zur Geschichte der Stadt Rostock. Hrsg. i. A. des Vereins für Rostocks Alterthümer von K. Koppmann. Heft IV. 1895.

San Francisco. Proceedings of the California Academy of Sciences. Ser. II. Vol. IV. p. 1. 2. 1894—95.

— Transactions and Proceedings of the Geographical Society of the Pacific. In Memoriam Thomas Edwards Slevin. Born April 7th 1837. Died November 7th 1894.

St. Louis, Mo. The Transactions of the Academy of Science of St. Louis. Vol. VI. No. 18. 1894. Vol. VII. No. 1—3. 1895.

— Missouri Botanical Garden. VI. annual Report. 1895.

St. Gallen. Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. vom Historischen Verein in St. Gallen. XXV. Heft (= 3. F. V). I. II. 1891—94. XXVI. Heft (= 3. F. VI). I. Halbbd. 1895.

St. Petersburg. Извѣстія Императ. Академіи наукъ. Bulletin de l'Académie Impér. des Sciences de St. Pétersbourg. V. Sér. T. I. No. 1—4. 1894. T. II. No. 1—5. 1895. T. III. No. 1. 1895.

— Mémoires de l'Académie Impér. des Sciences de St. Pétersbourg. T. XLI. No. 6—9. 1893. T. XLII. No. 1—12. 1894.

— Сборникъ отдѣленія русскаго языка и словесности императорской академіи наукъ. Томъ 59. 1894.

— *Βυζαντινὰ χρονικά.* Вузантійскій Временникъ, издаваемый при Императорской Академіи наукъ подъ редакціею В. Т. Васильевскаго и В. І. Регела. Т. I. 1894.

— Извѣстія Императорскаго Рускаго географическаго Общества. Т. XXX. выпускъ 4—6. 1894. Т. XXXI. вып. 1—4. 1895.

— Отчетъ Императорскаго Русскаго географическаго Общества за 1894 годъ (1895).

Santiago. Actes de la Société Scientifique du Chili fondée par une groupe de Français. T. IV. livr. 4—5. 1894.

— Republica de Chile. Anales de la Universidad. T. LXXXVII —LXXXIX. Entr. 31ª, 32ª, 1894.

Schaffhausen. Neujahrsblatt des Kunstvereins und des Historisch-Antiquarischen Vereines zu Schaffhausen für 1896 (1895).

Siena. Bullettino Senese di storia patria. Anno I. fasc. 3/4. 1894. Anno II. fasc. 1/2. 1895.

Speier. Mitteilungen des Historischen Vereines der Pfalz. XVIII. 1894. XIX. 1895.

Stavanger. Stavanger Museums Aarsberetning for 1893 (1894).

Stockholm. Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar. Bd. XXVI. 1894—95.

— Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens förhandlingar. Årg. 51. 1894 (1895).

— Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium utgifna af Hugo Gyldén. Bd. I—IV. 1880—91. Bd. V. H. 1—4. 1893—95.

— Antiquarisk Tidskrift för Sverige. Utgifven af Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademien. Deel XIII. H. 1. Deel XIV. H. 2. 3. Deel XV. H. 2. Deel XVI. H. 1—3 (o. J.).

Strassburg. Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Litteratur Elsaß-Lothringens hrsg. von dem Historisch-litterarischen Zweigverein des Vogesen-Clubs. Jahrg. XI. 1895.

Stuttgart. Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. N. F. In Verbindung mit dem Verein für Kunst und Altertum in Ulm und Oberschwaben, . . . hrsg. von der Württemberg. Kommission für Landesgeschichte. III. Jahrg. 1894. H. 1—4.

Sydney. Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales. Vol. XXVIII. 1894.

— Annual Report of the Department of Mines and Agriculture, New South Wales for the year 1894 (1895).

— Records of the Geological Survey of New South Wales. Vol. IV. p. 3. 4. 1895.

— Geological Survey of New South Wales. Palaeontological Series. No. 8. Etheridge, Contributions to a catalogue of works . . . on the anthropology . . . of Australian and Tasmanian aborigines. P. III. 1895. No. 9. Woodward, The fossil Fishes of the Talbragor Beds (Jurassic?) . . . 1895.

Tiflis. Наблюденія Тифлисской Обсерваторіи за 1892 годъ издаваемыя И. Мильбергомъ (1894). за 1893 годъ (1895).

Tokio. Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Heft 55—56 (= Bd. VI S. 197—328). II. Suppl. zu Bd. VI. Berlin, Yokahama 1895.

— Imperial University of Japan '(Teikoku Daigaku)'. The Calendar 2554—5 '(1894—95)' (1895).

— The Journal of the College of Science, Imperial University, Japan. Vol. VI. p. 3. 4. 1893—94. Vol. VII. p. 2—5. 1894/95.

— Mittheilungen aus der Medicinischen Fakultät der Kais. Japanischen Universität. Bd. II. No. 2. 1894. Bd. III. No. 1. 1894.

Triest. Atti del Museo civico di storia naturale di Trieste. Vol. IX. (N. S. III.) 1895.

Trondhjem. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1893 (1894).

Turin. Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXX. 1894/95.

— Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1894 all'Osservatorio della R. Università di Torino. 1895.

— Annuario della R. Università degli studi di Torino per l'anno accademico 1894—95 (1895).

— Studi Senesi nel circolo giuridico della R. Università di Torino. Vol. XII. fasc. 1—3. 1895.

Upsala. Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. II. 1894. Part I. No. 3 (1895).

— Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique d'Université d'Upsal. Vol. XXVI. 1894 (1894—95).

— Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. S. III. Vol. XV. fasc. 2. 1895.

— Skrifter utgifna af Humanistiska Vetenskapssamfundet i Upsala. II. Bd. 1892—94.

Utrecht. Onderzoekingen gedaan in het Physiologisch Laboratorium der Utrecht'sche Hoogeschool. Uitg. door Engelmann en Pekelharing. 4. Reeks. Deel III. Afl. 2. 1894.

Washington. Report of the Commissioner of Education for the year 1891—92. Vol. I. p. I. Vol. II. p. II. III. 1894.

— United States of America: Department of Agriculture. Monthly Weather Review. November 1894 (1895).

— Proceedings of the United States National Museum. Publ. under the direction of the Smithsonian Institution. Vol. XVI. 1893 (1894).

— Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution showing the operations . . . of the Institution for the year ending June 30, 1892. — Report of the National Museum (1893).

— Observations made during the year 1889 at the United States Naval Observatory (1893).

Washington. Philosophical Society of Washington. Bulletin. Vol. XIII. p. 31—76. 1895.

— United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin. No. 31—34. 1894—95.

— Report of the Superintendent of the United States Coast and Geodetic Survey showing the progress . . . in the fiscal year ending with June 1892. Part II. 1894.

— United States Geological Survey. Geological Atlas of the United States. Fol. 1—6. 8—12. 1894.

— Bulletin of the United States Geological Survey. No. 97—122. 1893—94.

— Monographs of the United States Geological Survey. Vol. XXI—XXIV. 1893—94.

— Annual Report of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior. XII. 1890/91. p. 1. 2 (1892). XIII. 1891—92. p. 1. 2 (1893). XIV. 1892—63 p. 1. 2 (1893/94).

— United States Geological Survey. Mineral Resources of the United States. 1892 (1893). 1893 (1894).

Wien. Almanach der Kais. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. XLIV. 1894.

— Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-hist. Cl. XLIII. 1894. — Mathem.-naturw. Cl. Bd. LXI (mit Register zu Bd. 4—60). 1894.

— Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-hist. Cl. Bd. CXXX. 1893. Bd. CXXXI. 1894. Register zu Bd. CXXI—CXXX. — Mathemat.-naturw. Cl. Abth. I. Bd. CII. H. 8—10. 1893. Bd. CIII. H. 1—10. 1894. Abth. II^a. Bd. CII. H. 8—10. 1893. Bd. CIII. H. 1—10. 1894. Abth. II^b. Bd. CII. H. 8—10. 1893. Bd. CIII. H. 1—10. 1894. Abth. III. Bd. CII. H. 8—10. 1893. Bd. CIII. H. 1—10. 1894.

— Archiv für österreichische Geschichte. Hrsg. v. der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Commission d. K. Ak. d. W. 81. Bd. 1. 2. Hälfte. 1894—95.

— Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichts-Quellen. Hrsg. v. d. Histor. Commission d. K. Ak. d. W. Abth. II. Diplomata et Acta. XLVII. Bd. II. Hälfte 1894.

— Monumenta Conciliorum generalium saeculi XV. ed. Caesareae Academiae Scientiarum socii delegati. Concilium Basileense. Scriptores. T. III. pars III. 1895.

Wien. Meteorologische Zeitschrift. Hrsg. von der Oesterreich. Gesellschaft f. Meteorologie u. der Deutsch. Meteorolog. Gesellsch. Jahrg. XI. H. 12. 1894. Jahrg. XII. H. 1—11. 1895.

— Astronomische Arbeiten des K. K. Gradmessungs-Bureau. Bd. VI. Längenbestimmungen 1894. — Bestimmung der Polhöhe und des Azimutes auf den Stationen Spieglitzer Schneeberg, Hoher Schneeberg und Wětrnik. Ausgeführt von Professor Dr. Josef Herr. Nach dessen Tode definitiv gerechnet und hrsg. von Wilh. Tinter. 1895.

— Verhandlungen der Oesterreichischen Gradmessungs-Commission. Protokolle über die Sitzungen am 9. April und 24. Juni 1895.

— Verhandlungen d. K. K. Zoologisch-Botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. XLIV, 3. 4. Quart. 1895. Bd. XLV, Heft 1—9. 1895.

— Jahrbuch der K. K. Geologischen Reichsanstalt. Bd. XLIV. Jahrg. 1894. Heft 2—4. Bd. XLV. Jahrg. 1895. Heft 1.

— Verhandlungen der K. K. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1894. No. 10—18. Jahrg. 1895. No. 1—13.

— Blätter des Vereins für Landeskunde von Niederoesterreich. Jahrg. XXVII. 1893 (1893/94). Jahrg. XXVIII. 1894 (1894/95).

— Topographie von Niederösterreich hrsg. v. Verein f. Landeskunde von Niederösterreich. Bd. IV. 1894.

— Urkundenbuch von Nieder-Oesterreich. Hrsg. vom Verein f. Landeskunde von Nieder-Oesterreich. I. Das Urkunden-Buch des aufgehobenen Chorherrenstiftes St. Pölten. II. Bd. Bogen 1—14. 1894/95.

— Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. Bd. XXXV. 1894/95.

Wiesbaden. Annalen des Vereins für Nassauische Altertumskunde und Geschichtsforschung. Bd. XXVII. 1895.

— Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. XLVIII. 1895.

Würzburg. Sitzungsberichte der Physikalisch-Medicinischen Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1894. No. 5—10. Jahrg. 1895. No. 1. 2.

— Verhandlungen der Physikalisch-Medicinischen Gesellschaft zu Würzburg. Bd. XXVIII. No. 2—6. 1894. Bd. XXIX. No. 1—5. 1895.

Würzburg. Archiv des Historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg. Bd. XXXVI. 1893. Ergz.-Heft zu Bd. XXXVI. 1894. 2 Pläne von Würzburg.

— Jahresbericht des Historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg für 1892 (1893), für 1893 (1894).

— Henner, Th., Der Historische Verein von Unterfranken u. Aschaffenburg in seinem 60jährigen Wirken. 1893.

Zürich. Mittheilungen der Antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Bd. XXIII. Heft 7. Leipzig 1895. Bd. XXIV. Heft 1. Ebend. 1895.

— Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. XXXIX. 1894. Heft 3. 4. Jahrg. XL. 1895. Heft 1. 2.

— Astronomische Mittheilungen. Von Dr. Rudolf Wolf. [Aus der Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. in Zürich besonders abgedr.] 85. 86. 1895.

B. Anderweitig eingegangene Schriften.

Acta mathematica. Journal rédigé par G. Mittag-Leffler. Bd. XVIII. Heft 4. Stockholm 1894. Bd. XIX. Heft 1—4. ib. 1895.

Anton y Ferrandiz, M., Razas y Naciones de Europa. Discurso leído en la Universidad central en la solemne inauguración del curso académico de 1895 á 1896. Madrid 1895.

Beilstein, F., Handbuch der organischen Chemie. 3. Auflage. Bd. II. Lief. 18—32 (= Lief. 43—57). Hamburg und Leipzig 1895.

Bodemann, E., Die Leibniz-Handschriften der Königlichen öffentlichen Bibliothek zu Hannover. Hannover und Leipzig 1895.

Bodewig, R., Beiträge zur Lahnsteiner Geschichte. II. Lahnstein in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts. Beil. zum Progr. d. Realprogymn. Ostern 1895. Oberlahnstein 1895.

Cavalcanti de Albuquerque, L. R., Estudos economico-financeiros. A Amazonia em 1893. Rio de Janeiro 1894.

Caylay, Arthur, Collected mathematical papers. Vol. VIII. Cambridge 1895.

Darboux, Gaston, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. IV. fasc. 1. Paris 1895.

Dubois, E., Pithecanthropus erectus. Eine menschenähnliche Uebergangsform aus Java. Batavia 1894.

Zur **Erinnerung** an Prof. Dr. Carl Schmidt. Geb. 1/13. Juni 1822. Gest. $\frac{27. \text{ Febr.}}{11. \text{ März}}$ 1894. Jurjew (Dorpat) 1895.

Fouqué, F., Contribution à l'étude des feldspaths des roches volcaniques. Paris 1894.

Fritsche, H., die magnetischen Localabweichungen bei Moskau und ihre Beziehungen zur dortigen Local-Attraction. [Extrait du Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou. 1893, No. 4.] (Moskau 1893).

— Ueber den Zusammenhang zwischen der erdmagnetischen Horizontalintensität und der Inclination. St. Petersburg 1895.

Hering, C., A., Das Entwickelungsgesetz der Erde und der Erzlagerstätten. Eine Studie. (o. O.) 1895.

Hermann, L. und P. **Volkmann**, Hermann von Helmholtz. Reden gehalten bei der von der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr. veranstalteten Gedächtnißfeier am 7. December 1894. [S.-A. aus Jahrg. XXXV der Schriften der physik.-ökonom. Gesellsch.] Königsberg 1894.

Holden, E. S., A brief account of the Lick Observatory of the University of California. 2^{d} edition. Sacramento 1895.

— List of recorded earthquakes in California, Lower California, Oregon and Washington Territory. Sacramento 1887.

Jackson, Sh., Report on introduction of domestic reindeer into Alaska. 1884. Washington 1895. [Senate. Executive Document No. 92. 53. Congress, 3^{d} Session.]

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. Emil Lampe. Jahrg. XXIV. 1892. Heft 1—3. 1895.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publ. pelo F. Gomes Texeira. Vol. XII. No. 2. 3. Coimbra 1894.

Journal of comparative neurology . . . ed. by C. L. Herrich. Vol. IV. Dec. 1894. Vol. V. March—July 1895.

Klein, F., Ueber lineare Differentialgleichungen der 2ten Ordnung. Vorlesung gehalten im Sommersemester 1894, ausgearbeitet von E. Ritter. Göttingen 1894.

Koelliker, A. von, Zum feineren Baue des Zwischenhirns und der Regio hypothalamica. [S.-A. aus Verhandlungen der Anatomischen Gesellschaft auf der 9. Vers. in Basel vom 17—20. April 1895.]

— Kritik der Hypothesen von Rabl-Rückhard und Duval über amoeboide Bewegungen der Neurodendren. [S.-A. aus den Sitzungsberichten der Physik.-medic. Gesellsch. zu Würzburg. 1895.] Würzburg 1895.

Königsberger, L., Hermann v. Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik u. Mechanik. Rede z. Geburtsf.

d. . . . Großherz. Karl Friedrich . . . am 22. Nov. 1895 . . . Heidelberg 1895.

Κόντος, Κ. Στ., Κριτικαὶ καὶ γραμματικαὶ παρατηρήσεις. Ἀθήνησιν 1895.

Kuntze, O., Geogenetische Beiträge. Leipzig 1895.

Landberg, Carlo, Comte de, Critica Arabica. III. Leiden 1895.

Lange, Joh., Descriptio iconibus illustrata plantarum novarum vel minus cognitarum, praecipue e flora Hispanica. Fasc. 1—3. Hauniae 1864—66.

Le Jolis, Aug., Remarques sur la nomenclature hépaticologique. [Extrait de Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg.] Paris & Cherbourg 1894.

Lemoine, E., Étude sur le Triangle et sur certains points de Géométrographie. [Extr. from the Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Vol. XIII, Session 1894—95.] (Edingburgh 1895.)

— Le rapport anharmonique étudié au point de vue de la géométrographie. [S.-A. aus Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Caen 1894. Séance du 10. Août 1894.] Paris 1894.

Nature. A weekly illustrated journal of science. Vol. LI. No. 1311—1330. London und New York 1894/95. Vol. LII. No. 1331—1365. Ebend. 1895.

Newcomb, S., The elements of the four inner planets and the fundamental Constants of Astronomy. Supplement to the American Ephemeris and Nautical Almanac for 1897. Washington 1895.

Perot, A., Sur l'existence et la propagation des oscillations électromagnétiques dans l'air. [Extr. du Bulletin de la Soc. scientif. industr. de Marseille, I. Trim. 1894.) (Marseille 1894.)

Pluecker, J., Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Hrsg. von A. Schönflies u. Fr. Pockels. Bd. I. Leipzig 1895.

Potvin, Ch., Homère. Choix de Rhapsodies illustrées d'après l'art antique et l'archéologie moderne et mis en vers. Fasc. II. [S.-A. aus: Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. T. L.] Bruxelles 1893.

Rammelsberg, C. F., Handbuch der Mineralchemie. II. Ergz.-Heft zur 2. Aufl. Leipzig 1895.

Reighard, J. E., A biological examination of Lake St. Clair. With the following appendices . . . (= Bulletin of the Michigan Fish Commission No. 4.) Lansing 1894.

Report on the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. Chal-

lenger during the years 1873—76 . . . Summary of Scientif. Results. T. I. II. London 1895.

Zoologicae Res. Collectio brevium dissertationum novarumque investigationum ad universas zoologicas doctrinas spectantium, quae periodice eduntur sub directione Petri de Vescovi. Anno I. No. 2. Octob. 1894.

Revue internationale des Archives, des Bibliothèques & des Musées publ. par Ch. V. Langlois . . . Ad. Venturi. Tom. I. No. I. 1895.

Rosenbusch, H., Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteine. II. Bd. Mikrosk. Physiographie der massigen Gesteine. 3. Aufl. I. Hälfte. Stuttgart 1895.

Sacco, F., Essai sur l'orogénie de la terre. Turin 1895.

Schreiber, P., Ueber registrirende Regenmesser und Pegel. Ein Vortrag. [S.-A. aus dem „Civilingenieur" Bd. XLI. H. 5.] Leipzig 1895.

Schuchardt, H., Sind unsere Personennamen übersetzbar? Graz 1895.

Relative **Schwerbestimmungen** durch Pendelbeobachtungen. Ausgeführt durch die k. k. Kriegs-Marine in den Jahren 1892—94. Hrsg. vom K. u. K. Reichs-Kriegsministerium, Marine-Section. Wien 1895.

Saint-Lager, Onothera ou Oenothera. Les anes et le vin. Paris 1893.

Slaby, A., Das Gesetz von der Erhaltung der Energie und seine Bedeutung für die Technik. Rede zum Geburtsfest S. M. des Kaisers und Königs Wilhelm II. in der Aula der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin am 26. Januar 1895. Berlin 1895.

Stein, M. A., Catalogue of the Sanscrit manuscripts in the Raghunata Temple Library of the Maharaja of Jammu and Kashmir. Prepared for the Kashmir State Council. Bombay, London, Leipzig 1894.

Théel, H., Om Sveriges zoologiska hafstation Kristineberg. Stockholm 1895.

Tischner, A., Le phénomène fondamental du système solaire. Leipzig 1895.

Valdés, J. de, Commentary of the first book of the Psalms. Translated by John T. Betts. (London) 1894.

Westphal, A., Untersuchungen über den selbstregistrirenden Universalpegel zu Swinemünde, System Seibt-Fuess. Mittheilung aus dem Königl. Geodätischen Institut zu Potsdam. S.-A. aus der Zeitschrift f. Instrumentenkunde 1895 Heft 6. Berlin 1895.

Wilde, H., On the Evidence afforded by Bode's Law of a permanent Contraction of the Radii Vectores of the Planetary Orbits.

[From the IX. Vol. of the IV. Ser. of „Memoirs and Proceedings of the Manchester Litterary and Philosophical Society“ Session 1894—95.] Manchester 1895.

Wilde, H., On the Multiple Proportions of the Atomic Weight of Elementary Substances in relation to the unit of Hydrogen [from the IX. Vol. of the IV. Ser. of „Memoirs and Proceedings . . .]. Manchester 1895.

Wirtinger, W., Untersuchungen über die Thetafunction. Gekrönte Preisschrift von Göttingen. Leipzig 1895.

Wortmann, H. (pseud. J. H. Franke), Die Grundgesetze der sittlichen Weltordnung in ihren Beziehungen zur Religion, sowie zum Staats- und Rechtsleben. Als Eingabe an das Königl. Preußische Justizministerium in Berlin herausgegeben. Zürich und Säckingen [1895].

Von der philosophischen Facultät zu Göttingen ist zur Veröffentlichung folgendes mitgeteilt.

Beneke'sche Preisstiftung.

Am 11. März 1896, dem Geburtstage des Begründers der Preisstiftung, des Consistorialraths Carl Gustav Beneke, wurde in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät das Ergebniß der Preisbewerbung für das Jahr 1896 verkündet.

Die im Jahre 1893 gestellte Preisaufgabe lautete:

„Die Elfenbeindiptycha nebst den gleichartigen Relieftäfelchen aus Elfenbein sollen in Hinsicht auf den in ihren Darstellungen enthaltenen Bestand bildlicher Ueberlieferung aus der Antike, unter besonderer Berücksichtigung der mythologischen und litterarhistorischen Stoffe und mit Heranziehung auch der verwandten älteren Handschriftenbilder bearbeitet werden. Es bleibt dem Bearbeiter überlassen, ob und wie weit er in einzelnen Beispielen das Fortleben dieser bildlichen Motive abwärts verfolgen will".

Es ist eine Bewerbungsschrift eingelaufen, mit dem Motto „Pugillarium usum etiam ante Trojana tempora fuisse".

Dieselbe deckt sich stofflich mit der Preisaufgabe nicht. Sie geht über diese in gewisser Richtung hinaus, in anderen wesentlichen Stücken füllt die Arbeit den Rahmen der Aufgabe nicht aus.

Der Verf. schließt von vornherein die diptychonartigen Elfenbeinreliefe aus, mit der wenigstens im Hinblick auf die statutarische Frist nicht eben zutreffenden Begründung, daß die Kürze der Zeit die Behandlung dieses Gebietes nicht verstattet habe; vermuthlich wollte er andeuten, daß die ihm persönlich zur Verfügung gestandene freie Zeit nicht ausgereicht habe. Aber er giebt an, daß er das Material für diesen Theil (mit einer zulässigen Einschränkung) gesammelt habe, und manche Stelle seiner Arbeit bestätigt, daß er sich in der That auch mit dieser Klasse der späten Elfenbeinreliefe beschäftigt hat.

Der Verf. entschuldigt, daß er nicht auch die Elfenbeinkäst-

chen in seine Untersuchung gezogen habe. Indessen waren diese durch die Formulirung der Aufgabe mit gutem Grund ausgeschlossen worden. Er hat ihnen aber doch seine Aufmerksamkeit zugewendet, und, wie er mittheilt, ihre Bearbeitung vorbereitet.

Dagegen hat er wiederum eine Unterlassung begangen, indem er die von der Fakultät verlangte Heranziehung der Handschriften-Miniaturen nahezu völlig vernachlässigte, wiewohl diese, auch bei Beschränkung auf das publizirte Material, manche fruchtbare Parallele bieten konnten.

Die Arbeit handelt in einer allgemeinen Besprechung über Diptycha überhaupt, und insbesondere über die Bestimmung der mit figürlichem Reliefbildwerk ausgestatteten Privatdiptycha, letzteres in der richtigen Erkenntniß, daß die Darstellungen in enger Beziehung zu der Verwendung standen. Es folgt eine anfangs sehr eingehende, dann allmälig immer knapper werdende Erläuterung der mythologischen und verwandten Darstellungen auf den Privatdiptychen, unter stetem Hinblick auf die muthmaßliche Entstehungszeit, ferner Erörterung der Inschriften u. s. w. Die vorhandenen Beamten- und Consulardiptychon werden schließlich vollzählig angereiht, und es wird ihre Datirung in solchen Fällen kurz besprochen, wo der Verf. von seinen Vorgängern abweicht. In diesem Theil geht der Verf. über die Grenzen der Aufgabe hinaus. Es hat fast den Anschein, als ob ihm diese nicht in ihrem genauen Wortlaut bekannt gewesen sei.

Nachdem die Consular- und Beamtendiptycha von der historisch-antiquarischen Seite her eine durchgreifende Bearbeitung durch Wilhelm Meyer erfahren hatten, war von der Fakultät gerade diejenige Seite des weitschichtigen Stoffes zur Untersuchung gestellt, die der Behandlung durch einen geschulten Archäologen dringend bedürftig ist. Der Verf. hatte einzugehen auf gewisse vereinzelte Motive der Consulardiptychen, die in die Antike höher hinaufführen, wie z. B. der schöne griechische Typus der Gefangenen-Gruppen; und dies gerade hat der Bearbeiter wiederum unterlassen.

Aber auch das, was er bietet, ist von Mängeln nicht frei. Insbesondere ist die Behandlung der mythologischen Diptycha, die im Mittelpunkt der Aufgabe stehen, zum Theil unzulänglich. Dies gilt namentlich von der Behandlung des interessantesten von allen, des Diptychon von Sens.

Trotz alledem hat die Fakultät die Arbeit des vollen Preises würdig gefunden. Dieselbe ist hervorgegangen aus eindringender und allseitiger Beschäftigung mit dem ganzen Material und ent-

hält werthvolle Ergebnisse. Die Behandlung der eingehender erläuterten Diptychen wird unterstützt durch eine tüchtige Monumentenkenntniß und guten Takt der archäologischen Exegese, sie ist gründlich, methodisch und scharfsinnig. Das Verständniß dieser arg vernachlässigten Klasse von Bildwerken ist entschieden gefördert.

Der Verf. hat sich mit dem weit verstreuten, für den klassischen Archäologen großentheils wenig lockenden Material in solchem Umfang und mit so viel Gründlichkeit bekannt gemacht, daß die Erwartung berechtigt ist, es werde aus den jetzt vorgelegten ungleichmäßig durchgearbeiteten Studien eine befriedigende, so weit möglich auf Prüfung der Originale beruhende Gesammtbearbeitung derjenigen Klasse der Diptychen nebst den diptychonartigen Elfenbeinreliefen erwachsen, die der Beleuchtung am Meisten bedarf. Die Fakultät konnte, nach der Natur des Stoffes, vorerst nur eine Arbeit erwarten, die eine solche umfassende und durchgreifende Leistung, wie sie bei Stellung der Aufgabe als Endziel vorschwebte, vorbereitete. Ohne einen größeren Aufwandt pekuniärer Mittel kann aber dieses Ziel nicht erreicht werden. Es schien der Fakultät im Interesse der Wissenschaft gelegen, daß der Verf. durch Gewährung des vollen Preises in den Stand gesetzt werde, die von ihm in Angriff genommene Aufgabe in ihrem vollen Umfang durchzuführen.

Die Eröffnung des Briefes mit dem Motto: Pugillarium usum etiam ante Trojana tempora fuisse" ergab als Verfasser Herrn Dr. Hans Graeven in Rom.

Für das Jahr 1899 stellt die Fakultät folgende Preisaufgabe:

> „Es wird eine geologische Beschreibung des „Ith" und seiner direkten Fortsetzungen gewünscht, namentlich auch der Verhältnisse, welche sein Ende im Süden bei Eschenhausen bedingen sowie seine Hakenbiegung und sein Ende im Norden bei Lauenstein-Coppenbrügge, und im Anschluß hieran eine genaue Untersuchung der Juraformation des Ith und ihrer Beziehungen zu allen sonst im nordwestlichen Deutschland unterschiedenen Gliedern des Jura. Der Arbeit ist eine Uebersichtskarte nebst allen Belegstücken beizufügen".

Bewerbungsschriften sind bis zum 31. August 1898 an uns einzusenden, und zwar auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen nebst einem vereinzelten Briefe, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung und innen Namen, Stand und Wohnort des

Verfassers angibt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht erkennbar gemacht werden. Auf dem Titelblatt der Arbeit muß ferner die Adresse bezeichnet sein, an welche die Abhandlung zurückzusenden ist, falls sie nicht als preiswürdig befunden wird.

Der erste Preis beträgt 1700 Mk., der zweite 680 Mk.

Die Zuerkennung des Preises erfolgt am 11. März 1899, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum des Verfassers.

Die Preisaufgaben, für die die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1896 und 31. August 1897 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen in den Jahrgängen 1894 und 1895, Geschäftliche Mittheilungen, S. 34 bzw. 30.

Göttingen, den 11. März 1896.

Die philosophische Fakultät.
Der Dekan.
Lexis.

Bericht über die öffentliche Sitzung am 7. November 1896.

Die Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften hielt ihre öffentliche Sitzung des Winterhalbjahres zur Erinnerung an den Geburtstag ihres Stifters (Königs Georg II. von England) am 7. November, 4 Uhr Nachmittags.

Herr P. Kehr sprach über den Plan einer kritischen Ausgabe der Papsturkunden bis Innocenz III.

Die Rede ist umstehend abgedruckt.

Ueber den Plan einer kritischen Ausgabe der Papsturkunden bis Innocenz III.

Von **P. Kehr.**

Zu den Aufgaben, die sich unsere Gesellschaft gestellt hat, ist seit Kurzem der Plan hinzugekommen, eine kritische Ausgabe der Urkunden der Päpste bis Innocenz III. zu veranstalten. Wie wir diese Aufgabe auffassen, welche Ziele und Grenzen wir uns stecken, und am Ende was von einer solchen Ausgabe der Papsturkunden für unsre Kenntnis der Vergangenheit erwartet werden darf, darüber zu reden dünkt mir ein nicht unwürdiges Thema zu sein für den heutigen Tag, an dem unsre Gesellschaft öffentlich Rechenschaft über ihre Thätigkeit ablegt.

Aber fragt nicht von vornherein der Eine und Andere zweifelnd, warum wir gerade diese Aufgabe gewählt haben, die auf den ersten Blick einer deutschen Akademie fern zu liegen scheint, zu einer Zeit, da in der deutschen Geschichtswissenschaft ganz andere Interessen und Tendenzen sich zur Geltung zu bringen bemühen?

So lebhaft heute wieder einmal der unfruchtbare und darum nutzlose Streit über die wahren Aufgaben der Historie die Gemüther bewegt, davon sind doch Alle, die es ernst mit ihrer wissenschaftlichen Pflicht nehmen, durchdrungen, daß es die erste Aufgabe des Historikers ist, die Ueberlieferung, auf der alle Geschichte beruht, zu sammeln und in Sicherheit zu bringen. Dem Laien mag diese ängstliche Sorge um den Nachlaß der Vergangenheit übertrieben erscheinen, und er wird meinen, daß in unsrer Zeit der allgemeinen Bildung die Urkunden und Denkmäler der Vorzeit hinreichend geborgen seien. Aber der Kundige wird ihn belehren, daß die politischen Katastrophen der neueren Zeit der Ueberlieferung verderblicher gewesen sind als alle Brände und Verwüstungen des Mittelalters, daß mit der Vernichtung so vieler einst selbständiger Institute durch die deutsche Reformation, durch

die französische Revolution, durch die politischen Ereignisse unseres Jahrhunderts ein reicher Schatz geschichtlicher Materialien für immer versunken ist. Auch heute noch ist die Summe dessen, was durch modernste Barbarei zu Grunde gerichtet wird, nicht unerheblich. Wir aber wissen nicht, was die Zukunft bringen wird, um so mehr haben wir die Pflicht, eingedenk zu sein des Vermächtnisses der vergangenen Jahrhunderte.

Indeß mit der bloßen Sammlung ist es nicht gethan. Auch darüber herrscht Einigkeit unter den Fachgenossen, daß zu dem ersten Geschäft des Sammelns als das zweite hinzukommen müsse die kritische Verarbeitung und die Sichtung des Geborgenen nach seinem innern Werthe, also daß deutlich werde, was sicherer und was unsicherer Besitz sei. Denn erst dann vermag die Kunst des Geschichtsschreibers, ohne unwahrhaftig zu werden, ihres hohen Amtes zu walten.

Ist es zu kühn voraus zu sagen, daß spätere Generationen als den schönsten Ruhmestitel der Historiker des 19. Jahrhunderts und besonders unserer Nation preisen werden, daß sie beide Aufgaben nicht nur erkannt, sondern auch alle Kräfte an sie gesetzt haben? Sie werden mit Bewunderung auf die stattlichen Bändereihen der Monumenta Germaniae blicken, die ihnen mit den Ueberlieferungen der stolzesten Zeiten deutscher Geschichte zugleich die kritische Arbeit der großen Meister der letzten Jahrzehnte übermitteln; in ihnen, nicht in den falschen Propheten von heute, werden sie, wenn sie die rechte Einsicht haben, ihre wahren Lehrer verehren. Mit nicht geringerer Genugthuung darf der jüngeren Publicationen gedacht werden, die sich an die Monumenta anschließen oder dem von ihnen gegebenen Impulse erwachsen sind, und der zahlreichen Sammelwerke, die die Quellen engerer Gebiete enthalten. Derselbe rege Sammeleifer herrscht in den übrigen Ländern des Abendlandes; rühmlich besonders ist der Eifer der französischen Forscher, nicht minder anzuerkennen das Streben der italienischen Gelehrten, ihrem großen Vorbild Muratori nachzuthun.

Aber wir sind doch noch weit davon entfernt, alles was uns der Ueberlieferung der Vergangenheit gegenüber obliegt, gethan zu haben. Nach einer Richtung besonders macht sich eine gewisse Enge der Leistungen bemerkbar. Der Mehrzahl dieser Sammlungen ist, wie es am Ende bei der Entwickelung der politischen Verhältnisse unsres Erdtheils, der sich ganz zu entziehen die Geschichtsforschung, wenn sie es auch sollte, doch nicht vermag, die Beschränkung auf die Denkmale der eigenen Nation eigentümlich.

Greifen auch einige wie die Monumenta Germaniae über die engeren Grenzen des ursprünglichen Planes mehr und mehr hinaus, immer herrscht die Beziehung auf die Geschichte der deutschen Vorzeit vor. Ich bin weit entfernt davon, jenen Unternehmungen daraus einen Vorwurf zu machen. Indes es bleibt doch eine Lücke, mindestens eine große Schwierigkeit, die dem Historiker, der sich die Erforschung der mittleren Zeiten zur Aufgabe macht, zuweilen sehr fühlbar wird. Denn das Mittelalter, besonders die älteren Jahrhunderte, deren Grundgedanke die Einheit und die Universalität des christlichen Abendlandes war, nach Nationalitäten und nach nationaler Ueberlieferung scheiden zu wollen, heißt das nicht das innerste Wesen jener Zeiten verkennen? Alle Nationen des Abendlandes haben Theil an dieser gemeinsamen Ueberlieferung, am meisten freilich die unsrige, und welcher Nationalität auch immer der mittelalterliche Historiker angehöre, seine Aufgabe ist, im stillen Bündnis mit den Fachgenossen jenseits der Alpen und der Vogesen an seinem Theil die Sammlung und Kritik der Ueberlieferung zu fördern, die nicht das Sondereigenthum einer Nation ist, sondern der gemeinsame Besitz der germanisch-romanischen Welt, auf deren Einheit einst das Mittelalter beruhte.

Wenn irgend ein wissenschaftliches Unternehmen geeignet ist, diese Liga der an derselben Aufgabe arbeitenden italienischen, französischen und deutschen Gelehrten zu fördern, so ist es unser Plan, von dem in besonderem Maaße gilt, was ich soeben sagte. Denn die Urkunden der Päpste sind eines der Hauptstücke dieser gemeinsamen Ueberlieferung und doch auch wieder in besonderm Sinne Monumente unsrer nationalen Geschichte. Nicht nur weil ihrer viele den Angelegenheiten deutscher Kirchen gelten. Jedermann weiß, daß mit der Geschichte der deutschen Vorzeit untrennbar verknüpft ist die Geschichte der Kirche und des Papstthums. Die beiden universalen Gewalten des Mittelalters, das Kaiserthum und das Papstthum, sind, soweit auch ihre Wirksamkeit hinter ihrer Idee zurückblieb und so feindlich sie sich schließlich einander gegenüber stellten, immer die großen Pole des mittelalterlichen Lebens gewesen und ohne einander nicht zu verstehen. Und wie sie einst zusammengehörten, so kann auch die Forschung sich nicht mit der Ueberlieferung des Einen begnügen und die des Andern vernachlässigen. Aber während bereits seit Jahren an der Herausgabe der Kaiserurkunden gearbeitet wird, ist man bis jetzt über die Sammlung der päpstlichen Urkunden in Regesten nicht hinausgekommen. So groß immer das Verdienst Ph. Jaffe's und derer ist, die sein Regestenwerk neu bearbeitet haben, es ist doch nur

ein Notbehelf. Es ist nicht selbst das Ziel, aber es weist es uns, es zeigt uns den Weg zu der größeren Aufgabe, von der bloßen Sammlung der Papstregesten fortzuschreiten zu der kritischen Ausgabe der Papsturkunden.

Indessen das Bedürfnis allein rechtfertigt noch nicht den Entschluß zu einem so großen Unternehmen. Soll es gelingen, so müssen vor allem andern die wissenschaftlichen Voraussetzungen vorhanden sein. Sind wir in der That so weit, daß wir uns an diese Aufgabe wagen können?

Wer mit einiger Aufmerksamkeit die Geschichte der historischen Forschung in unserm Jahrhundert überblickt, wird eine von den Geschichtsschreibern zu den Urkunden fortschreitende Entwickelung wahrnehmen. Als man in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts die wundervollen Entdeckungszüge in die Ueberlieferung des deutschen Alterthums begann, da waren es begreiflicherweise zunächst die Geschichtsschreiber, die man herausgab und mit unermüdlichem Eifer tractirte. Ihre Kritik ist lange Zeit der Ruhm und die ausschließliche Beschäftigung der kritischen Schule gewesen. Aber je tiefer man in die Ueberlieferung des älteren Mittelalters eindrang, um so mehr drängte sich die Einsicht auf, daß wenn nicht wichtiger, sicher aber ergiebiger und zuverlässiger das Studium der uns aus jenen Zeiten erhaltenen Urkunden ist. Was diese zu einem so viel zuverlässigeren Fundament unsrer geschichtlichen Erkenntnis macht, ist ihr zwiefacher Charakter als Ueberlieferungen und als Ueberreste. Denn sie sind nicht nur wie unsre andern Ueberlieferungsformen redende Zeugen der Vorzeit, sondern sie sind selbst Reste des Lebens und der unmittelbare Niederschlag der Rechtszustände der vergangenen Jahrhunderte; aus ihnen allein können wir die Ordnungen, in denen das Dasein der Menschen jener Zeiten sich bewegte, wiederherstellen. Es fügte sich zur guten Stunde, daß sich Gelehrte fanden, die muthig in die verworrene Ueberlieferung der mittelalterlichen Urkundenmassen vordrangen und den ihnen Folgenden Bahn brachen. Dank diesen Führern darf man in der That sagen, daß die Fortschritte der geschichtlichen Forschung unsrer Tage am größesten sind auf dem Gebiete des Urkundenwesens. Heute ist die Kritik der mittelalterlichen Documente zu einer Energie und Exactheit gelangt, die die früheren Generationen der Historiker kaum ahnten; sie darf sich jetzt an die größten Aufgaben, die die ältere Ueberlieferung ihr stellt, mit der sichern Zuversicht des Gelingens wagen. Nachdem die eine große Aufgabe, die Herausgabe und kritische Bearbeitung der Urkunden der Kaiser in Angriff ge-

nommen und bereits zum einen Theil gelöst ist, wagen wir aus deren Gelingen die Hoffnung zu schöpfen, daß auch die andere, umfassendere und in mancher Hinsicht wichtigere, die Ausgabe der Urkunden der Päpste, nicht hinter ihr zurückbleiben werde.

Indem ich mich anschicke, den Plan selbst näher darzulegen, muß ich zunächst über die äußeren Grenzen des Unternehmens berichten und begründen, welche Materien überhaupt für die geplante Publication in Betracht kommen.

Für den Kenner kann von vorn herein kein Zweifel bestehen, daß eine kritische Bearbeitung der gesamten päpstlichen Urkunden von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 12. Jahrhunderts in ihrem weitesten Sinne nicht nur die Kräfte eines Einzelnen, sondern selbst die Kräfte einer gelehrten Gesellschaft übersteigen würde. Es ist nicht die Masse dieser Documente allein — die zweite, 1888 abgeschlossene Ausgabe der Regesten Ph. Jaffés zählt über 17900 Urkunden der Päpste bis 1198 auf, und man darf, da jedes Jahr neue Funde bringt und da vollends eine systematische Durchforschung der Archive, wie wir sie planen, ohne Zweifel nicht wenige bisher unbekannt gebliebene Urkunden aufspüren wird, sie gut und gern um ein weiteres Tausend vergrößern —, nicht diese Masse allein nötigt zu einer gewissen Einschränkung, weit schwerer wiegt die Mannigfaltigkeit des urkundlichen Stoffes und die Verschiedenheit seiner Ueberlieferung.

Und von dieser, der Ueberlieferung, an erster Stelle zu reden, ist gerade da geboten, wo es sich um eine Edition handelt.

Die große Masse der älteren Papstbriefe ist nicht in selbständiger Ueberlieferung auf uns gekommen; sie verdankt ihre Erhaltung dem Interesse der Kirchenhistoriker oder der Canonessammler. Ein nicht geringer Theil davon sind Machwerke des falschen Isidor, Schriftstücke also gleicher Herkunft und gleicher Ueberlieferung, ein Complex für sich, den einer neuen kritischen Ausgabe zu unterziehen wir weder Anlaß noch Beruf haben. Aber auch die echten Briefe bilden durch ihre besondere Ueberlieferung gleichsam Körper für sich. Ich erinnere, lediglich um einige Beispiele anzuführen, an die Sammlungen der Hispana und der Hadriana, an die Quesnel'sche Sammlung, an die sogenannte Avellana. Hier die kritische Grundlage zu schaffen, ist eine durchaus selbständige Aufgabe, die, so wichtig sie auch für die ältere Geschichte der Kirche ist, ganz andere Anforderungen an den Herausgeber und Bearbeiter stellt, wie die Aufgabe, der unsre Anstrengungen gelten. Wohl ist das Vermächtnis des großen Mauriners Pierre Coustant, der die Briefe der Päpste bis Innocenz III. herauszugeben plante, noch

immer nicht eingelöst, und es bleibt hier noch eine Aufgabe, würdig einer Akademie. Auch sie in Angriff zu nehmen, können wir uns nicht unterfangen. Denn nicht allein nach der formalen Seite der Ueberlieferung, auch nach ihrem Inhalt fallen diese älteren Materien aus dem Bereich unsres Planes.

Eine andere Quelle der Ueberlieferung päpstlicher Schreiben, die wir in ihrer Gesamtheit gleichfalls auszuschließen gedenken, sind die Register, jene Sammlungen, die in Rom selbst, in der Kanzlei der Päpste angelegt wurden. Wir wissen heute, daß wie so viele altrömische Institutionen auch die Einrichtung der römischen Büreaux von der päpstlichen Curie übernommen wurde: wie die kaiserlichen Behörden Commentarien führten, in denen sie die Ein- und Ausläufe buchten, so hat auch die Kanzlei der Päpste schon in den ersten Jahrhunderten die Schriftstücke, die sie erließ, in ihren Registern verzeichnet. Wären sie in ihrer Gesamtheit erhalten, so würden wir uns eines überaus wichtigen historischen Stoffes zu erfreuen haben: wir würden die Masse der päpstlichen Urkunden und Erlasse durch die Jahrhunderte hindurch zu übersehen vermögen, und der ganze Apparat dieser Verwaltung in seiner gesamten Entwickelung läge uns von Anbeginn an vor Augen. Aber nur Trümmer dieser älteren Registerserien sind auf uns gekommen, nicht einmal directe Reste derselben, sondern Auszüge und Bearbeitungen, die den praktischen Tendenzen der Canonisten dienen, nicht eigentlich den kostbaren Stoff lauter und unverkürzt der Nachwelt übermitteln sollten. So stellt auch diese Gruppe eine selbständige und eigenthümliche Ueberlieferungsform für sich dar, die ihre besondere kritische Behandlung verlangt. Das gilt sowohl von der bedeutenden Londoner Sammlung, der wir Auszüge aus den Registern der Päpste Gelasius I., der beiden Pelagius, Leos IV., Johanns VIII., Stephans V., Alexanders II. und Urbans II. verdanken, wie von der Cambridger Sammlung, die sich als ein Auszug aus dem Registrum Alexanders III., des großen Papstes des 12. Jahrhunderts, darstellt — beide Sammlungen liegen seit einem Jahrzehnt in der Hauptsache edirt vor —, und in besonderm Maaße von den berühmteren Registern Gregors I. und Gregors VII. Es wäre von Ueberfluß, daran zu erinnern, welche Fundgruben des historischen Wissens gerade diese Register der beiden Gregore sind; aber ebenso ist für Jeden, der das Recht der Ueberlieferung zu achten weiß, deutlich, daß jedes von beiden für sich als ein einheitlicher, geschlossener, selbständiger Stoff zu behandeln und zu bearbeiten ist, wie ja auch in der That diese Aufgabe so von den Monumenta Germaniae in Angriff genommen ist.

Ebenso wie wir die Reste dieser älteren Register als Ganzes ausschließen — was ihnen und den andern Collectionen für unser Unternehmen zu entlehnen ist, werde ich hernach noch darlegen —, ebenso begrenzen die erhaltenen jüngern Register ganz von selbst unsre Aufgabe. Gerade da, wo wir uns die Grenze gesteckt haben, mit Innocenz III., beginnen die erhaltenen zusammenhängenden Register, von Jahr zu Jahr immer stattlicher und reicher werdend, bis sie schließlich zu ungeheuren Bändereihen anschwellen, lebendige Monumente der päpstlichen Verwaltung und der Wirksamkeit der römischen Bischöfe. Längst hat die Forschung sich dieser unvergleichlichen Quelle bemächtigt. Alle Nationen unsres Erdtheils wetteifern diese Schätze auszubeuten, die Papst Leo XIII., dem die historische Wissenschaft für die Oeffnung der vaticanischen Archive allezeit Dank schulden wird, der Forschung zugänglich gemacht hat. So macht die Ueberlieferung selbst gleichsam einen Einschnitt bei Innocenz III.; seine Epoche bildet auch für uns die natürliche Grenze unsrer Aufgabe.

Die Objecte aber unsres Planes sind die dritte Gruppe päpstlicher Schreiben, um es kurz zu sagen, die päpstlichen Urkunden selbst, die von Rom erlassen über das ganze Abendland sich zerstreuten, theils in den Wirren der Zeiten verloren gingen, theils in den Archiven derer, die sie empfingen, oder ihrer Rechtsnachfolger bewahrt wurden. So weit einst das Wort des römischen Pontifex mächtig war, so weit finden wir seine Urkunden zerstreut, nicht nur in den Ländern des centralen Abendlandes, in Italien, Frankreich und Deutschland, sondern auch an der Peripherie des Occidents, in Spanien, England und in den Ländern des skandinavischen Nordens: ihnen, nicht den in geschlossenen Sammlungen selbständiger Ueberlieferung erhaltenen Briefen gilt unser Plan.

Das sind in aller Kürze skizziert die Grundlinien, die die Ueberlieferung selbst unserm Unternehmen vorzeichnet. Aber auch sachlich, nach den innern Kriterien aufgefaßt, ergibt sich eine ähnliche Formulirung.

Ich muß notgedrungen ausgehen von der Definition des Wortes Urkunde, nicht wie der gemeine Sprachgebrauch und der Jurist sie versteht, sondern von der Definition der Urkunde im Sinne des Diplomatikers. Wir erkennen als das Wesentliche in ihr die rechtliche Wirkung und verstehen unter den Urkunden der Päpste diejenigen Schriftstücke der römischen Kanzlei, die in irgend einer Weise in die rechtlichen Verhältnisse desjenigen, für den sie ausgestellt wurden, eingriffen oder einzugreifen bestimmt waren. Es sind zugleich diejenigen, die weniger den Theologen,

um so mehr aber den Historiker und Juristen angehen, es sind nicht die Briefe und Decrete des die Gläubigen belehrenden und die Canones interpretirenden Oberhauptes der Kirche, sondern die Urkunden des die Kirche und die mittelalterliche Welt regierenden Papstthums.

Aber die päpstlichen Schreiben der ersten Jahrhunderte — ich erinnere daran, daß es diejenigen sind, deren Erhaltung wir den Compilationen der Canonisten oder dem Interesse der Kirchenhistoriker verdanken — sind, soweit sie echt sind, meist Briefe ohne die spezifischen Formen und Wirkungen der Urkunde. Wer die Geschichte des Papstthums kennt, weiß, daß es nicht anders sein konnte. Denn so groß auch das Ansehen des römischen Bischofs schon in den ersten Jahrhunderten und so allgemein der Glaube verbreitet war, daß er die apostolische Tradition und die authentische Lehre Sanct Peters, des Apostelfürsten, bewahre, noch war seine Autorität zwar eine eminent moralische, aber weit entfernt davon, eine rechtliche zu sein. Vollends in den festen bureaukratischen Ordnungen des römischen Imperiums war kein Raum für eine andere Gewalt von so allgemeiner Tendenz: in der That besitzen wir, gewiß nicht etwa aus Ungunst der Ueberlieferung, aus jenen Jahrhunderten keine päpstlichen Urkunden im strengen Sinne; die sich als solche ausgeben, sind spätere Erfindungen und zumeist leicht als solche zu erkennen. Von diesen Fälschungen abgesehen, denen ein erhebliches historisches und diplomatisches Interesse innewohnt, dürfen wir das ganze ältere Material als aus dem Rahmen unsrer Aufgabe fallend bei Seite lassen.

Wie überall, so ist es gerade hier überaus schwierig, die Anfänge des eigentlichen päpstlichen Urkundenwesens klarzulegen. Denn die ersten Ansätze dazu sind unter den Trümmern der Ueberlieferung verschüttet. Erst allmälig tauchen die besondern Kennzeichen auf, die die Urkunden im strengen Sinn von der großen Masse der päpstlichen Schriftstücke der älteren Zeit unterscheiden. So vermögen wir jetzt noch nicht genau zu sagen, welche Documente dieser älteren Periode in unsre Sammlung aufzunehmen sein werden. Aber das Prinzip, das für uns maßgebend sein wird, läßt sich doch schon jetzt dahin formuliren, daß unsre Sammlung der thatsächlichen, im Einzelnen noch festzustellenden Entwickelung des päpstlichen Urkundenwesens möglichst entsprechen soll, also alle Schriftstücke aufnehmen wird, in denen, wenn auch zunächst noch ohne die festen und ausgebildeten Formen der späteren Urkunden, irgend welche rechtliche Verfügungen getroffen werden

Als solche betrachte ich z. B. bereits jene Schreiben, in denen die Bischöfe von Thessalonich und Arles zu päpstlichen Vicaren bestellt werden. Ich denke, man darf diese bis in das 4. Jahrhundert zurückreichenden Erlasse als die ersten päpstlichen Urkunden im strengen Sinn bezeichnen, da durch sie thatsächlich Veränderungen in den Rechtsverhältnissen jener Kirchen herbeigeführt wurden. Vollends kann kein Zweifel sein in Bezug auf die eigentlichen Privilegien, durch die die Päpste das Verhältnis einzelner Klöster zu ihren Ordinarien zuerst bestätigten, dann aber auch von sich aus regelten. Wir wagen zu hoffen, daß unsre Sammlung die erste kritisch gesicherte Geschichte dieser Klosterprivilegien darbieten werde. Freilich fehlen auch hier anfänglich noch die besondern Kennzeichen der Urkunde und meist auch selbständige Ueberlieferung. Es sind diejenigen Schriftstücke, die ich im Sinne hatte, da ich zuvor von den Urkunden sprach, die wir aus den älteren Canonessammlungen oder den älteren Registern werden entlehnen müssen. Es ist insbesondere das Registrum Gregors des Großen, des ersten Papstes, der mit vollem Bewußtsein durch die Ertheilung von Klosterprivilegien die päpstliche Autorität systematisch erweitert hat, das uns eine reichere Ausbeute gewähren wird.

Mit jedem weitern Jahrhundert schwinden die Schwierigkeiten, die uns die Ueberlieferung der älteren Urkunden bereitet. Seitdem die besondern Formen der Urkunden gefunden sind, an denen man sie sogleich von einem Brief oder einem beliebigen andern Schriftstück zu unterscheiden vermag, gewinnen wir nicht nur überall ganz sichere und feste Grenzen, sondern zugleich die eigentlichen Elemente der diplomatischen Kritik. Denn eben auf diesen charakteristischen Formalien baut diese sich auf. Zunächst wächst mit jedem Jahrhundert der urkundliche Stoff. In den ersten Jahrhunderten nach Gregor I. sind die päpstlichen Privilegien noch immer spärlich. Reicher an Zahl werden sie erst in der zweiten Hälfte des elften Jahrhunderts, seit der Zeit, da der Sieg des Papstthums über das Kaiserthum entschieden ist. Seit dem Beginn des zwölften Jahrhunderts aber vermehrt sich das urkundliche Material mit jedem Jahre. Nicht etwa weil die Ueberlieferung günstiger wäre. Das gewaltige Anwachsen dieser Documente bezeugt den ungeheuren Einfluß, den das Papstthum jetzt gewonnen hat; diese Zahlen reden eine beredte Sprache: das Papstthum ist seiner Weltstellung nahe. Endlich seit Alexander III. wird die Zahl der päpstlichen Urkunden zur Masse, die von Jahr zu Jahr weiter anschwillt. Es ist die Zeit, in der das Papstthum die volle Regierungsgewalt über die Kirche erlangt hat.

Dieses also ist das Material, das wir in unsrer Sammlung zu vereinigen gedenken.

Ich habe gleich im Anfang und in der Folge wiederholt betont, daß diese eine kritische sein soll; es bleibt noch übrig dies mit einigen Worten zu erläutern.

Es versteht sich heute von selbst, daß eine Ausgabe nur dann genügt, wenn sie überall die beste Ueberlieferung bietet. Bei Urkunden besagt das, daß wir vor allem die Originale selbst aufspüren und zu Grunde legen müssen; im Falle ihres Verlustes aber die nächste beste Ueberlieferung. Indem ich über die Erhaltung der päpstlichen Originalurkunden einige erläuternde Angaben mache, deute ich damit zugleich die Schwierigkeiten an, in der wir uns besonders den älteren Urkunden gegenüber befinden.

Das älteste uns im Original erhaltene Papstprivileg ist die Urkunde Paschals I. für Ravenna vom Jahre 819. Durch Jahrhunderte hindurch sind wir also auf nur mittelbare, vielfach verderbte Ueberlieferung angewiesen. Wie viel günstiger ist dagegen die Ueberlieferung der Königsurkunden, deren originale Tradition zwei Jahrhunderte früher beginnt! Auch durch das 9. und 10. Jahrhundert steht es mit der Erhaltung der päpstlichen Originale nicht besser: die Zahl der Originale aus dieser Zeit erreicht kaum die Zwanzig. Erst im 11. Jahrhundert, seitdem die päpstliche Kanzlei von dem den Unbilden der Zeit schlecht standhaltenden Papyrus zu dem dauerhafteren Pergament überging, wird der originale Stoff reicher und damit auch eine sicherere Kritik möglich: wir haben aus dem 11. Jahrhundert bereits gegen 200 Originale. Aus dem 12. endlich mögen die erhaltenen Autographa das Tausend erheblich überschreiten.

Diese mit allem Vorbehalt gebotenen Zahlen besagen, daß, wie die Kritik besonders der älteren Urkunden in hohem Maaße erschwert ist, auch die Editionsarbeit mit weit größeren Schwierigkeiten zu kämpfen hat als bei irgend einer andern Urkundengruppe. Denn woher wollen wir die kritischen Normen nehmen, wenn uns die Originale fehlen? Wie viel peinlicher und mühsamer wird die Untersuchung, die aus abgeleiteten Quellen die lautere Form der ursprünglichen Ueberlieferung herstellen soll! Die Arbeit aber des auf mehrfache mittelbare Ueberlieferung angewiesenen Herausgebers vervielfacht sich ebenso wie die Arbeit, die der Herausgeber eines Originals zu leisten hat, sich vereinfacht. Und so eifrig man seit längerer Zeit auf die Sammlung der leicht in die Augen fallenden Originale bedacht gewesen ist, so wenig ist für die Feststellung der nicht in Urschriften erhaltenen päpstlichen Urkunden

geschehen. Allein die nach Th. Sickels classischer Instruction für die Kaiserurkunden gemachten Vorarbeiten kommen uns zu Gute, sonst sind wir überall auf die eigene Durchforschung der Archive und Bibliotheken und einer nicht unbeträchtlichen Litteratur angewiesen.

Aber dies ist, wie Jedermann sieht, eine Arbeit, die ein Einzelner nicht zu leisten vermag: die Mitarbeit und die Unterstützung Vieler muß hinzukommen, soll dies Werk gelingen. Denn in alle Welt sind jene Urkunden zerstreut. Die Aufgabe, die Diplome der deutschen Könige und Kaiser zu sammeln, konnte nur mit den reichen Mitteln der Monumenta Germaniae gelöst werden, und man weiß, wie viel Jahre sie erfordert hat und noch erfordern wird. Ungleich ausgedehnter ist die Aufgabe, die so viel zahlreicheren und unendlich weiter zerstreuten päpstlichen Urkunden zu sammeln. Mögen unsre Kräfte nicht versagen und unsre Mittel nicht versiegen! —

Ich denke, daß es auch diejenigen, die sich nicht selbst der strengen Forschung widmen, um so lebhaftere Theilnahme aber für den Fortschritt der allgemeinen Wissenschaft empfinden, interessiren wird, sich darüber zu unterrichten, welchen Nutzen unser Unternehmen für die Erweiterung unsres Wissens gewähren wird. In der That ist es nicht allein eines der wichtigsten Kapitel der Diplomatik, dem unsre Arbeit zu Gute kommen wird, es ist zugleich ein Stück der allgemeinen Geschichte des Occidents im Mittelalter, für das die Ausgabe der Papsturkunden die kritisch gesicherte Grundlage schaffen soll.

Welche Bedeutung im Allgemeinen den Urkunden als Quelle unsrer historischen Erkenntnis zukommt, habe ich bereits angedeutet; es wird noch Gelegenheit sein darzulegen, welche Bedeutung im Besondern den Tausenden und aber Tausenden von Urkunden zukommt, die von dem Mittelpunkte der mittelalterlichen Welt, von Rom aus, über das Abendland sich ergossen, vielfach neue Ordnungen schaffend, alte bestätigend, überall eingreifend und regelnd.

Aber nicht so ohne Weiteres können sie als historische Quellen verwerthet werden. Ist die Ueberlieferung, in der sie auf uns gekommen sind, lauter und zuverlässig? Sind sie selbst echt? Ist ihre Glaubwürdigkeit eine unbedingte?

Das sind die Fragen, die beantwortet werden müssen, ehe Urkunden überhaupt verwerthet werden dürfen. Sie zu beantworten, liegt dem Diplomatiker ob. Erinnern wir uns seiner elementarsten Aufgaben: sein erstes Geschäft ist, überall die älteste und beste

Ueberlieferung zu ermitteln, sein anderes Geschäft, das Echte und Unechte von einander zu sondern, die Glaubwürdigkeit der urkundlichen Tradition festzustellen. Er schuldet dem Historiker die kritische Voruntersuchung, damit dieser die von ihm für glaubwürdig erkannte Urkunde als historisches Beweismittel verwerthen könne.

Wie aber gelangt der Diplomatiker zu solcher Entscheidung über die Glaubwürdigkeit der einzelnen Urkunde? Es gibt nur einen Weg zu ihr: aus der Gesamtheit der erhaltenen Urkunden einer und derselben Provenienz und einer und derselben Periode die äußern und innern Merkmale, kurz die Kriterien festzustellen, die allein die Normen sein können für die Beurtheilung des einzelnen Documents. Zu welchen verhängnißvollen Irrthümern und Trugschlüssen die älteren Diplomatiker, die mit unzureichendem Material arbeiteten und arbeiten mußten, gelangten, weiß Jeder, der die Geschichte dieser Disciplin verfolgt hat, er weiß auch, daß die für die heutige Diplomatik bahnbrechenden Arbeiten Sickels darum vor allem andern so sichere und exacte Ergebnisse gewannen, weil sie grundsätzlich sämtliche Urkunden der Periode heranzogen. Um es kurz zu sagen: das Geheimniß der diplomatischen Kritik besteht in der umfassendsten und eingehendsten Vergleichung wenn möglich aller Urkunden der gleichen Herkunft und ihrer Merkmale; indem sie diese, zum Theil mit rein technischen Mitteln, zu Objecten ihrer Untersuchung macht, gewinnt sie Ergebnisse von jener Sicherheit, wie sie sonst in historischen Dingen nicht möglich ist.

Wenn irgendwo, so thut solche Kritik auf dem Gebiet des päpstlichen Urkundenwesens Noth. Denn es gibt keine Ueberlieferung, die so zersetzt wäre von Fälschungen oder doch so bestritten wäre. Kaum eines der älteren Papstprivilegien ist von dem Vorwurf der Fälschung verschont geblieben. Und ist man auch heute Dank eindringenden und verdienstvollen Spezialuntersuchungen der wunderlichen und voraussetzungsvollen Hyperkritik der vergangenen Zeiten Herr geworden und gerechter gegen die Ueberlieferung und freier von Vorurtheilen, immer fehlt es auch jetzt noch an einer wirklich sichern Grundlage und noch schwanken die Urtheile über die Glaubwürdigkeit gerade der wichtigsten jener alten Privilegien. Die Historiker haben ein Recht zu fordern, daß die Diplomatik hier endlich Ordnung schaffe und durch eine wissenschaftliche Lehre von den Urkunden der Päpste, deren erster und einziger Versuch jetzt fast anderthalb Jahrhunderte zurückliegt, sichern Boden für die Arbeit der Historie bereite.

Aber um solcher Forderung zu genügen, bedarf es eines tech-

nischen Apparats von einem sehr erheblichen Umfang, den herbeizuschaffen die Kräfte und die Mittel eines Einzelnen nicht ausreichen. Und Stückwerk sind darum alle Versuche bisher geblieben, so rührig sie auch unternommen wurden. Auch ein erneuter Versuch wird nur glücken, wenn er sich an ein größeres Unternehmen anlehnen kann. Wie die Lehre von den Urkunden der deutschen Könige und Kaiser erwachsen ist aus der Sammlung und Herausgabe der Diplome selbst, so wird auch die Lehre von den Urkunden der Päpste erst geschaffen werden durch die kritische Ausgabe der Privilegien. Sie also wird, so hoffen wir, die erste Frucht unsres Unternehmens sein.

Nicht die Diplomatik allein, die doch nur eine selbständiger Bedeutung entbehrende Hülfsdisciplin ist, wird von unserm Plan sich Förderung versprechen dürfen, auch die Geschichte der päpstlichen Verwaltung wird davon Gewinn haben. Die diplomatische Forschung, einstmals und ursprünglich nur die Kunst diplomata vera et falsa discernendi, ist, da sie sich, um die aus den Kanzleien hervorgegangenen Schriftstücke richtig beurtheilen zu können, genöthigt sah, auch die Geschichte der mittelalterlichen Kanzleien, ihren Ursprung, ihre Entwicklung, ihren Geschäftsgang zu untersuchen, schließlich selbst ein Stück Verfassungs- und Verwaltungsgeschichte geworden. Ermißt man weiter, daß diese Kanzleien zu den wichtigsten Institutionen der mittelalterlichen Verfassung gehörten, da das Regiment zu jenen Zeiten sich wesentlich in den Formen urkundlicher Verfügungen bewegte, so liegt zu Tage, daß die Detailforschung des Diplomatikers sich hier zu allgemeiner Bedeutung erhebt. Die Geschichte der päpstlichen Kanzlei aber ist unter allen andern das wichtigste Kapitel in der Geschichte der mittelalterlichen Verwaltung. Denn keine andere hat wie sie die alten Elemente der römischen Büreaukratie bewahrt und zugleich das Urkundenwesen der europäischen Länder in solchem Maaße beeinflußt. Und wie sie sich im Laufe der Jahrhunderte zu einem ungeheuren Mechanismus entwickelte, ist ihr am Ende kaum eine Beziehung des öffentlichen und privaten Lebens entzogen geblieben. Die Geschichte der päpstlichen Kanzlei begleitet gleichsam als ihr äußerlicher Ausdruck die Geschichte des Papstthums selbst; von seinen Anfängen bis zur Vollendung der Universalmonarchie von Rom ist die Kanzlei mit ihrem immer reicher und mannigfaltiger sich gestaltenden, schließlich wuchernden Verwaltungsapparat sein getreustes Abbild.

Schon hier reichen die Ergebnisse der strengeren diplomatischen Forschung in das weitere Gebiet der Historie hinüber. Vol-

lends die mittelbaren Resultate, die aus der umfassenderen Verwerthung des kritisch gesichteten urkundlichen Materiales entspringen, sind von wahrhafter Bedeutung für fast alle Gebiete der Geschichte des Mittelalters. Es braucht kaum nochmals daran erinnert zu werden, welch ein ungeheurer historischer Stoff an sich in diesen tausenden von Urkunden ruht: ist doch eine jede von ihnen ein Beitrag zur Geschichte des Ausstellers, zur Geschichte des Empfängers, zur Geschichte endlich des Rechtsverhältnisses, dem sie gilt. In ihrer Gesamtheit aber sind sie Materialien für die politische Geschichte des Mittelalters, für die Kirchengeschichte, für die Geschichte des canonischen Rechts, deren Werth erst ermessen werden kann, wenn sie in umfassenderer und gründlicherer Weise als bisher geschehen ist, verwerthet werden. Vor allem aber bedarf die Geschichte des Papstthums selbst dieser Ausgabe als des sicheren Fundaments für eine gründliche und voraussetzungslose Forschung, die ihr überall noch Noth thut. An die Stelle der Polemik von hüben und drüben möge endlich die Forschung treten. Und sie wird hier eine Fülle von Problemen finden wie kaum auf einem andern Gebiete der mittelalterlichen Geschichte. Da sind — um statt vieler nur einige anzuführen — zunächst die Anfänge der päpstlichen Regierungsgewalt, die seit Jahrhunderten umstritten noch immer im Dunkel liegen. Auch dem Laien leuchtet ein, wie wichtig es für die allgemeine Geschichte ist, festzustellen, wann die Päpste begonnen haben, durch ihre Urkunden in die Rechtsverhältnisse der abendländischen Kirche einzugreifen und, Etappe für Etappe, den Weg zu verfolgen, der sie schließlich zur vollen Herrschaft über die Kirche geführt hat: was sind ihre Urkunden anders als eben so viele Kundgebungen dieser Entwickelung? Aber ich muß nochmals daran erinnern, daß kaum eines dieser urkundlichen Zeugnisse unbestritten geblieben ist: peinvoll ist für Jeden, der den Versuch macht, die historische Entwickelung des Papstthums nach dieser Seite zu verfolgen, die sich durch die Litteratur von drei Jahrhunderten hinziehende Unsicherheit in der Beurtheilung dieser so wichtigen Documente; was der Eine für glaubwürdig ausgibt, bestreitet mit um so größerer Bestimmtheit der Andere. Es wird Jenem nicht besser ergehen, wenn er die Klosterpolitik der Päpste und den Rechtszustand der klösterlichen Genossenschaften in den älteren Jahrhunderten zu studiren unternimmt: seit den Anfängen der historischen Kritik hat man über die älteren Klosterprivilegien und Exemptionen, deren Wichtigkeit man ebenso erkannte, wie man die rechten Mittel ihnen beizukommen verkannte, mit einer Entschiedenheit gestritten, die

den Nichtdiplomatiker entweder in den hülflosen Zustand der Verzweiflung versetzt oder zu dilettantischer Entscheidung nöthigt. Da ist weiter die zahlreiche Gruppe der päpstlichen Schutzbriefe, deren Entstehung und Weiterbildung neuerdings genauer untersucht worden ist; ganz richtig ist da bemerkt, daß es sich hierbei um ein Rechtsinstitut handele, dessen Bedeutung lange Zeit entweder vergessen oder doch nicht gewürdigt worden ist: aber der Kundige sieht auch hier sogleich, daß die Fundamente dieser Untersuchung wie ihrer rechtshistorischen Deduction überall noch unsicher sind. Von noch größerer Bedeutung ist das Problem, auf welchem Wege es den Päpsten gelungen ist, die Bischöfe von sich abhängig zu machen und damit die volle Herrschaft über die Kirche zu erlangen. Aber die Geschichte der Palliumverleihungen, die hier zunächst in Betracht kommen, ist in ihren Einzelheiten noch dunkel; sie wird mit Sicherheit erst klargestellt werden können auf Grund einer kritischen Untersuchung dieser Urkunden, will sagen auf Grund ihrer kritischen Ausgabe. Kurz, kaum ein Kapitel des älteren canonischen Rechts, soweit es das Papstthum angeht, beruht heute auf sicheren Grundlagen. Kein Wunder. Denn die Canonisten, denen zunächst der Versuch oblag, die Entwickelung der kirchlichen Institutionen zu erforschen und darzulegen, haben theils in Folge der Ueberschätzung des codificirten Corpus, theils weil keine kritische Sammlung ihnen die rechte Grundlage bot, ganz darauf verzichtet, auf die Elemente dieses Rechtes, die Urkunden selbst und ihre Kritik, einzugehen. Wir wagen zu hoffen, daß unsre Ausgabe auch nach dieser Richtung einigen Erfolg haben werde.

Doch es möchte mit Recht Manchem voreilig erscheinen, schon jetzt von den Früchten zu reden, die wir von unsrer Arbeit erwarten, und in dem Anblick der Ernte zu schwelgen, da noch die volle Mühe der Bestellung vor uns liegt. Und nicht von uns allein hängt der Erfolg ab. Von Neuem muß ich betonen, daß unser Unternehmen nur gelingen kann mit der Beihülfe Vieler und vor allem der Unterstützung derer, denen die Hut jener urkundlichen Schätze anvertraut ist. An sie vornehmlich ergeht unsre Bitte, uns die Schwierigkeiten, die noch vielfach den Historiker bei seinen archivalischen Forschungen hemmen und aufhalten, nach Kräften erleichtern zu helfen, an die Fachgenossen, uns ihre Mitarbeit, deren wir einem so ausgedehnten und zersplitterten Stoff gegenüber dringend benöthigen, nicht zu versagen, an die Gönner der Wissenschaft endlich, uns die Theilnahme und Unterstützung zu gewähren, ohne die die Arbeit der Gelehrten nicht gedeihen kann.

Adresse an

William Thomas Lord Kelvin,

Professor in Glasgow, zu seinem 50jährigen Docentenjubiläum.

Der Jubilar gehört der Gesellschaft seit 1859 als correspondirendes, seit 1864 als auswärtiges Mitglied an. Die Adresse ist von Herrn W. Voigt in Vertretung der Gesellschaft am 16. Juni dieses Jahres persönlich in Glasgow überreicht worden.

Hochgeehrter Herr!

In der Reihe der wissenschaftlichen Körperschaften, die bei der Jubelfeier einer vollendeten fünfzigjährigen Lehrthätigkeit sich Ihnen glückwünschend nahen, will die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen nicht fehlen: hat sie doch die Ehre, Sie seit 37 Jahren zu den Ihrigen zu zählen und Sie gegenwärtig als Senior an der Spitze der ausländischen Mitglieder ihrer mathematisch-physikalischen Classe zu sehen.

Wenn wir nun auch, wie die meisten der Sie jetzt begrüßenden Gelehrten aller Länder, nicht in der Lage gewesen sind, Ihre persönliche Unterweisung zu genießen, so sind Sie uns darum nicht minder der große Lehrmeister der Physik; denn die befruchtende Kraft des wissenschaftlichen Gedankens ist nicht an den persönlichen Verkehr gebunden, sie pflanzt sich auch über die trennende zeitliche und räumliche Entfernung lebendig fort.

Von der Mathematik her haben Sie in Ihren frühesten Arbeiten vor nunmehr 55 Jahren Ihren Ausgang genommen: denn wenn jene auch ein der Wärme- und Electricitätslehre entnommenes Gewand tragen, so handelt es sich in ihnen doch wesentlich um analytische Probleme. Aber mit zwingender Gewalt zogen die zunächst nur gestreiften physikalischen Fragen Sie mehr und mehr auf ihr Gebiet.

Schon Ihre Methode der elektrischen Bilder, welche die Grundlage für die Theorie wichtigster Meßinstrumente liefert, weist in

die neue Richtung; deutlich bricht dieselbe hindurch in jener Reihe bahnbrechender Arbeiten, durch welche Sie sich entscheidend an dem Aufbau der mechanischen Wärmetheorie betheiligt haben. Hier handelt es sich nicht mehr um die Lösung specieller mathematischer Probleme, sondern um die viel schwierigere und folgenreichere Aufgabe, ganz neue Gebiete zum ersten Male der Analysis zu erschließen.

Wie Sie hier als kühner Pionier, allen Anderen voran, die neu erfundenen Werkzeuge der Theorie verwerthet, wie Sie mit ihrer Hülfe sogar noch nicht wahrgenommene Erscheinungen vorausgesagt haben, wird für alle Zeiten als eine der glänzendsten Leistungen des menschlichen Geistes gelten.

Die Bearbeitung der mechanischen Wärmetheorie führte Sie nunmehr auch zur messenden Beobachtung und gab Ihrem Genius somit die erste Veranlassung zur Bethätigung auf diesem, die theoretische Speculation ergänzenden Gebiete. Schon Ihre erste große Experimentaluntersuchung über die Abkühlung, welche Gase bei Dilatation ohne Arbeitsleistung erfahren, zeigt Sie als Meister in der Beherrschung der praktischen Hülfsmittel, und nicht minder stellt Ihre zweite experimentelle Arbeit aus dem Gebiete der Wärmelehre, der Nachweis der elektrischen Convection der Wärme, eine Leistung ersten Ranges dar.

Noch weiter in der einmal eingeschlagenen Richtung führte Sie die erneute Beschäftigung mit Elektricität und Magnetismus. Neben den bewundernswürdigen theoretischen Entwickelungen, welche bald das allgemeine Fundament des Lehrgebäudes, bald die Lösung speciellster Probleme betreffen, schenkten Sie hier der wissenschaftlichen Welt jene Reihe classischer Meßinstrumente, die jetzt in jedem physikalischen Laboratorium zu dem Stamm der Sammlung gehören und sich für unzählige Untersuchungen nützlich erwiesen haben.

Aber noch mehr. Als der Repraesentant einer wahrhaft modernen Physik haben Sie auch der Technik die Früchte Ihrer Forschungen in hohem Maaße zugewendet. Wenn jetzt das menschliche Wort an den gelegten Drähten das Weltmeer durchfliegt, wenn der Schiffer in trüben Tagen und Nächten mit Sicherheit die gewünschte Bahn einzuhalten vermag, so sind das nicht zum geringsten Theile Ergebnisse Ihrer Arbeiten.

Indessen wurden Sie der reinen Wissenschaft durch diese so verführerischen Beziehungen zu der Technik mit Nichten entfremdet, und wir sehen mit Bewunderung, wie Sie gleichzeitig in die tiefsten Schächte der Speculation über Probleme der Molecular-

physik hinabsteigen, auch hier die Goldkörner origineller Vorstellungen und überraschender Schlüsse schürfend.

So stehen Sie vor uns als der erste der lebenden Physiker, verehrt nicht nur von den Bürgern Ihres Vaterlandes, sondern von Allen, die der Wissenschaft treu ergeben sind.

Wenn unser deutsches Volk Jahrhunderte lang, durch ein tragisches Geschick niedergeworfen, wissenschaftlich zum großen Theil auf das Ausland angewiesen war, so hat es sich aus jener trüben Zeit auch in die heiterere Gegenwart hinein, wo es in ruhiger Sicherheit an dem friedlichen Wettbewerb der Nationen Theil nimmt, die rückhaltlose Anerkennung jeder großen Leistung bewahrt, gleichviel welchem Boden sie entsprossen sei. So dürfen denn unsere Physiker auch behaupten, in der ersten Reihe derer zu stehen, die Ihre Schöpfungen dankbar und bewundernd aufgenommen haben. Und unsere gelehrte Gesellschaft, die stolz ist, einst einen Gauß, Weber, Dirichlet, Riemann, Clebsch zu ihren ordentlichen Mitgliedern gezählt zu haben, benutzt die Feier Ihres Jubilaeums, um den gleichen Empfindungen Ausdruck zu geben. Sie bringt Ihnen aus vollem Herzen ihre ehrerbietige Huldigung dar und wünscht Ihnen, hochgeehrter Herr, noch viele Jahre rüstigen Schaffens und heiterer Lebensfreude.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften
zu Göttingen.

Adresse an

Wilhelm Hittorf,

Professor in Münster, zu seinem 50jährigen Doctorjubiläum am 26. October 1896.

Der Jubilar gehört der Gesellschaft seit 1879 als correspondirendes Mitglied an.

Hochgeehrter Herr Jubilar!

Mit frohem Herzen dürfen Sie heute des Tages gedenken, an welchem Ihre akademische Studienzeit vor 50 Jahren ihr Ende erreichte. In unermüdlicher, treuer Arbeit haben Sie uns seither eine Reihe von klassischen Experimentaluntersuchungen geschenkt, welche für die Entwickelung der Wissenschaft von fundamentaler Bedeutung geworden sind. Da ziemt es auch unserer Gesellschaft, welche stolz darauf ist, Sie zu den ihrigen zu zählen, auf Ihre wissenschaftlichen Leistungen den bewundernden Rückblick zu werfen, und von der Verehrung, die wir Ihnen entgegen bringen, Zeugniß abzulegen.

Die innere Neigung und die Ansprüche des doppelten Lehramtes, das Ihren Händen anvertraut war, legten Ihnen die Beschäftigung mit Fragen nahe, welche dem Grenzgebiete der Physik und der Chemie angehörten. Mit divinatorischem Blicke griffen Sie die eigenthümlichen Vorgänge heraus, die von Faraday bei seinen elektrolytischen Arbeiten gelegentlich bemerkt, aber nicht weiter untersucht worden waren. In der „Wanderung der Jonen" begrüßen wir eine der epochemachenden Arbeiten, durch die Sie Sich ein unvergängliches Denkmal in der Geschichte der Wissenschaft gesetzt haben; und wir schätzen diese Leistung um so höher, wenn wir bemerken, daß ihre Arbeit nicht getragen war von der Gunst des Tages, daß sie der Beschränktheit äußerer Mittel in selbstloser Hingabe abzuringen war. Aber die Zeit kam, welche